This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

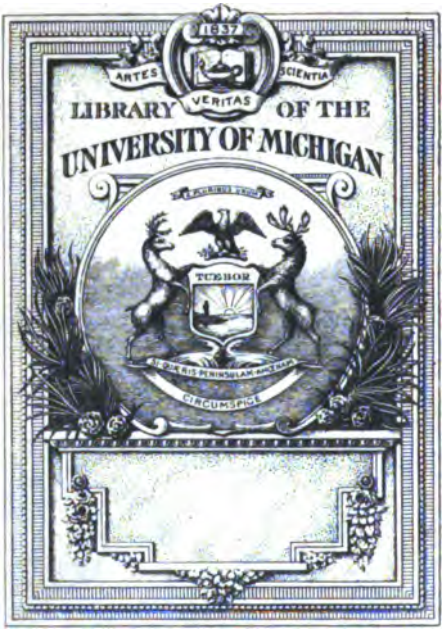
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

MATHEMATICS
QA
5
K15

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und litterarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung

von

Georg Simon Klügel

Professor der Mathematik und Physik auf der Friedrichs-Universität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wissenschaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig.

GERMAN LIBRARY University of MICHIGAN

Erste Abtheilung

Die reine Mathematik.

Zweyter Theil

von E bis J

mit sechs Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertschen Verlage 1805.

Mathematiſches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literariſchen Nachrichten in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Arithmetik, Analyſis und Geometrie, die niedere und die höhere.

E.

Ebene iſt eine Fläche, auf welcher jede, durch irgend zwey Puncte derſelben gezogene gerade Linie mit allen ihren Puncten liegt. Sie iſt allenthalben, in größern wie in kleinern Theilen, gleichförmig ausgedehnt, weil auf der geraden Linie die Theile durchgehends eine gleichförmige Lage haben.

Euklides ſagt: Eine ebene Fläche iſt, welche zwiſchen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerley Art liegt. Dieſe Erklärung iſt ſeiner von der geraden Linie gegebenen analog. Die gerade Linie iſt nach ihm diejenige, welche zwiſchen jeden in ihr befindlichen Puncten auf einerley Art liegt. Er deutet durch jene Erklärung die Gleichförmigkeit der Ausdehnung an einer Ebene an. Wie auch eine Ebene durch gerade Linien begränzt ſeyn mag, ſo iſt die Form der Fläche ſelbſt dieſelbe, nur die Größe und die äußere Geſtalt mögen verſchieden ſeyn. Euklides ſetzt in der That voraus, daß ſich in einer Ebene allenthalben gerade Linien ziehen laſſen.

Proklus in seinem weitschweifigen Commentar über das erste Buch des Euklides versteht die Erklärung der Ebene bey demselben so, daß die Ebene zwischen zwey geraden Linien einen Raum einnehme, der so groß ist als der Raum zwischen diesen Linien. Auf ähnliche Art versteht er auch die Erklärung von der geraden Linie, welche Euklides giebt. Schwerlich hat Euklides dieses sagen wollen. Proklus führt auch noch die hier gegebene Erklärung an; ferner diese, daß sie unter allen zwischen denselben Gränzen eingeschlossenen Flächen die kleinste Ausdehnung habe, und, daß sie eine solche ist, deren mittlere Theile die äußern verdecken.

In diesem Artikel wird sich die wichtige Lehre von der Lage der Ebenen gegen einander, und der geraden Linien gegen Ebenen am schicklichsten abhandeln lassen. Der Kürze wegen beziehe ich mich in Absicht der Beweise auf die Elemente des Euklides im 11ten Buche.

1. Drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene. Denn man verbinde die drey Puncte durch gerade Linien, und begränze durch diese eine Fläche, in welche alle gerade Linien fallen, die von einem Puncte einer der Linien zu einem Puncte einer der beiden andern gezogen sind. Diese Fläche ist eine Ebene. Die Verlängerungen aller jener Linien fallen in die erweiterte Ebene des Dreyecks, die also auch bestimmt ist.

3 Zwey gerade Linien, die sich schneiden, liegen in einer Ebene. Folgt aus (1.).

2. Zwey Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie.

4 Der Winkel zweyer sich schneidenden Ebenen ist der Winkel der in ihnen auf die gemeinschaftliche Durchschnittlinie durch denselben Punct gezogenen senkrechten. Die Ebenen (Fig. 1. Tab. IX.) seyn CABE, DABF, ihr Durchschnitt AB, die auf AB in den beiden Ebenen durch A gezogenen senkrechten seyn CA, DA, so ist der Winkel CAD der Winkel der beiden Ebenen. Wegen der gleichförmigen Ausdehnung ebener Flächen ist es gleichgültig, durch welchen Punct

der Durchschnittslinie die Perpendikel gezogen werden. Sind EB und FB senkrecht auf AB durch B, jene in der Ebene CABE, diese in DABF, so ist der Winkel EBF = CAD. Dieses läßt sich aber auch streng erweisen, §. 13.

Die Linien CA, DA müssen senkrecht auf AB seyn, weil ihre Neigung gegen AB Einfluß auf die Größe des W. CAD hat. Bey der senkrechten Lage gegen AB hängt der W. CAD bloß von der Lage der Ebenen ab. S. unten, 8.

5. Eine Ebene ist senkrecht auf eine andere, wenn der Winkel der durch einen Punct ihrer Durchschnittslinie in den beiden Ebenen auf jene senkrecht gezogenen ein Rechter ist. Euklides setzt: Wenn die geraden Linien, die in der einen Ebene senkrecht auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt gezogen werden, auf die andere Ebene senkrecht stehen.

6. Eine gerade Linie ist auf eine Ebene senkrecht, wenn sie mit allen geraden Linien, die in dieser Ebene durch den Punct, worin sie dieselbe trifft, gezogen werden, einen rechten Winkel macht.

7. Wenn eine gerade Linie auf zwey einander sich schneidende gerade Linien senkrecht ist, so ist sie auf jede durch deren Durchschnitt in ihrer Ebene gezogene gerade Linie senkrecht, und daher senkrecht auf die Ebene selbst. In Fig. 1, ist BA senkrecht auf AC und AD, daher auch senkrecht auf jede AG, die in der Ebene CAD liegt, und daher ist BA senkrecht auf diese Ebene.

8. Wenn der W. CAG = GAD, und BA senkrecht auf die Schenkel dieser Winkel ist, so haben die Ebenen CAB, GAB ganz dieselbe Lage gegen einander wie GAB und DAB. Darum werden die Winkel der Ebenen durch die Winkel der auf ihren Durchschnitt in einem Puncte derselben senkrechten gemessen.

9. Drey durch einen Punct A (Fig. 1.) gezogene gerade AC, AD, AG sind in derselben Ebene, wenn eine gerade BA auf alle drey senkrecht ist.

10. Zwey auf eine Ebene DAC (Fig. 1.) senkrechte BA, EC sind parallel.

11. Wenn von den zwey Parallellinien, BA, EC, die eine, BA, senkrecht auf die Ebene DAC ist, so ist auch die andere, EC, senkrecht auf diese Ebene.

12. Gerade Linien EC, FD, welche der Linie BA, die nicht in der Ebene jener beiden liegt, parallel sind, sind einander parallel.

13. Zwey in verschiedenen Ebenen liegende Winkel CAD, EBF, die von den parallelen, AC und BE, AD und BF, eingeschlossen werden, sind einander gleich.

14. Aufg. Auf eine gegebene Ebene von einem über derselben gegebenen Puncte, A, eine senkrechte zu ziehen.

In der gegebenen Ebene MN (Fig. 2.) ziehe man willkührlich die gerade BC, und fälle auf sie die senkrechte AD. Ist diese nicht senkrecht auf die Ebene, so ziehe man in derselben durch D die senkrechte ED auf BC, und auf diese in der Ebene ADE die senkrechte AF. Diese ist auf die Ebene der Linien, BC, ED, oder die Ebene MN, senkrecht.

15. Aufg. Auf eine gegebene Ebene durch einen in derselben gegebenen Punct eine senkrechte zu errichten.

Die Ebene (Fig. 3.) sey MN, in derselben der gegebene Punct, A. Über der Ebene nehme man irgend einen Punct B, und fälle von diesem die senkrechte BC auf die Ebene. Mit BC ziehe man durch A die parallele AD, so ist diese die gesuchte senkrechte.

16. Parallele Ebenen sind, welche nie zusammen treffen, so weit sie auch nach jeder Richtung fortgesetzt werden.

17. Ebenen, auf welche eine gerade Linie senkrecht ist, sind parallel. Als in Fig. 1. sind die Ebenen CAD, EBF, parallel, wenn AB auf beide senkrecht ist.

18. Die Ebenen zweyer Winkel sind parallel, wenn die Schenkel der Winkel parallel sind. In Fig. 1. sey

BE parallel mit AC, und BF parallel mit AD, ſo ſind die Ebenen der Winkel CAD, EBF, parallel.

19. Die Durchſchnitte paralleler Ebenen mit einer ſie ſchneidenden ſind einander parallel.

20. Wenn zwey gerade Linien durch parallele Ebenen geſchnitten werden, ſo ſind die Theile der Linien, welche zwiſchen einerley Ebenen liegen, proportional.

21. Iſt eine gerade Linie AB (Fig. 1.) auf eine Ebene CAD ſenkrecht, ſo ſind alle durch die AB gelegten Ebenen, wie CAB, DAB, auf dieſelbe Ebene, CAD, ſenkrecht.

22. Sind zwey einander ſchneidende Ebenen, EA, FA, (Fig. 1.) auf eine Ebene CAD ſenkrecht, ſo iſt ihr Durchſchnitt, AB, auf dieſelbe Ebene ſenkrecht.

23. Die Folge der Sätze iſt, wie bey Euklides im 11ten Buche. Der erſte Satz daſelbſt, daß eine gerade Linie nicht zum Theil in einer Ebene, zum Theil auſſer ihr befindlich ſeyn könne, iſt eine unmittelbare Folgerung aus der hier angenommenen Erklärung einer Ebene. Der Beweis, den Euklides von dem Satze giebt, ſcheint das zu beweiſende vorauszuſetzen. Der zweyte Satz daſelbſt iſt zweytheilig. Der eine Theil iſt hier der Satz in (2.); der zweyte Theil: Jedes Dreyeck liegt in einer Ebene, iſt in (1.) enthalten. Der 7te Satz bey Euklides iſt eine Folge unſerer Erklärung der Ebene, und iſt hier weggelaſſen.

24. Wenn man zu dem Hülfsſatze (Eukl. 13.), daß durch einen Punct einer Ebene nur eine einzige ſenkrechte Linie auf ſie möglich iſt, noch den analogen Satz fügt, daß durch eine gerade Linie auf einer Ebene nur eine ſenkrechte Ebene auf ſie geſetzt werden kann, ſo läßt ſich der Satz (10; Eukl. 6.) leichter erweiſen, als es von E. geſchehen iſt.

Die Sätze, 21 und 22, ſollten wegen ihres Inhalts auf (11.) folgen. Der erſtere läßt ſich vermöge der hier in (5.) gegebenen Erklärung leichter erweiſen. Anſtatt des indirecten Beweiſes von (22.) bey Euklides, 19.

Satz, wird beſſer ein directer geſetzt. Man ſehe Segners Anfangsgründe, §. 517.

25. Wenn zwey Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo iſt die in einer derſelben auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt ſenkrecht gezogene gerade Linie auf die andere Ebene ſenkrecht.

Die Ebene DAFE (Fig. 3.) ſey ſenkrecht auf die Ebene MN, ihr Durchſchnitt AF, in jener ſey BC ſenkrecht auf AF. Man ziehe in der Ebene MN die GC ſenkrecht auf AF, ſo iſt BCG ein rechter Winkel, da die Ebenen ſenkrecht auf einander ſind, und BC ſteht auf zwey Linien, AF, GC, in der Ebene MN ſenkrecht, alſo auf die Ebene.

Der Satz fehlt bey Euklides, fließt aber unmittelbar aus ſeiner in (5.) angeführten Erklärung.

26. Eine gerade Linie iſt geneigt gegen eine Ebene, wenn ſie mit irgend einer Linie in der Ebene einen ſchiefen Winkel macht, wie die Linie AD (Fig. 2.) mit DF, die in der Ebene MN durch den Punct D, worin AD ſie trifft, gezogen iſt.

27. Die Neigung der Linie AD gegen die Ebene MN iſt der Winkel ADF, welchen AD mit der DF macht, die durch den Punct D in der Ebene und der Linie AD nach dem Puncte F gezogen iſt, worin die ſenkrechte AF von einem Puncte A der AD die Ebene trifft.

Da die Ebene des Dreyecks ADF ſenkrecht auf die Ebene MN iſt (21.), ſo iſt die gerade BC, die auf DF ſenkrecht iſt, auf die Ebene des Dreyecks ſenkrecht (25.), alſo ſenkrecht auf AD. Solchergeſtalt wird die Neigung der AD gegen die Ebene, nach der in der Erklärung angegebenen Art ſie zu meſſen, ohne Einmiſchung einer Neigung gegen BC gefunden.

Die Ebene des Dreyecks ADF nenne man die Neigungs-Ebene.

28. Eine gerade Linie iſt einer Ebene parallel, wenn ſie, unbeſtimmt weit verlängert, dieſelbe nicht trifft. Sie kann ſie nicht treffen, wenn ſie mit irgend einer geraden Linie in derſelben parallel iſt. Sie liegt nämlich ganz in

Ebene, die durch dieſe Linie und einen ihrer Puncte gelegt iſt. S. Parallelen.

29. Die Linie AB (Fig. 1.) ſey parallel mit der Ebene EFD. Man lege durch AB zwey Ebenen, ABEC, ABFD, welche jene Ebene in CE, DF ſchneiden, ſo ſind dieſe Durchſchnittslinien mit der AB und unter ſich parallel. Denn da AB die Ebene CF nicht trifft, alſo auch CE nicht ſchneidet, und mit derſelben in einer Ebene CE liegt, ſo iſt ſie der CE parallel. Eben ſo verhält es ſich mit AB und DF. Da nun CE mit AB parallel iſt, iſt ſie auch der Ebene AF parallel, (28.), daher auch die Linie DF, die mit ihr in einer Ebene liegt, und von ihr nicht geſchnitten wird.

30. Zwey gerade Linien, CE, DF (Fig. 1.) ſind parallel, ſo iſt der Durchſchnitt AB zweyer durch ſie gelegten Ebenen, CEBA, DFBA, jeder derſelben parallel. Denn EC iſt parallel der Ebene DB (28.), ſchneidet alſo AB nicht, und iſt, da ſie mit dieſer in einer Ebene CEBA liegt, ihr parallel. Eben ſo wird erwieſen, daß DF der AB parallel iſt.

31. Wenn eine gerade Linie zweyen ſich ſchneidenden Ebenen parallel iſt, ſo iſt ſie der Durchſchnittslinie derſelben parallel. Es ſey nämlich die gerade AB (Fig. 4.) den Ebenen CDFE, CDHG parallel, deren Durchſchnittslinie CD iſt. Man lege durch AB die beiden Ebenen, ABFE, ABHG, deren erſtere die Ebene CF in EF, die andere die Ebene CH in GH ſchneide. Dieſe Linien ſind, da AB mit den Ebenen parallel iſt, der Linie AB parallel, alſo auch einander ſelbſt (12). Der Durchſchnitt CD der durch EF und GH gelegten Ebenen iſt ihnen parallel (30.); alſo auch der AB, die mit eben denſelben parallel iſt (12.).

Die Sätze 28 — 31. fehlen bey Euklides. Noch eine Zugabe ſind folgende Sätze.

32. Die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen ſteht ſenkrecht auf jede derſelben.

In (Fig. 1.) iſt der Winkel CAD der Neigungswinkel der Ebenen CAB, DAB, ſo daß AB auf die

Schenkel AC, AD senkrecht ist. Daher ist AB senkrecht auf die Ebene des Neigungswinkels, also sind die durch AB gelegten Ebenen CAB, DAB senkrecht auf jene Ebene.

33. Wenn zwey parallele Ebenen von einer Ebene geschnitten werden, so sind ihre Neigungswinkel gegen sie gleich groß.

Man ziehe in der schneidenden Ebene, A, eine senkrechte auf die einander parallelen Durchschnittslinien der parallelen Ebenen, P, P und setze durch diese senkrechte eine auf A senkrechte Ebene, B, so sind jene Durchschnittslinien senkrecht auf die Ebene B, nach (25.), und daher sind die Ebenen P, P, senkrecht auf die Ebene B, aus (21.). Die Durchschnittslinien der Ebene B mit der A und den parallelen Ebenen machen den Neigungswinkel der letztern mit der Ebene A (32.). Da diese Durchschnittslinien sich parallel sind, so sind die Neigungswinkel sich gleich.

34. Parallellinien haben gegen dieselbe Ebene einerley Neigung.

Wenn zwey Linien, wie AD: (Fig. 2.), parallel sind, so sind es auch die senkrechten von irgend einem Puncte derselben auf eine gegebene Ebene, (10.), also auch die Ebenen der Winkel, wie DAF, (18), folglich auch die Grundlinien, wie DF, in der Ebene, daher sind die Winkel wie ADF gleich (13.), oder die Neigungswinkel (27.) in den Neigungsebenen sind sich gleich.

Effectio ist die geometrische Auflösung oder Construction einer Aufgabe oder Gleichung. Das Kunstwort wird gegenwärtig selten gebraucht.

Eilferprobe, s. Rechnungsprobe.

Einfach ist, was nicht zusammengesetzt oder verwickelt ist. Eine einfache Aufgabe ist eine solche, welche nur einen Werth der gesuchten Größe zuläßt. Ein einfacher Bruch ist, worin Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Eine einfache Größe ist, die nicht aus

andern bestimmten Theilen oder Factoren zusammengesetzt ist, ob sie gleich, wie jede Größe, auf unendliche Arten theilbar bleibt. Man möchte sie eine formlose Größe nennen. Eine einfache ganze Zahl ist, die keine ganze Zahl-Factoren enthält, was man auch eine Primzahl nennt.

Einer sind in dem dekadischen Zahlensystem die ersten neun Zahlen; in dem dodekadischen die ersten eilf Zahlen; überhaupt in jedem Zahlensystem die ersten ganzen Zahlen von Eins bis zu der nächsten vor der Grundzahl.

Eingebildete Größe. s. unmögliche Größe.

Einheit ist der Begriff, welcher beym Zählen wiederholt wird, oder das Gemeinsame in der Vielheit. Die Einheit ist entweder eine benannte oder unbenannte (allgemeine). Z. B. zwölf Menschen, sieben Thaler, vier Jahre sind eine Vielheit mit der benannten Einheit, Mensch, Thaler, Jahr; aber zwölf, sieben, vier sind eine Vielheit mit einer unbestimmten Einheit, oder einzelne Dinge. Wenn die Einheit getheilt wird, aber so, daß der Theil eine Beziehung auf das Ganze, die ursprüngliche Einheit, behält, so muß man die neue Einheit durch die Benennung, Bruch-Einheit, unterscheiden. Z. B. bey Dreyviertel Jahr, ist ein Vierteljahr die Bruch-Einheit. Neun Monate sind eine Vielheit für sich, mit der absoluten Einheit, Monat. — Die Einheit beym Zählen ist willkührlich. Bey einerley Größe, Menge oder Werth, verhält sich die Anzahl der Einheiten umgekehrt wie die Einheit.

Einmahleins ist eine Tafel der Producte je zweyer Zahlen unter Zehn, und zwar in dem dekadischen System. Folgendes ist ein Stück aus einem Einmahleins in der Dodekadik, worin die Ziffern vor dem Punkte Zwölfer bedeuten.

7	mahl	7	ist	4	.	1	8	mahl	8	ist	5	:	4	.
7	=	8	=	4	.	8	8	=	9	=	6	.	0	.
7	=	9	=	5	.	3	8	=	10	=	6	.	8	
7	=	10	=	5	.	10	8	=	11	=	7	.	4	
7	=	11	=	6	.	5	8	=	12	=	8	.	0	
7	=	12	=	7	.	0								

Einrichten der Brüche ist, sie auf einerley Nenner bringen, ohne ihre Größe zu verändern. S. Bruchrechnung.

Eins ist die erste in der Folge der ganzen Zahlen.

Einschalten, Interpoliren, heißt, aus einigen gegebenen Gliedern einer Fortschreitung, die mit den Gliedern einer andern Fortschreitung auf irgend eine Art verknüpft sind, ein Glied in jener so bestimmen, daß es aus dem zugehörigen Gliede der andern Fortschreitung vollkommen oder nahe genug auf dieselbe Art zusammengesetzt werde, wie die gegebenen Glieder aus den zu ihnen gehörigen Größen. Die Glieder der zugeordneten Reihe werden als bloße Zahlen betrachtet, und sind entweder ursprünglich Stellenzahlen für die Glieder der Reihe, oder werden als solche gebraucht. Man nennt sie auch die Wurzeln, und die durch sie zu bestimmenden Größen die Functionen der Wurzeln.

1. Wenn jedes Glied der gegebenen Reihe eine algebraische Function seiner Stelle ist, so ist die Einschaltung nichts anders als in dieser Function für ihre Wurzel statt ganzer Zahlen gebrochene setzen, welche die Stelle des einzuschaltenden Gliedes bezeichnen. So ist $a^{\frac{n}{m}}$ das nte Glied einer geometrischen Reihe, die aus der Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 : a^4$; etc. entstanden ist, indem zwischen je zwey Gliedern dieser Reihe, $m - 1$ Glieder in geometrischer Fortschreitung eingeschaltet sind. Da $(a + b^{\frac{n}{m}}$ auch ein solches eingeschaltetes Glied ist, so hat man in dem

entwickelten Werthe von $(a + b)^n$ statt n nur $\frac{n}{m}$ zu setzen, weil dadurch für jeden Terminus des Werthes der Potenz eben so der Werth eines eingeschalteten erhalten wird, s. Binomischer Lehrsatz, Th. I. S. 328. Gleichfalls wird der für ganze Stellenzahlen gefundene Werth des Gliedes einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung für gebrochne Stellenzahlen eingerichtet, wenn man diese statt jener nimmt, s. arithm. Reihen höherer Ordn. Th. I. S. 210.

2. Wenn die Glieder einer Reihe durch eine transscendente Function gegeben werden, oder auch durch eine verwickelte algebraische, so betrachtet man ein Stück der Reihe als eine arithmetische einer höhern Ordnung, in welcher man zwischen zwey berechneten Gliedern eine beliebige Anzahl Glieder, in gleichen Abständen von einander, mittelst der Anfangsglieder der Differenzreihen einschiebt. Die allgemeinen Formeln für diese Anfangsglieder sind in der Differenzenrechnung (48.), und in dem Artikel, Differentiale, S. 823. in einer etwas veränderten Gestalt, angegeben. Beyspiele dazu sind an dem erstern Orte, und in dem Artikel, Cyklotechnie, S. 692. anzutreffen. Hat man in jedem einzelnen Falle die numerischen Werthe der Anfangsglieder in den Differenzreihen berechnet, so ist es leicht, durch die successive Addition (mit Beobachtung der Vorzeichen) aus den Gliedern einer Differenzreihe die in der vorhergehenden Reihe zu finden, bis daß man auf die Hauptreihe selbst kommt. Da diese Berechnung nur bis zu einer gewissen bestimmten Gränze genau ist, wenn nämlich die Differenzen nicht zuletzt constant werden, so entfernen sich die berechneten eingeschalteten Glieder immer etwas mehr von dem wahren Werthe. Darum müssen in der Hauptreihe einige Glieder in gröbern Abständen unmittelbar aus der analytischen Formel für dieselben berechnet, und diese hinlänglich genauen Werthe mit denen, welche die Einschaltung in ihren Stellen liefert, verglichen werden. Fände sich ein bedeutender Unterschied, so hätte man der Differenzreihen zu

wenige, oder das Intervall der Einschaltung zu groß genommen.

3. Exempel. In dem Artikel, Differenzenrechnung (50.) ist für die Sinus der Winkel, 42°; 42° 1′; 42° 2′; 42° 3′; u. s. f. der Centesimaltheilung, gefunden das Anfangsglied der ersten Differenzreihe = + 124109698 Billiontheilchen für den Halbmesser als Einheit; der zweyten = — 15126; der dritten = — 3.

Nach den Callettschen Tafeln, oder nach Hobert und Ideler in der Einleitung, S. XXIX. ist sin 42° = 612907 053653 solcher Theilchen. Hieraus werden nun die Sinus von 42° 1′; 42° 2′, u. ff. gefunden.

III.	II.	I.
— 3	— 15126	+ 124109698
	— 15129	+ 124094572
	— 15132	+ 124079443
	— 15135	+ 124064311
	— 15138	+ 124049176
	— 15141	+ 124034038
		+ 124018897

Aus den ersten Differenzen werden nun gefunden die

Sinus	Bogen
612907 053658	42° 0′
613031 163351	42 1
613155 257923	42 2
613279 337366	42 3
613403 401677	42 4
613527 450853	42 5
613651 484891	42 6
613775 503788	42 7

Der Sinus von 42°7′ ist in dem von Hobert und Ideler a. a. O. berechneten Beyspiele 0,613775 503781 22.. Die Rechnung ist daselbst bis zu den sechsten Differenzen und bis auf die 28ste Decimalstelle getrieben. Die Werthe der auf diese Art berechneten Sinus werden allmählig immer mehr von den wahren abweichen. Wollte man sie bis in die zehnte Decimalstelle genau haben, so muß man die Sinus von Grad zu Grad, nach den Umständen auch für größere oder kleinere Intervalle der Winkel, hinlänglich genau berechnen, und bey jedem Abschnitte von Einschaltungen die dazu gehörigen Anfangsglieder der Differenzreihen suchen. So verfährt man in jedem andern Falle.

4. Wenn für die Größen einer Reihe keine Formel ihrer Zusammensetzung aus den Stellenzahlen vorhanden ist, wie es sich oft ereignet, wenn sie durch Beobachtung gegeben werden, oder wenn es Zahlen in Tafeln sind, die durch eine sehr verwickelte Rechnung gefunden worden, so ist das allgemeinste Mittel zur Einschaltung, daß man die gegebenen Größen als Glieder einer arithmetischen Reihe einer gewissen Ordnung ansehe, sie mögen gleiche oder ungleiche Abstände von einander haben. Je näher diese Voraussetzung der Wahrheit kommt, desto weiter dürfen die gegebenen Größen von einander abstehen, und man wird selbst noch ausserhalb ihres Bezirks die Einschaltung fortsetzen können; in dem gegenseitigen Falle wird man nur die zwischen den gegebenen Größen liegenden suchen, und den Abstand der äussersten unter ihnen nur mäßig seyn lassen dürfen.

5. Bey der Interpolation berechneter Tafeln kann man dieses Verfahren immer anwenden, weil die Abstände und die Unterschiede der darin angegebenen Größen klein genug sind, daß der Fehler, den man dabey begehen mag, ganz unbedeutend wird, und weil man, wo zwey oder drey gegebene Größen nicht Genüge thun, mehrere nehmen kann. Allein bey Größen, die durch Beobachtung gegeben werden, ist es oft nicht genügend, eine individuelle Größe zu finden, sondern man will eine solche allgemeine Formel

$$\alpha = P;\ \beta = \frac{Pn}{m} + \frac{Qn.n-m.}{mn};$$

$$\gamma = \frac{Pp}{m} + \frac{Qp.p-m.}{mn} + \frac{Rp.p-m.p-n}{mnp};$$

$$\delta = \frac{Pq}{m} + \frac{Qq.q-m.}{mn} + \frac{Rq\ q-m.q-n.}{mnp} + \frac{Sq.q-m\ q-n.q-p.}{mnpq};$$

u. s. f.

Mittelst dieser Gleichungen wird der Werth jedes Coefficienten durch die vorhergehenden gefunden. Werden diese durch die gegebenen Werthe von α, β, etc. und durch die Abstände nach der Reihe zusammengesetzt, so wird gefunden:

$$P = \alpha$$

$$Q = \frac{m\beta}{n-m} + \frac{n\alpha}{m-n}$$

$$R = \frac{mn\gamma}{p-m.p-n.} + \frac{mp\beta}{n-m.n-p.} + \frac{np\alpha}{m-p.m-n.}$$

$$S = \frac{mnp\delta}{q-m.q-n.q-p.} + \frac{mnq\gamma}{p-m.p-n.p-q.} + \frac{mpq\beta}{n-m.n-p.n-q.} + \frac{npq\alpha}{m-n.m-p.m-q.}$$

u. s. w.

Die Art der Zusammensetzung ist offenbar und übereinstimmend. In den binomischen Factoren der Nenner ist immer derjenige Abstand vorangesetzt, der zu dem in dem Zähler befindlichen Factor aus den Grössen α, β, γ, δ, etc. gehört, um die Formen ganz übereinstimmig zu machen.

Die Abstände der Glieder von dem Anfangsgliede können auch zum Theil negativ genommen werden so wie auch die Unterschiede α, β, γ, etc von dem Anfangsgliede. Die Werthe von m, n, p, q, etc. brauchen nicht der Grösse nach auf einander zu folgen.

7. Exempel. Aus den größern logarithmischen Ta-
[illegible] sind

Zahlen	Logarithmen		Unterschiede
10000	4,00000	00000	
10002	4,00008	68502	868502
10004	4,00017	36831	868329
10006	4,00026	04985	868154

[illegible]er ist $a = 868502$ Zehntausendmilliontheilchen; [illegible] $= -173$; $c = -2$ dergleichen. Man sucht log. [illegible]00003, so ist $x = \frac{3}{2}$; $ax = +1302753$; [illegible] $\frac{x(x-1)}{1.2} = -65$, $\frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3} = +\frac{2}{10}$; [illegible] folglich log. $10003 = 4,0001302688$, wie [illegible] den Tafeln.

8. In der obigen Formel sind 1; 2; 3; 4; u. s. f. die [illegible]stände der Glieder von dem Anfangsgliede. Setzt man [illegible] Unterschiede derselben ungleich, und die Abstände von [illegible] Anfangsgliede, m, n, p, q, etc. so entsteht die [illegible]gemeinere, aber jener analoge Formel,

$$y = \frac{Px}{m} + \frac{Qx(x-m)}{mn} + \frac{Rx(x-m)(x-n)}{mnp} + \frac{Sx(x-m)(x-n)(x-p)}{mnpq} + \text{etc.}$$

[illegible] die Coefficienten P, Q, R, S, etc. durch die gegebe[illegible] Werthe von y zu bestimmen sind. Diese seyn für die

Abstände m, n, p, q, etc.
α, β, γ, δ, etc.

Das Anfangsglied, für welches $x = 0$ ist, sey A, also das Glied in dem Abstande m sey $A + \alpha$, u. s. f. in dem Abstande x sey es $A + q$. Nun ist

I. $A = a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4$

II. $A' = a + b(m+n) + c(m^2 + mn + n^2)$
$+ d\,m^3 + m^2n + mn^2 + n^3)$
$+ e\,m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$

u. s. f. für A'', A''', etc.

Ferner setze man $\frac{A'-A}{n} = B$; $\frac{A''-A'}{p-m} = B'$; $\frac{A'''-A''}{q-n}$
$= B''$, u. s. f. so ist

I. $B = b + c(m+n) + d(m^2 + mn + n^2)$
$+ e(m^3 + m^2n + mn^2 + n^3)$

II. $B' = b + c(m+n+p)$
$+ d(m^2 + mn + mp + n^2 + np + p^2)$
$+ e(m^3 + m^2n + m^2p + mn^2 + mnp$
$+ mp^2 + n^3 + n^2p + np^2 + p^3)$

u. s. f.

Man setze nun $\frac{B'-B}{p} = C$; $\frac{B''-B'}{q-m} = C'$; $\frac{B'''-B''}{r-n}$
$= C''$, so ist

I. $C = c + d(m+n+p)$
$+ e(m^2 + mn + mp + n^2 + np + p^2)$.

II. $C' = c + d(m+n+p+q)$
$+ e(m^2 + mn + mp + mq + n^2 + np$
$+ nq + p^2 + pq + q^2)$

und so auch C''.

Ferner setze man $\frac{C'-C}{q} = D$; $\frac{C''-C'}{r-m} = D'$;

so ist

I. $D = d + e(m+n+p+q)$

II. $D' = d + e(m+n+p+q+r)$.

Noch sey $\frac{D'-D}{r} = E$, so ist

$E = e$.

Die Grösen A, B, C, D, E, sind die Anfangsglieder der Differenzreihen, so fern die Differenzen durch die Abstände der Glieder auf die gezeigte Art modificirt werden. Das Gesetz, wie die mit a, b, c, d, etc. ver-

9. Wenn die Abſtände der gegebenen Größen von einander gleich groß und $= m$ ſind, wenn ferner $n = 2m$; $p = 3m$; $q = 4m$; u. ſ. f. ſo verwandeln ſich die Werthe von P, Q, R, S, etc. in die von a, b, c, d, etc. in (6.).

10. Wenn die Glieder der Formeln für y entwickelt, und nach den Potenzen von x geordnet werden, ſo geht die Formel, wie

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

über. Die Coefficienten von x können mittelſt der für P, Q, etc. gefundenen Werthe beſtimmt werden. Unabhängig von dieſen liefert ſie folgendes Verfahren.

Es ſeyn in der

Stellen: o, m, n, p, q, r, etc.

die Werthe von y: $\circ, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc.

In der Stelle x gehöre der durch y bezeichnete Werth, wo es ſey

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

a, b, c, d, e, etc. irgend welche Größen ſeyn mögen. Werden für x die Werthe m, n, p, etc. geſetzt, ſo iſt, wenn die Gleichung für y nicht mehr als fünf Glieder hat,

I. $\alpha = am + bm^2 + cm^3 + dm^4 + em^5$

II. $\beta = an + bn^2 + cn^3 + dn^4 + en^5$

u. ſ. f. indem für die Buchſtaben α, β, etc. wie auch m, n, etc. nach der Reihe der nächſtfolgende geſetzt wird.

Es ſey $\frac{\alpha - o}{m - o}$ oder $\frac{\alpha}{m} = A$; $\frac{\beta - \alpha}{n - m} = A'$; $\frac{\gamma - \beta}{p - n} = A''$; $\frac{\delta - \gamma}{q - p} = A'''$, u. ſ. f. wo man den Werth von A mit dem obigen, als Anfangsgliede, nicht verwechſeln darf, ſo iſt

Abstände der Glieder von einander, sowohl der nächsten als der entferntern. Die Form für y nach der Zusammensetzung in (12) hat Newton in den Princip. Philos. nat. L. III. Lemma 5. cas. 2. angegeben, und in cas. 1. die Form für y in (6.), bey gleich großen Abständen der Glieder von einander.

14. Wo nur zwey Größen, A und $A+\alpha$, in dem Abstande m gegeben sind, ist der Unterschied der interpolirten, $A+y$, von A der arithmetische oder einfache Proportionaltheil $y=\frac{\alpha x}{m}$, oder es ist $m:x=\alpha:y$. Diese Interpolation findet nur Statt bey Functionen, deren Veränderungen sehr nahe den Unterschieden ihrer Wurzeln oder Stellenzahlen proportional sind, oder dient nur zu einer ungefähren Bestimmung des eingeschalteten Werthes.

15. Es seyn drey Größen, A, $A+\alpha$, $A+\beta$, mit den Stellenzahlen, o, m, n, gegeben; das Glied $A+y$ ist in der Stelle x einzuschalten, so ist nach der Formel in (8.)

$$y=\frac{x-n}{m-n}\cdot\frac{\alpha x}{m}+\frac{x-m}{n-m}\cdot\frac{\beta x}{n}.$$

Nimmt man zum ersten Theile den einfachen Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$, so ist

$$y=\frac{\alpha x}{m}+\frac{x-m}{n-m}\left(\frac{\beta x}{n}-\frac{\alpha x}{m}\right).$$

Nimmt man aber zum ersten Theile den Proportionaltheil $\frac{\beta x}{n}$, so ist

$$y=\frac{\beta x}{n}+\frac{x-n}{m-n}\left(\frac{\alpha x}{m}-\frac{\beta x}{n}\right).$$

Die Function $A+y$ verändert sich ungleichförmig. Nimmt sie stärker zu als nach dem Verhältnisse $m:x$, so ist für einen Werth zwischen den beiden, $A+\alpha$, und

$A+\beta$, wenn n gröſſer als m iſt, der Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$ kleiner als y, aber $\frac{\beta x}{n}$ gröſſer als y, daher die Verbeſſerung jenes additiv, des zweyten ſubtractiv iſt; in dem entgegengeſetzten Falle umgekehrt.

16. Es ſeyn vier Gröſſen, A, $A+\alpha$; $A+\beta$, $A+\gamma$, gegeben, mit den Stellenzahlen, o, m, n, p; das Glied $A+y$ in der Stelle x ſey einzuſchalten. Nach der Formel (8) iſt, wenn dieſelbe nach den drey einfachen Proportionaltheilen geordnet wird,

$$y = \frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.} \cdot \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.} \cdot \frac{\beta x}{n} + \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n} \cdot \frac{\gamma x}{p}$$

Die Theile von y müſſen aus dem einfachen Proportionaltheile und aus den Abſtänden m, n, p, x auf gleichförmige Art gebildet werden. Daher braucht man nur einen der Theile zu finden, um die andern durch gehörige Vertauſchungen daraus herzuleiten.

Wie die Abſtände, m, n, p, und x, der Gröſſe nach auf einander folgen, iſt willkührlich. Es iſt hier nur auf die Symmetrie der Zuſammenſetzung geſehen. Einige derſelben mögen negativ genommen werden, ſo wie die Werthe von α, β, γ.

Das Geſetz der Formation für mehr als drey Unterſchiede von dem Anfangsgliede A erhellt ſchon vollkommen.

17. Nimmt man zum erſten Theile den Proportionaltheil $\frac{\alpha x}{m}$, ſo muß dieſer durch die Unterſchiede deſſelben von den beiden andern verbeſſert werden, auf ähnliche Art wie bey der zweyten Formel in (15.). Zu dem Ende ziehe man von dem Bruche $\frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.}$ erſtlich die Einheit

ab, so bleibt $\frac{x-m}{m-n} \cdot \frac{x+m-n-p}{m-p}$, oder $\frac{x-m}{n-m} \cdot \frac{x+m-n-p}{p-m}$. Dazu addire man den Factor des zweyten Proportionaltheils, nämlich $\frac{x-m}{n-m} \cdot \frac{x-p}{n-p}$, so ist, nach den gehörigen Reductionen, die Summe $= \frac{x-m.x-n.}{p-m.n-p.}$, oder $= -\frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n.}$.

Also ist $\frac{x-m}{n-m} \cdot \frac{x+m-n-p}{p-m} = -\frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.} - \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n.}$, und

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m.x-p.}{n-m.n-p.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) + \frac{x-m.x-n.}{p-m.p-n.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Folgen die Abstände m, n, p der Ordnung nach auf einander, und wird x zwischen m und n, genommen, so ist

$$y = \frac{\alpha x}{m} + \frac{x-m.p-x.}{n-m.p-n.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{x-m.n-x.}{p-m.p-n.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\alpha x}{m}\right).$$

Die beiden Verbesserungen sind, bey dieser Annahme, von entgegengesetzter Beschaffenheit, wenn die Proportionaltheile zunehmen oder abnehmen.

18. Nimmt man zum ersten Theile der Formel den Proportionaltheil $\frac{\beta x}{n}$, so braucht man nur α und β, so wie m und n mit einander zu vertauschen. Es ist

$$y = \frac{\beta x}{n} + \frac{x-n.x-p.}{m-n.m-p.}\left(\frac{\alpha x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right) + \frac{x-n.x-m.}{p-n.p-m.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

oder

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x.p-x.}{n-m.p-m.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{n-x.x-m.}{p-n.p-m.}\left(\frac{\gamma x}{p} - \frac{\beta x}{n}\right).$$

Wollte man $\frac{\gamma x}{p}$ zum ersten Theile der Formel nehmen, so hätte man α und γ, so wie m und p mit einander zu vertauschen.

19. Es sey $p = n + m$, und $\gamma = \beta + \delta$, so ist

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x.p-x.}{n-m.p-m.}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m}\right) - \frac{n-x.x-m.}{n.n+m.}\left(\frac{\delta x}{m} - \frac{\beta x}{n}\right)$$

Diese Formel ist in den Ephemeriden zur Interpolation der Länge und Breite des Mondes sehr brauchbar.

20. Exempel I. Aus dem astronomischen Jahrbuche für 1803 ist, nach bürgerlicher Zeit,

	Länge des Mondes	
26. Febr. Mittern.	47° 31′ 38″	
- - - 1 Uhr	48. 8. 39.	0° 35′ 1″ = α
27 Febr. Mittern.	61. 21. 21.	13. 47. 43 = β
- - - 1 Uhr	61. 55. 21.	14. 21. 43 = γ

Es soll die Länge des Mondes für 12 Uhr Mittags am 26. Febr. gefunden werden. Man nehme bloß die drey ersten Angaben, und gebrauche die dritte Formel in (15.). Es ist

$$\frac{\alpha x}{m} = 7^\circ\, 0'\, 12'' \qquad m = 1$$

$$\frac{\beta x}{n} = 6.\ 53.\ 51 \qquad n = 24$$

$$\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m} = -\ 0.\ 6.\ 21. \qquad x = 12$$

$$\frac{n-x}{n-m} = \frac{12}{23}$$

Bewegung des Mondes in 12 Stunden,

$y = 6^\circ\, 53'\, 51'' + 0^\circ\, 3'\, 19'' = 6^\circ\, 57'\, 10''$

Länge des Mondes zu Mittag 54. 30. 48.

Nimmt man die Länge am 27. Febr. Mitternacht zum Anfangsgliede, so ist

$$\alpha = +\ 0^\circ\, 34'\, 0'' \qquad m = +\ 1$$

$$\beta = -\ 13.\ 47.\ 43. \qquad n = -\ 24$$

$$\frac{\beta x}{n} = -\ 6.\ 53.\ 51. \qquad x = -\ 12.$$

$$\frac{\alpha x}{m} = -\ 6.\ 48.\ 0. \qquad \frac{n-x}{n-m} = +\frac{12}{25}$$

Bewegung des Mondes in 12 St. rückwärts genommen,

$y = -\ 6^\circ\, 53'\, 51'' + 2'\, 48'' = -\ 6^\circ\, 51'\, 3''$

Länge des Mondes am 26 Febr. Mittag, 54 30. 18.

Der Unterschied beider Resultate ist beträchtlich; es ist aber auch die Ungleichheit der Bewegung des Mondes ihrer größten Gränze nahe. Gewöhnlich ist die Zeit, für welche der Ort des Mondes gesucht wird, nicht über acht Stunden von der einen oder der andern Mitternacht entfernt, daher dann die eine oder die andere Rechnung mit mehrerer Richtigkeit gebraucht werden kann. Für den Fall, da man rückwärts rechnet, setze man die Bewegung in der 25sten Stunde $= \delta$, und nehme alle Bezeichnungen absolut, so ist

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x}{n+m}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\delta x}{m}\right),$$

welcher Werth subtractiv ist.

Nach der Formel (19.) wird der Unterschied der mittlern Bewegung von einer Mitternacht zur andern und

ter wirklichen, um jede dieser Zeiten, zugleich in Rechnung gebracht, daher sie ein sehr genaues Resultat giebt. In unserm Beyspiele ist

$$y = 6^\circ 53' 51'' + \frac{12.13}{23.24}(0^\circ 6' 21'') + \frac{12.11}{24.25}(0^\circ 5' 51'')$$
$$= 6^\circ 53' 51'' + 1' 47'' + 1' 17''$$
$$= 6^\circ 56' 55''.$$

Länge des Mondes zu Mittag, $54^\circ 30' 33''$, welche gerade das Mittel zwischen den beiden vorher gefundenen ist.

Die Formel (19.) habe ich in dem astronomischen Jahrbuche für 1788 zur Berechnung des Mondslaufes, in der dazu schicklichen Form, mitgetheilt. Die Vorschrift, welche Lambert in dem Jahrbuche für 1776 S. 42. gegeben hat, entsteht aus der ersten Formel in (15.), wenn daselbst statt des Factors $\frac{x-m}{n-m}$ gesetzt wird $\frac{x}{n}$, und bey rückwärts angestellter Berechnung β, n, x, y negativ genommen werden. Um die Zeit des Mittags herum giebt diese Abkürzung ein genaueres Resultat.

21. Exempel II. Bossut führt in seinem Traité d'Hydrodynamique, T. II. ch. 8 à Paris an. IV. Versuche über die Wassermengen an, die aus einem Behälter durch horizontale Röhren von verschiedener Länge in einer gewissen Zeit ausflossen. Unter diesen sind folgende. Die Höhe des Wassers in dem Behälter über der Axe der Röhre war ein Fuß; der Durchmesser der Röhre 16 Lin. Die ausgeflossene Wassermenge in einer Minute war wie folget:

$$\frac{\alpha x}{m} = 7^\circ 0' 19''$$

$$\frac{\beta x}{n} = 6, 58. 51$$

$$\frac{\beta x}{n} - \frac{\alpha x}{m} = -\,0, 6, 21,$$

$$m = 1$$

$$n = 24$$

$$x = 12$$

$$\frac{n-x}{n-m} = \frac{12}{23}$$

Bewegung des Mondes in 12 Stunden,

$y = 6^\circ 53' 51'' + 0^\circ 3' 19'' = 6^\circ 57' 10''$

Länge des Mondes zu Mittag 54. 30. 48.

Nimmt man die Länge am 27. Febr. Mitternacht zum Anfangsgliede, so ist

$\alpha = +\ 0^\circ 34' 0''$ $\qquad m = +\ 1$

$\beta = -\ 13. 47. 43,$ $\qquad n = -\ 24$

$$\frac{\beta x}{n} = -\ 6, 53. 51,$$ $\qquad x = -\ 12,$

$$\frac{\alpha}{m} = -\ 6. 48. 0,$$ $\qquad \frac{n-x}{n-m} = +\frac{12}{25}$

Bewegung des Mondes in 12 St. rückwärts genommen,

$y = -\ 6^\circ 53' 51'' + 2' 43'' = -\ 6^\circ 51' 3''$

Länge des Mondes am 26 Febr. Mittag, 54 30. 18.

Der Unterschied beider Resultate ist beträchtlich; es ist aber auch die Ungleichheit der Bewegung des Mondes ihrer grösten Gränze nahe. Gewöhnlich ist die Zeit, für welche der Ort des Mondes gesucht wird, nicht über acht Stunden von der einen oder der andern Mitternacht entfernt, daher dann die eine oder die andere Rechnung mit mehrerer Richtigkeit gebraucht werden kann. Für den Fall, da man rückwärts rechnet, setze man die Bewegung in der 25sten Stunde $= \delta$, und nehme alle Bezeichnungen absolut, so ist

$$y = \frac{\beta x}{n} - \frac{n-x}{n+m}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\delta x}{m}\right),$$

welcher Werth subtractiv ist.

Nach der Formel (19.) wird der Unterschied der mittlern Bewegung von einer Mitternacht zur andern und

der wirklichen, um jede dieser Zeiten, zugleich in Rechnung gebracht, daher sie ein sehr genaues Resultat giebt. In unserm Beyspiele ist

$$y = 6^\circ 53' 51'' + \frac{12.13}{23.24}(0^\circ 6' 21'') + \frac{12.11}{24.25}(0^\circ 5' 51'')$$
$$= 6^\circ 53' 51'' + 1' 47'' + 1' 17''$$
$$= 6^\circ 56' 55''.$$

Länge des Mondes zu Mittag, $54^\circ 30' 33''$, welche gerade das Mittel zwischen den beiden vorher gefundenen ist.

Die Formel (19.) habe ich in dem astronomischen Jahrbuche für 1788 zur Berechnung des Mondslaufes, in der dazu schicklichen Form, mitgetheilt. Die Vorschrift, welche Lambert in dem Jahrbuche für 1776 S. 42. gegeben hat, entsteht aus der ersten Formel in (15.), wenn daselbst statt des Factors $\frac{x-m}{n-m}$ gesetzt wird $\frac{x}{n}$, und bey rückwärts angestellter Berechnung β, n, x, y negativ genommen werden. Um die Zeit des Mittags herum giebt diese Abkürzung ein genaueres Resultat.

21. Exempel II. Bossut führt in seinem Traité d'Hydrodynamique, T. II. ch. 8 à Paris an. IV. Versuche über die Wassermengen an, die aus einem Behälter durch horizontale Röhren von verschiedener Länge in einer gewissen Zeit ausflossen. Unter diesen sind folgende. Die Höhe des Wassers in dem Behälter über der Axe der Röhre war ein Fuß; der Durchmesser der Röhre 16 Lin. Die ausgeflossene Wassermenge in einer Minute war wie folget:

genommen werden. Die Formel in (8.) erhält die Gestalt

$$y = \frac{Px}{m} + \frac{Qx(x^2-m^2)}{mn^2} + \frac{Rx(x^2-m^2)(x^2-n^2)}{mn^2p^2} + \frac{Sx(x^2-m^2)(x^2-n^2)(x^2-p^2)}{mn^2p^2q^2} + \text{etc.}$$

Aus der letztern Formel wird auf gleiche Art wie in (15.), bey zwey gegebenen Unterschieden, $\pm\alpha$, $\pm\beta$, erhalten

$$y = \frac{x^2-n^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{\alpha x}{m} + \frac{x^2-m^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{\beta x}{n}.$$

Bey drey gegebenen Unterschieden, $\pm\alpha$; $\pm\beta$; $\pm\gamma$, wie in (16.)

$$y = \frac{x^2-n^2 \cdot x^2-p^2}{m^2-n^2 \cdot m^2-p^2} \cdot \frac{\alpha x}{m} + \frac{x^2-m^2 \cdot x^2-p^2}{n^2-m^2 \cdot n^2-p^2} \cdot \frac{\beta x}{n} + \frac{x^2-m^2 \cdot x^2-n^2}{p^2-m^2 \cdot p^2-n^2} \cdot \frac{\gamma x}{p}.$$

Die Ähnlichkeit dieser Formeln mit denen in (15. 16.) entsteht daher, daß hier doppelt so viele Glieder, ausser dem Anfangsgliede, gegeben sind, als Unterschiede von diesem gegeben werden. Daher kommen ausser den Factoren (oder Distanzunterschieden), $x-m$, $x-n$, $x-p$, etc. auch $x+m$, $x+n$, $x+p$, etc. vor, so auch nebst $m-n$, $m-p$, $n-m$, $n-p$, etc. die Abstände $m+n$, $m+p$, $n+m$, $n+p$, etc.

Es kann auch die Reihe für y aus zwey Reihen, einer mit geraden Potenzen von x, der andern mit ungeraden Potenzen, zusammengesetzt werden müssen. Man sehe Lambert vom Einschalten, in dem dritten Theile der Beyträge zur Mathem. §. 36. ff.

Anwendung der rücklaufenden Reihen zum Einſchalten.

24. Eine rücklaufende Reihe iſt, worin jedes Glied aus einem, zweyen, dreyen, oder mehrern der Ordnung nach vorhergehenden Gliedern, durch die Multiplication eines jeden mit einer unveränderlichen beſondern Größe zuſammengeſetzt wird. Die geometriſche Reihe iſt die einfachſte dieſer Art. Eine rücklaufende Reihe der zweyten Ordnung iſt die Reihe.

A, B, C, D, E, F ... P, Q, R, etc.

wenn, nach dem A, B willkührlich beſtimmt ſind, die folgenden Glieder durch je zwey vorhergehende auf die gedachte Art zuſammengeſetzt werden; nämlich $C = \alpha B - \beta A$; $D = \alpha C - \beta B$; $E = \alpha D - \beta C$; ... $R = \alpha Q - \beta P$, u. ſ. f. Die Multiplicatoren, α, β mögen auch negativ genommen werden. Dieſe mit ihrem Vorzeichen verbunden machen die Scale der Relation aus, nämlich $+\alpha$; $-\beta$.

25. Sind in einer rücklaufenden Reihe der zweyten Ordnung die vier Glieder, A, B, C, D, gegeben, ſo iſt durch dieſe die Scale der Relation beſtimmt. Nämlich aus den Gleichungen, $C = \alpha B - \beta A$, und $D = \alpha C - \beta B$, folgt

$$\alpha = \frac{AD - BC}{AC - BB}; \quad \beta = \frac{BD - CC}{AC - BB}.$$

Nun formire man die quadratiſche Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, und ſuche deren Wurzeln, welche $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ ſeyn. Sind dieſe mögliche Größen, wenn nämlich $\alpha\alpha > 4\beta$ iſt, ſo nehme man $a = \frac{Aq - B}{q - p}$; $b = \frac{B - Ap}{q - p}$, und es iſt das $n$te Glied nach dem Anfangsgliede, $P = ap^n + bq^n$.

26. Hat die Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$ zwey gleiche und gleichnamige Wurzeln, weil $\alpha^2 = 4\beta$ iſt, ſo iſt $P = ((n+1)a + b)\, p^n$, wo $a = \frac{B - Ap}{p}$;

Die Coefficienten α, β, γ werden aus den drey Gleichungen

$$\text{I. } \alpha C - \beta B + \gamma A = D$$
$$\text{II. } \alpha D - \beta C + \gamma B = E$$
$$\text{III. } \alpha E - \beta D + \gamma C = F$$

hergeleitet, wo A, B, C, D, E, F, sechs auf einander folgende gegebene Glieder in den Stellen 0, 1, 2, 3, 4, 5, sind. Sind die drey Wurzeln der Gleichung $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0$ gefunden, so hat man zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c in dem allgemeinen Gliede die Gleichungen,

$$1)\ a + b + c = A$$
$$2)\ ap + bq + cr = B$$
$$3)\ ap^2 + bq^2 + cr^2 = C$$

Die Formen für die andern Fälle werden in dem Artikel, rücklaufende Reihen, entwickelt werden.

32. Prony hat zuerst sich der rücklaufenden Reihen zum Einschalten bedient, um das Gesetz er Expansivkraft der Dämpfe kochenden Wassers oder andrer elastischen Flüssigkeiten dadurch zu bestimmen. In seiner Architecture hydraulique, II. Th. Note zu §. 1371. hat er einen Abriß seiner Interpolations-Methode mitgetheilt, welche ausführlicher in den Mémoires des Savans étrangers enthalten ist. Die Gründe hat er in dem Auszuge nicht angegeben. In demselben Werke, §. 1609-1512. beschäftigt er sich nochmals mit der Interpolirungs-Methode für die Erscheinungen bey elastisch-flüßigen Massen. Sein Vortrag und seine Bezeichnungsart machen Mühe. Zum Beyspiel der Formel in (25.) nehme ich aus der von ihm mitgetheilten Tafel der Ausdehnungskraft kochenden Wassers (§. 1324, 1368, 1522, vier Glieder, oder vier Unterschiede von einem fünften.

33. Nach Betancourts Versuchen ist die Höhe der Queckſilbersäule, welche der Elasticität kochenden Wassers im luftleeren Raume das Gleichgewicht hält, für die hier ausgezeichneten Temperaturen (Reaumursche Scale) folgende in alten Pariser Zollen und Hundertheilen.

Temperatur	Höhe der Queckſilberſäule	Temperatur	Höhe der Queckſilberſäule
0	0,00	60	[illegible]5
10	0,15	70	16,90
20	0,65	80	28,00
30	1,52	90	46,40
40	2,92	100	71,80
50	5,35	110	98,00

34. Man nehme hieraus die vier Höhen,

$$2{,}92 = A \quad ; \quad 28{,}00 = C$$
$$9{,}95 = B \quad ; \quad 71{,}80 = D$$

und bezeichne ihre Stellen durch 0, 1, 2, 3; die Stelle einer andern durch n, die zu derſelben gehörige Temperatur durch x Grade, ſo iſt $x = 40 + 20n$, und $n = \frac{x-40}{20}$.

Nun iſt

$$AD = 209{,}656; \quad BD = 714{,}41$$
$$BC = 278{,}600; \quad CC = 69{,}59$$
$$AC = 81,76; \quad BB = 99{,}0025.$$

Daraus iſt

$$\alpha = \frac{689440}{172425}; \quad \beta = \frac{695900}{172425}.$$

Die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, ſind $\frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}}{2\beta}$. Hier iſt $\alpha\alpha < 4\beta$; inzwiſchen iſt die Form der Glieder in (27.) hier nicht anwendbar, weil die Expanſivkraft eine mit der Temperatur ſtetig zunehmende Größe iſt. Da $\alpha\alpha$ ſehr wenig kleiner als 4β iſt, ſo mag es von einem Fehler in der Beobachtung, oder von zufälligen Unregelmäßigkeiten der Verſuche herrühren, daß die Wurzeln der Gleichung unmöglich werden. Es iſt α nahe $= 4$, und β wenig größer als 4. Setzt man beide $= 4$, ſo ſind die Wurzeln der Gleichung jede $= \frac{1}{2}$, alſo $p = q = 2$, und das allgemeine Glied der rücklaufenden Reihe iſt hier, $P = (n+1)a + b)2^n$. Die Größen,

a, b, mag man aus A und B, oder B und C, oder C und D bestimmen. Nimmt man B und C, so ist

$$(2a + b)2 = 9{,}95,$$
$$(3a + b)4 = 28{,}00,$$

woraus $a = 2{,}025$; $b = 0{,}925$, und das Maaß der Expansivkraft die Höhe, $(2{,}025\,n + 2{,}950)2^n$. Für $n = 3$ giebt die Formel die Höhe 72,2 statt 71,8. Für $n = \frac{7}{3}$ oder $x = 110$ giebt sie die Höhe 113,56 statt 98,00. Es ist zu merken, daß bey der Temperatur 100 bis 110 Gr. die Elasticität sehr wenig zunimmt.

35. Man nehme die Unterschiede der vorher gebrauchten Höhen von der 0,65 Zoll bey 20 Gr. Temperatur. So ist

$$2{,}27 = A \;;\; 27{,}35 = C$$
$$9{,}30 = B \;;\; 71{,}15 = D.$$

Es ist

$$AD = 161{,}5105;\quad BD = 661{,}6950$$
$$BC = 154{,}3550;\quad CC = 748{,}0225$$
$$AC = 68{,}0845;\quad BB = 86{,}4900$$
$$\alpha = \frac{928445}{244055};\quad \beta = \frac{863275}{244055}$$
$$\log\alpha = 0{,}5802684;\quad \log\beta = 0{,}5486614$$

Die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, umgekehrt genommen, sind

$$p = 1{,}6178\tfrac{1}{2};\quad \log p = 0{,}2089219;$$
$$q = 2{,}1865;\quad \log q = 0{,}3397500.$$

Ferner ist

$$a = -7{,}6256;\quad \log a = 0{,}8822762$$
$$b = +9{,}8956;\quad \log b = 0{,}9954400$$

Solchergestalt wird der Werth der Formel der Expansivkraft, $P = ap^n + bq^n$, erhalten. Die Probe der Rechnung ist, daß sie für $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ und $n = 3$ vollkommen oder sehr nahe zutrifft. Für $n = \frac{3}{4}$ oder $x = 70$, giebt sie 16,303. Dazu 0,65 addirt wird die Höhe des Drucks $= 16{,}953$, die nach der Tafel $= 16{,}90$ ist. Aber für $n = \frac{7}{3}$ oder $x = 110°$ ist $P = -41{,}068 + 152{,}955 = 111{,}887$. Wird dazu die Höhe 0,65 ge-

setzt, so ist das Maaß der Expansivkraft = 112,54, da die Erfahrung nur 98,00 giebt. Prony hat in §. 1522 eine dreygliedrige Formel aufgestellt, zu welcher auch die Druckhöhe bey 110° Temperatur angewandt ist. In dem ersten Theile, §. 1325 ist eine viergliedrige Formel gegeben, welche auch in Langsdorfs Lehrbuche der Hydraulik §. 402. nachgesehen werden kann.

Interpolationsformeln mit transscendenten Größen.

96. Charles, ehemals Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, hat in dem mathematischen Theile der Encyclopédie eine Interpolationsformel angegeben, welche insbesondere dazu geeignet seyn wird, unregelmäßige Größenfolgen darzustellen. Die Bezeichnung daselbst ist nicht faßlich; auf gewöhnliche Art ist sie in der Nouvelle Archit. hydraulique par Prony, T. II. Anmerk. zu §. 1373.

Es bezeichnen a, b, c, d, etc. die Werthe einer Function y, welche den Werthen 0, 1, 2, 3, etc. der Wurzel oder Stellenzahl zugehören auch seyn p, q, r, etc. noch andere Größen, die zufolge anderer gegebenen Werthe zu bestimmen sind; π ist die Zahl 3,141.. für den halben Umfang eines Kreises: die Interpolationsformel ist

$$y = p\,\frac{a \sin \pi x}{\sin p\pi x} + q\,\frac{b \sin \pi (x-1)}{\sin q\pi (x-1)} + r\,\frac{c \sin \pi (x-2)}{\sin r\pi (x-2)} + \text{etc.}$$

Wenn $x = 0$ genommen wird, so sind die Zähler alle $= 0$, und in dem ersten Terminus ist auch der Nenner $= 0$. Den Werth von $\frac{\sin \pi x}{\sin p\pi x}$ für $x = 0$ zu finden, verfahre man, wie in dem Artikel, berührende Linie (84.), und Differentialgleichung (5.). Es ist nämlich dieser

Werth $= \frac{\partial \sin \pi x}{\partial \sin p\pi x} = \frac{\pi \partial x . \cos \pi x}{p\pi \partial x . \cos p\pi x}$.

Für $x = o$ werden beide Cosinus $= 1$, und es ist der verlangte Werth $= \frac{1}{p}$, daher für $x = o$ ist $y = a$, wie es seyn soll.

Für $x = 1$ sind die Zähler wiederum alle $= o$, und in den zweyten Terminus ist auch der Nenner $= o$. Ganz auf dieselbe Art, wie bey dem ersten, ist nun der Werth von $y = b$. Eben so geht es bey dem dritten, und jedem folgenden Terminus. Aber die Größen p, q, r. etc. zu bestimmen wird Schwierigkeit machen. Die Bogen zu den Sinus in den Nennern dürfen keine Vielfache von π seyn.

37. Eine andere von Charles angegebene Formel ist folgende:

$$\pi y = p \frac{a \sin \pi x}{h^{px} - 1} + q \frac{b \sin \pi (x-1)}{h^{q(x-1)} - 1}$$
$$+ r \frac{c \sin \pi (x-2)}{h^{r(x-2)} - 1} + \text{etc.}$$

wo h die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so daß $\log h = 1$. Für $x = o$ werden alle Zähler $= o$, und in dem ersten Terminus auch der Nenner. Um den Werth des Bruches $\frac{o}{o}$ zu erhalten, verfährt man, wie vorher geschehen ist. Es ist $\partial (h^{px} - 1) = \partial h^{px} = h^{px} p \partial x$ (Differential-Formeln, 16.). Nun ist $\frac{\partial \sin \pi x}{\partial h^{px} - 1)}$ $= \frac{\pi \partial x . \cos \pi x}{p \partial x . h^{px}}$, welches $\frac{\pi}{p}$ für $x = o$ ist. Dadurch wird der erste Terminus $= \pi a$. Um den Factor π zu heben, ist y mit demselben verbunden worden. Der zweyte Terminus erhält für $x = 1$ den Werth πb, da die andern $= o$ werden, also ist $y = b$. Auf gleiche Art giebt die Formel $y = c$ für $x = 2$, u. s. f.

38. Noch eine Formel von Charles ist folgende:

$$\pi^2 y = \sin \pi x^2 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-2)^2} + \frac{d}{(x-3)^2} + \text{etc.}\right).$$

Für $x = 0$ wird das erste Glied der Reihe, $\frac{\sin \pi x^2}{x^2} a = \frac{0}{0}$ und die andern werden alle Null. Es ist $\frac{\partial \sin \pi x^2}{\partial . x^2} = \frac{2 \sin \pi x . \cos \pi x . \pi \partial x}{2 x \partial x} = \frac{\pi \sin 2 \pi x}{2 x}$, welcher Bruch für $x = 0$ wiederum $\frac{0}{0}$ ist. Man differentiire Zähler und Nenner aufs neue, so ist $\frac{\partial . \pi \sin 2 \pi x}{2 \partial x} = \frac{2 \pi^2 \partial x . \cos 2 \pi x}{2 \partial x} = \pi^2 \cos 2 \pi x$, welches $= \pi^2$ für $x = 0$ ist. Daher ist $y = a$. Eben so ist $y = b$, für $x = 1$; $y = c$, für $x = 2$, u. s. f.

39. Lambert nimmt für den Fall, da die ersten Unterschiede abwechselnd positiv und negativ sind, die Interpolations-Formel

$$y = a + b \sin \frac{m + x}{n} + c \sin \frac{p + x}{q} + \text{etc.}$$

zeigt aber nicht, wie die unveränderlichen Größen bestimmt werden. Über das Einschalten, in den Beyträgen zur Mathematik. Th. III. §. 5.

La Grange giebt dem allgemeinen Gliede einer Reihe die Gestalt

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \text{etc.}$$

und zeigt wie die Coefficienten a, b, c, etc. nebst den Winkeln α, β, γ, etc. und φ, χ, ψ, etc. aus gegebenen Werthen von y in den Werthen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,$

etc. von x gefunden werden können. Astronomisches Jahrbuch für 1783. S. 41.

Interpolation einer Reihe von Producten aus Factoren, in arithmetischer Progression.

40. Eine Reihe bestehe aus Producten, deren Factoren die auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen Reihe sind, nämlich

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1; & a; & a(a+b); & a(a+b)(a+2b); \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & & m & m+1 \\ a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots M; & & M(a+mb); & \text{etc.} \end{matrix}$$

wo die übergeschriebenen Zahlen die Stellen und die Anzahl der Factoren anzeigen. Das Glied in der Stelle 0 ist $=1$, damit für die Stelle 1 das Glied der Reihe $=a$ werde, nach der allgemeinen Form, in welcher für die Stelle 1 der Factor $m=0$ ist.

41. Die Form eines Gliedes in dieser Reihe gehört zu einer besondern Gattung von transscendenten Functionen, welche Euler inexplicabiles nennt. Die Glieder sind keine solche Function ihrer Stelle, die allen gemein wäre. Die Interpolation solcher Reihen lehrt Euler in den Institt Calc. diff. P. II. c. 17. Ich werde hier einen leichtern Weg dazu nehmen.

42. Es sey $m+\omega$ die Stelle des einzuschaltenden Gliedes, m die Stelle des nächst vorhergehenden, also eine ganze Zahl, und ω der Abstand jenes von diesem, ein eigentlicher Bruch. Setzen wir nach jedem Gliede in dem Abstande ω ein Zwischenglied, so müssen diese Zwischenglieder jedes aus dem vorhergehenden auf dieselbe Art gebildet werden, wie die Glieder der ursprünglichen Glieder aus einander entstehen, damit, wenn $\omega=0$ oder $=1$ ist, die Glieder dieser Reihe hervorgehen. Dieses ist der Analogie der Interpolation geometrischer und arithmetischer Reihen gemäß.

43. Es ſey nun die Reihe der eingeſchalteten Glieder:

$$\omega \quad 1+\omega \quad 2+\omega \quad 3+\omega \quad 4+\omega$$
$$u \;;\; \alpha u \;;\; \beta u \;;\; \gamma u \;;\; \delta u \;;\; \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\alpha u = (a+\omega b)u$$
$$\beta u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)u$$
$$\gamma u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)u$$
$$\delta u = (a+\omega b)\ldots(a+3b+\omega b)u$$

und, wenn μu das interpolirte Glied in der Stelle $m+\omega$ iſt,

$$\mu u = (a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)u$$

Dieſes Glied fällt zwiſchen die Glieder,

$a(a+b)\ldots\ldots(a+(m-1)b)$, und
$a(a+b)\ldots(a+mb)$,

alſo fällt u zwiſchen die Brüche,

$$\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots(a+(m-1)b)}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)}$$

und

$$\frac{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+mb)}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)\ldots(a+(m-1)b+\omega b)}$$

welchen Werth auch m haben mag. Daher iſt

$$u = \frac{a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\text{in infin.}}{(a+\omega b)(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)\ldots\text{in infin.}}$$

Denn wenn man hier zu einer Anzahl Factoren im Renner entweder eben ſo viele oder einen mehr im Zähler nimmt, ſo erhält man eben ſolche Partialwerthe wie dort für u. Dieſes Schwanken der unvollſtändigen Werthe von u darf nicht befremden. Es iſt ein ſolcher Fall, wie mit dem Werthe einer Reihe, die, ohne zu convergiren, in ihren Gliedern abwechſelnde Vorzeichen hat. Die Partialwerthe von u gehen rückwärts und vorwärts, über 1 und über a hinaus. Es iſt hier nicht ſowohl von der Annäherung zu einem gewiſſen beſtimmten Werthe, als von der Form dieſes Werthes die Frage. Unten wird ſich

doch ein Mittel zur Annäherung an den wahren Werth von u zeigen.

44. Nun iſt

$$\alpha u = a \cdot \frac{(a+b)(a+2b)\text{. etc.}}{(a+b+\omega b)(a+2b+\omega b)\text{. etc.}}$$

$$\beta u = a(a+b) \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)\text{. etc.}}{(a+2b+\omega b)(a+3b+\omega b)\text{. etc.}}$$

$$\gamma u = a\,a+b)(a+2b) \cdot \frac{(a+3b)\text{. etc.}}{(a+\ b+\omega b\ \text{. etc.}}$$

$$\delta u = a(a+b)(a+2b)(a+3b) \cdot \frac{(a+4b)\text{. etc.}}{(a+4b+\omega b)\text{. etc.}}$$

und das Glied in der Stelle $m+\omega$ iſt

$$a(a+b)\ldots(a+(m-1)b) \cdot \frac{(a+mb)\text{. etc.}}{(a+mb+\omega b)\text{. etc.}}$$

Wenn $\omega = 0$ iſt, ſo verwandelt ſich das eingeſchaltete Glied in das nächſtvorhergehende Glied der urſprünglichen Reihe; wenn $\omega = 1$ iſt, in das nächſtfolgende, wie es ſeyn muß.

Nimmt man in dem Bruchfactor zu dem Gliede der urſprünglichen Reihe im Zähler und Nenner gleich viele Factoren, ſo wird das eingeſchaltete Glied kleiner als das nächſte vorhergehende; nimmt man im Zähler einen Factor mehr als im Nenner, ſo wird das eingeſchaltete Glied größer als das nächſte folgende. In dem erſten Falle nämlich wird das nächſte vorhergehende Glied mit einer Reihe eigentlicher Brüche multiplicirt; in dem zweyten das nächſte folgende mit einer Reihe uneigentlicher Brüche. Der Multiplicator wird dort immer kleiner, hier immer größer, wiewohl die einzelnen Brüche ſich der Einheit immer mehr nähern.

45. Euler giebt a. a. O. §. 401. für ein in der Stelle ω (es ſey ω ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch) eingeſchobenes Glied Σ die Formel,

$$\Sigma = a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}$$
$$\times \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+\omega} \cdot \text{etc.}$$

Man sieht, daß diese Formel für $\omega < 1$ mit der hier für u gefundenen übereinkommt, nur daß in derselben die Factoren des Zählers in zwey Wurzelgrößen zerlegt sind. Aus jener Formel, $\omega < 1$ gesetzt, leitet Euler die hier in (44) gefundenen her. Sofern es hier bloß auf die Form eines eingeschalteten Gliedes ankommt, geben diese Formeln eine sehr faßliche Darstellung.

46. Die gegebene Reihe sey

$$\overset{0}{1};\ \frac{a}{b};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \text{etc.}$$

Das mte Glied (dessen Stelle m ist) sey $= M$, so ist das nächste $= M \cdot \frac{a+mc}{b+mc}$. Darum ist das Glied in der Stelle $0 = 1$.

Um die Reihe zu interpoliren, setze man in dem Abstande ω von 1 vor $\frac{a}{b}$ das Glied u, und lasse auf dieses in den Stellen $1+\omega$; $2+\omega$; $3+\omega$; etc. die Glieder αu, βu, γu, etc. folgen, so ist nach dem Gesetze für die Hauptglieder,

$$\alpha u = \frac{a+\omega c}{b+\omega c} u$$

$$\beta u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)} u$$

$$\gamma u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)(a+2c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)(b+2c+\omega c)} u$$

u. s. w.

Nach derſelben Schlußart wie in (43.) iſt

$$u = \frac{a(a+c)(a+2c)\ldots}{b(b+c)(b+2c)\ldots} \times \frac{(b+\omega c)(b+c+\omega c)\ldots}{(a+\omega c)(a+c+\omega c)\ldots}$$

und das eingeſchaltete Glied in der Stelle $m + \omega$ iſt

$$\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)\ldots \text{in inf.}}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)\ldots \text{in inf.}} \times \frac{(b+mc+\omega c)(b+(m+1)c+\omega c)\ldots \text{in inf.}}{(a+mc+\omega c)(a+(m+1)c+\omega c)\ldots \text{in inf.}}$$

Die Bruchfactoren jedes dieſer beiden Brüche nähern ſich immer mehr der Einheit. Wenn $\omega = 0$ genommen wird, ſo verwandelt ſich das eingeſchaltete Glied in das mte der urſprünglichen Reihe; wenn $\omega = 1$ geſetzt wird, in das $(m+1)$te. Euler hat dieſelbe Formel, a. a. O. §. 400. ohne Zerlegung in Potentialgrößen.

47. Exempel In der Reihe

$$1; \frac{2}{3}; \frac{2.4}{3.5}; \frac{2.4.6}{3.5.7}; \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}; \text{ etc.}$$

zwiſchen je zwey nächſten Gliedern eines einzuſchalten.

Hier iſt $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $\omega = \frac{1}{2}$, alſo

$$u = \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}},$$

als das zwiſchen 1 und $\frac{2}{3}$ eingeſchaltete Glied. Oder

$$u = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$u = 1 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$$

Man ſieht, wie der partielle Werth von u ſich einer gewiſſen Größe nähern könne.

Das zwiſchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{2.4}{3.5}$ eingeſchaltete Glied iſt

$$= \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{6.8.10.12.\text{ etc.}}{5.7.9.11.\text{ etc.}},$$

$$\text{oder} = \frac{2}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{oder} = \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{etc.}$$

48. Die Glieder der hier zum Beyſpiele genommenen Reihe ſind die Flächenräume einer Curve, deren Gleichung iſt $y = (1-z^2)^m$ für die Abſciſſe $z = 1$. Denn das Differential der Fläche iſt $= y\,\partial z = (1-z^2)^m \partial z =$

$$(1 - mz^2 + \frac{m.m-1.}{1.2} z^4 - \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^6 + \text{etc.})\partial z$$

Alſo iſt der Flächenraum $=$

$$z - \tfrac{1}{3} mz^3 + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1.}{1.2} z^5 - \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^7 + \text{etc.}$$

welches Integral mit z anfangen ſoll. Für $z = 1$ iſt es $=$

$$1 - \tfrac{1}{3} m + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} - \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Setzt man m folgweiſe $= 1; 2; 3; 4;$ etc. ſo ſind die Werthe der Flächenräume die Glieder der Reihe in (47.).

49. Für $m = \frac{1}{2}$ iſt die krumme Linie ein Kreis mit dem Halbmeſſer als Einheit, in welchem die Abſciſſe z vom Mittelpuncte aus genommen wird. Wird $z = 1$ geſetzt, ſo iſt die Reihe der vierte Theil der Kreisfläche. Sie iſt auch das in der Reihe der Producte eingeſchaltete Glied in der Stelle $\frac{1}{2}$. Folglich iſt der vierte Theil der

$$\text{Kreisfläche} = \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}}$$

Setzt man den halben Umfang $= \pi$, so ist eben dieser vierte Theil $= \frac{1}{4}\pi$, und

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8 \text{ etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9. \text{etc.}}.$$

Das ist der Werth von $\frac{1}{4}\pi$, der in dem Artikel, Cyklometrie (29.) aus andern Gründen gefunden ist. Es ist derjenige, welchen Wallis auch durch eine ihm eigene, künstliche Einschaltungsart herausgebracht hat. Arithm. Infin. Prop. 191. Man sehe noch den Artikel, Cyklotechnie, Th. I. S. 654.

50. Die vorher (47.) zum Beyspiel gegebene Reihe kann man auch mittelst der Anfangsglieder der Differenzreihen nach der Formel in (7.) interpoliren. Diese Anfangsglieder sind

$$-\frac{1}{3}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}; +\frac{1}{9}, - \text{ etc.}$$

negativ nämlich, wo die folgenden Glieder kleiner sind als die vorhergehenden. Jene Formel giebt den Unterschied des eingeschalteten Gliedes über das in der Stelle o befindliche. Das eingeschaltete sey hier $= q$, so ist

$$q = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}.\frac{x.x-1.}{1.2} - \frac{1}{7}.\frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}$$
$$+ \frac{1}{9}.\frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Also ist das in der Stelle $\frac{1}{2}$ eingeschaltete

$$q = 1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{2} - \frac{1}{5}.\frac{1.1}{2.4} - \frac{1}{7}.\frac{1.1.3}{2.4.6}$$
$$- \frac{1}{9}.\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} - \text{etc.}$$

Diese Reihe ist der vierte Theil der Kreisfläche $= \frac{1}{4}\pi$. Unter den cyklometrischen Reihen wird sie noch nicht vorgekommen seyn. Sie convergirt nur langsam, da der sechste Terminus des subtractiven Theils erst 0,001577 ist. Darauf kommt es inzwischen nicht an, weil man mehr

$$\Sigma = a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}$$
$$\times \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+\omega} \cdot \text{etc.}$$

Man sieht, daß diese Formel für $\omega < 1$ mit der hier für u gefundenen übereinkommt, nur daß in derselben die Factoren des Zählers in zwey Wurzelgrößen zerlegt sind. Aus jener Formel, $\omega < 1$ gesetzt, leitet Euler die hier in (44) gefundenen her. Sofern es hier bloß auf die Form eines eingeschalteten Gliedes ankommt, geben diese Formeln eine sehr faßliche Darstellung.

46. Die gegebene Reihe sey

$$0 \quad 1 \qquad 2 \qquad\qquad 3$$
$$1; \frac{a}{b}; \frac{a(a+b)}{b(b+c)}; \frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}; \text{ etc.}$$

Das mte Glied (dessen Stelle m ist) sey $= M$, so ist das nächste $= M \cdot \frac{a+mc}{b+mc}$. Darum ist das Glied in der Stelle $o = 1$.

Um die Reihe zu interpoliren, setze man in dem Abstande ω von 1 vor $\frac{a}{b}$ das Glied u, und lasse auf dieses in den Stellen $1+\omega$; $2+\omega$; $3+\omega$; etc. die Glieder αu, βu, γu, etc. folgen, so ist nach dem Gesetze für die Hauptglieder,

$$\alpha u = \frac{a+\omega c}{b+\omega c} u$$
$$\beta u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)} u$$
$$\gamma u = \frac{(a+\omega c)(a+c+\omega c)(a+2c+\omega c)}{(b+\omega c)(b+c+\omega c)(b+2c+\omega c)} u$$

u. s. w.

$$u^2 = a \cdot \frac{a}{a+\omega b} \cdot \frac{a+b}{a+\omega b} \cdot \frac{a+b}{a+b+\omega b} \cdot \frac{a+2b}{a+b+\omega b} \times$$
$$\frac{a+2b}{a+2b+\omega b} \cdot \frac{a+3b}{a+2b+\omega b} \cdot \text{etc.}$$

wo die Brüche abwechselnd kleiner und größer als die Einheit sind, und sich ihr allmählig nähern.

53. Da zufolge (44.) das $(m+\omega)$te Glied der Reihe daselbst ist

$$a(a+b)\ldots(a+(m-1)b) \cdot \frac{(a+mb).\ \text{etc.}}{(a+mb+\omega b).\ \text{etc.}},$$

wo der Unterschied der Factoren im Zähler und Nenner des Ergänzungsbruches b ist, wie in der Hauptreihe, so kann man für diesen Bruch auf ähnliche Art einen convergirenden Werth finden. Man hat nur in der Formel für u anstatt a hier $a+mb$ zu setzen Wenn die Differenz b negativ ist, und die Producte wechselnd positiv und negativ werden, so erfordert die Interpolation noch ein besonderes Verfahren, wie bey einer geometrischen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen.

54. Das eingeschaltete Glied in der Reihe (46.) ist convergirend. Man setze nur die Factoren in dem Zähler des zweyten Bruchs wechselsweise zwischen die Factoren in dem Zähler des ersten Bruchs, und verfahre eben so mit den Nennern, so sind die Bruchfactoren abwechselnd kleiner und größer als die Einheit, wie vorher in dem Werthe von u^2. Bey der Berechnung des Werthes von u^2 oder jenes Ergänzungsbruches hat man nur aus dem Zähler oder Nenner des letzten Bruchfactors, bey dem man stehen bleibt, die Quadratwurzel zu ziehen.

Beyspiel einer Interpolation aus der mathematischen Geographie.

55. Bouguer fand (Figure de la terre p. 290.) daß die Überschüsse der in Frankreich und in Lappland

Das zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{2.4}{3.5}$ eingeschaltete Glied ist

$$= \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{6.8.10.12.\text{ etc.}}{5.7.9.11.\text{ etc.}},$$

$$\text{oder} = \frac{2}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{oder} = \frac{2.4}{3\,5} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \text{etc.}$$

48. Die Glieder der hier zum Beyspiele genommenen Reihe sind die Flächenräume einer Curve, deren Gleichung ist $y = (1-z^2)^m$ für die Abscisse $z = 1$. Denn das Differential der Fläche ist $= y\,\partial z = (1-z^2)^m \partial z =$

$$(1 - mz^2 + \frac{m.m-1.}{1.2} z^4 - \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^6 + \text{etc.})\partial z$$

Also ist der Flächenraum $=$

$$z - \tfrac{1}{3} mz^3 + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1.}{1.2} z^5$$

$$- \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} z^7 + \text{etc.}$$

welches Integral mit z anfangen soll. Für $z = 1$ ist es $=$

$$1 - \tfrac{1}{3} m + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} - \tfrac{1}{7} \cdot \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Setzt man m folgweise $= 1; 2; 3; 4;$ etc. so sind die Werthe der Flächenräume die Glieder der Reihe in (47.).

49. Für $m = \frac{1}{2}$ ist die krumme Linie ein Kreis mit dem Halbmesser als Einheit, in welchem die Abscisse z vom Mittelpuncte aus genommen wird. Wird $z = 1$ gesetzt, so ist die Reihe der vierte Theil der Kreisfläche. Sie ist auch das in der Reihe der Producte eingeschaltete Glied in der Stelle $\frac{1}{2}$. Folglich ist der vierte Theil der Kreisfläche $= \frac{2.4.6.8.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}} \times \frac{4.6.8.10.\text{ etc.}}{3.5.7.9.\text{ etc.}}$

Gestalt der Meridiane bequem durch eine ähnliche Formel darstellen, wenn die Coefficienten von einander unabhängig gesetzt, und bloß durch gemessene Grade bestimmt werden. Das ist eine Erweiterung von Bouguers Hypothese, die nur das zweyte Glied der Reihe aufnimmt. Man sehe meine beiden Aufsätze über die Anwendung dieser Formel in dem astronomischen Jahrbuche von Bode für 1787 und 1788. Hier soll dies nur zum Beyspiele dienen, wie man ein einfaches Gesetz den Beobachtungen anpassen möge, wenn diese, der Natur der Erscheinungen gemäß, nur durch Nebenwirkungen davon abweichen.

58. Von der Einschaltung des größten oder kleinsten Werthes einer Function, z. B. bey der größten Declination der Sonne im Sommer oder Winter; bey der Culmination eines Gestirns, s. den Artikel, Größtes und Kleinstes.

Zur Geschichte der Theorie des Einschaltens.

Zur Berechnung der einfachen Proportionaltheile hat schon Ptolemäus in seinen Tafeln der Chorden eines Kreises den zu einer Minute bey jedem halben Grade gehörigen Unterschied der Chorde beygefügt.

Wie Rhäticus sich bey dem Einschalten der Sinus und Cosinus von 10 zu 10 Secunden verhalten hat, ist in dem Artikel, Cyklotechnie, (Th. 1. S. 672.) erzählt.

Briggs gebrauchte zur Berechnung der Logarithmen die Einschaltung vieler Glieder in geometrischer Progression zwischen der Einheit und einer wenig von ihr verschiedenen Zahl. Er verfuhr dabey folgendermaßen.

Es sey $(1+u)-1=A$; $(1+A)^{\frac{1}{2}}-1=A'$; $(1+A)^{\frac{1}{4}}-1=A''$; $(1+A)^{\frac{1}{8}}-1=A'''$, u. s. f.
Ferner sey
$\frac{1}{2}A-A'=B$; $\frac{1}{2}A'-A''=B'$; $\frac{1}{2}A''-A'''=B''$, u. s. f.

$\frac{1}{4}B - B' = C$; $\frac{1}{4}B' - B'' = C'$ u. ſ. f.
$\frac{1}{8}C - C' = D$; $\frac{1}{8}C' - C'' = D'$ u. ſ. f.
$\frac{1}{16}D - D' = E$; $\frac{1}{16}D' - D'' = E'$ u. ſ. f.
$\frac{1}{32}E - E' = F$, u. ſ. f.

Die Größen B, C, D, E, F, etc. werden ſucceſſiv kleiner, und nehmen ſehr ab, wenn A ein kleiner Bruch iſt. Das fand Briggs durch eine individuelle Rechnung, da er den binomiſchen Lehrſatz in ſeiner Allgemeinheit noch nicht kannte. Wird eine der Größen, als F, ſo klein, daß ſie nicht mehr in Betracht kommen kann, ſo iſt $E' = \frac{1}{32}E$ faſt genau. Daraus werden ſucceſſiv D^{II}, C^{III}, B^{IV}, A^{V} gefunden, wenn die Werthe A bis zu dem A^{xv} nebſt den zugehörigen Differenzen gefunden ſind, ſo daß nun die geometriſche Reihe fortgeſetzt werden kann. Das Verfahren iſt aber beſchwerlich, nur ein Behelf in Ermangelung des binomiſchen Lehrſatzes für gebrochne Exponenten.

Briggs giebt noch eine Methode, die Differenzen zu finden, die Hutton in ſeiner Abhandlung von der Conſtruction der Logarithmen, in der Einleitung zu ſeinen mathematiſchen Tafeln, ingenious, but not obvious nennt. Sie beruht auf denſelben Gründen als die erſtere.

Es ſey nämlich $(1+u) - 1 = A$;
$(1+u)^2 - 1 = A'$; $(1+u)^4 - 1 = A''$;
$(1+u)^8 - 1 = A'''$; $(1+u)^{16} - 1 = A^{IV}$, u. ſ. f.

Ferner ſey
$\frac{1}{2}A' - A = B$; $\frac{1}{2}A'' - A' = B'$; $\frac{1}{2}A''' - A'' = B''$; u. ſ. f.
$\frac{1}{4}B' - B = C$; $\frac{1}{4}B'' - B' = C'$, u. ſ. f.
$\frac{1}{8}C' - C = D$; $\frac{1}{8}C'' - C' = D'$, u. ſ. f.
$\frac{1}{16}D' - D = E$, u. ſ. f.

Hieraus iſt $B = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}A^2$;
$C = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{8}u^4$;
$D = \frac{7}{8}u^4 + \frac{7}{8}u^5 + \frac{7}{16}u^6 + \frac{1}{8}u^7 + \frac{1}{64}u^8$. u. ſ. f.

Dadurch findet man die Grösen A′, A″, A‴, etc. nach der Reihe, auch in dem Falle, wenn A + 1 eine Wurzelgröße ist, deren Grad eine Potenz der Zwey ist, als $(1+u)^{\frac{1}{2}}$, $(1+u)^{\frac{3}{4}}$ u. d. gl.

Beide Methoden mit Beyspielen erläutert giebt Briggs in der Einleitung zu seiner Arithmetica logarithmica, 1624, woraus die ersten eilf Capitel in der Arithmetica logarithmica von Vlacq eingerückt sind. In den folgenden beiden Capiteln, die Vlacq nicht hätte weglassen sollen, zeigt Briggs, wie mittelst der Differenzen die Logarithmen durch Einschaltung gefunden werden. Er betrachtet zweyerley Fälle, erstlich, wenn die zweyten Differenzen ganz oder nahe gleich groß sind, zweytens, wenn die Differenzreihen bis zu irgend einer Ordnung fortgehen. Seine Regel für den ersten Fall stimmt mit der Formel $y = ax + \frac{bx(x-1)}{1.2}$ überein, die aus der in (6.) entsteht, wenn die Glieder der dritten Differenzreihe und der folgenden alle Null sind. Für den zweyten schwerern Fall stimmen seine Vorschriften ganz mit denen überein, die Cotes in seiner Canonotechnia gegeben hat, da die Differenzen, welche Briggs mittlere und verbesserte nennt, von Cotes runde und viereckte genannt werden, weil er sie durch Zahlen bezeichnet, die in einen kleinen Kreis und in ein Quadrat eingeschlossen sind. (Hutton in der vorgedachten Abhandlung). In der Trigonometria Britannica, L. 1. cap. 12. giebt Briggs einen Abriß seiner Methode des Einschaltens, und zeigt ihre Anwendung bey der Einschaltung in einer berechneten Folge von Sinus, deren Winkel eine arithmetische Reihe ausmachen. Briggs ist also der Erfinder der Methode durch Differenzen einzuschalten. Er nimmt in dem gedachten zweyten Falle andere Glieder der Differenzreihen, als bey der Formel in (6.) angewandt sind

Wallis fand auf eine sehr sinnreiche Art die Interpolation solcher Brüche, deren Zähler und Nenner

successive Producte aus den Gliedern arithmetischer Progressionen sind, die in (47.) auf eine andere Art bewerkstelligt ist. Er scheint den Ausdruck, Interpolation, zuerst gebraucht zu haben. Die Arithmetica infinitorum, worin er jene Erfindung vorträgt, erschien im J. 1655. In diesem Werke zeigt er auch, wie die figurirten Zahlen zu interpoliren sind, aus der allgemeinen Form derselben.

Mouton, ein Geistlicher, der zu Lyon lebte (gest. 1694.), gebrauchte zu astronomischen Rechnungen eine Interpolations-Methode, die er einem Lyoner Mathematiker, Namens Regnault, verdankt. Er zeigte, wie man dadurch sowohl zwischen den Angaben berechneter Tafeln mittlere Größen finden, als in einer Reihe von Beobachtungen die fehlenden einschieben könne, und zwar genauer als durch einfache Proportionaltheile. Vermittelst dieser Methode berechnete er Tafeln der Declination der Sonne, und der scheinbaren Größen ihres Durchmessers bis zu Secunden und Tertien, in einer Schrift: Observ. diametr. Solis et Lunae apparentium. Lugduni 1670. 4. (Montucla hist. des Mathem. T. II. p. 610 III. p. 301.)

Leibnitz fand auch, wie die Glieder einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen zusammengesetzt werden. S. Th. I. S. 839.

Allgemeine, zur Anwendung geeignete Vorschriften gab Newton in den Principiis Philos. natur. L. III. Lemm. 5. für beide Fälle, da die Abstände der gegebenen Größen von einander gleich groß oder ungleich sind. Das Lemma hat die Überschrift: Invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transit. Die gegebenen und die einzuschaltenden Größen werden, nach der damahls gewöhnlichen Methode, alle Relationen geometrisch darzustellen, als Ordinaten einer parabolischen Curve betrachtet, deren Gleichung ist $y = A + ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$ In einem kleinen Aufsatze: Methodus differentialis, der 1711. gedruckt ist, zeigt Newton, wie für irgend eine Anzahl gegebener Größen, die als Ordinaten einer parabolischen Curve angesehen wer-

den, die Gleichung für die Curve bestimmt wird. Die Rechnung ist fast dieselbe wie die oben in (10. 11) geführte. Er leitet daraus noch einige Formeln zur Berechnung der eingeschalteten Größe her, welche man in jener Schrift selbst nachzusehen hat.

Ehe die Newtonische Schrift über den Gebrauch der Differenzen zum Einschalten bekannt gemacht war, suchte Cotes, veranlaßt durch das Lemma in den Principien, eine Auflösung der Aufgabe, und trug sie nebst den dazu gehörigen Sätzen, seinen Zuhörern in Cambridge vor. Der Aufsatz ist der Ausgabe seiner Harmonia mensurarum durch Rob. Smith, Cantabr. 1722. beygefügt.

Eben dieser Schrift ist angehängt: Canonotechnia, sive constructio tabularum per differentias, worin Cotes Formeln zum Einschalten angiebt. Die Rechnung nach denselben aber ist sehr zusammengesetzt, ob gleich das Verfahren sehr sinnreich ist. Die gegebenen Größen setzt er in gleichen Abständen von einander, und nimmt das Anfangsglied in der Mitte derselben, so auch die Anfangsglieder der Differenzreihen. Aus den Differenzen aller vorhandenen Ordnungen sucht er die Anfangsglieder der Differenzreihen für die erweiterte Reihe. Diese Anfangsglieder nehmen ebenfalls die mittelste Stelle in ihren Reihen ein. An der Erfindung der Beweise zu jenen Formeln mag man seinen Scharfsinn üben. Beide Abhandlungen sind nebst noch zwey kleinen dem Hauptwerke beygefügten Schriften desselben Verfassers, von Matsko, Prof. in Rinteln, zu Lemgo 1768 besonders herausgegeben unter dem allgemeinen Titel: Opera miscellanea Rogeri Cotes.

In Jakob Stirlings Methodus differentialis, Lond. 1730. handelt der zweyte Theil von der Interpolation der Reihen. Es wird darin nicht allein gezeigt, wie zwischen Größen von der Form der Ordinaten parabolischer Linien die Einschaltung geschieht, sondern auch wie es bey continuirlichen Producten ausgeführt wird, bey den leztern nicht so kurz als es in diesem Artikel gewiesen ist.

$\frac{1}{2}B - B' = C$; $\frac{1}{4}B' - B'' = C'$ u. s. f.
$\frac{1}{3}C - C' = D$; $\frac{1}{8}C' - C'' = D'$ u. s. f.
$\frac{1}{10}D - D' = E$; $\frac{1}{10}D' - D'' = E'$ u. s. f.
$\frac{1}{2}E - E' = F$, u. s. f.

Die Größen B, C, D, E, F, etc. werden successiv kleiner, und nehmen sehr ab, wenn A ein kleiner Bruch ist. Sie sind Briggs durch eine individuelle Rechnung, da er den binomischen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit noch nicht kannte. Wird eine der Größen, als F, so klein, daß sie nicht mehr in Betracht kommen kann, so ist $E' = \frac{1}{32}E$ sehr genau. Daraus werden successiv D^{II}, C^{III}, B^{IV}, A^{V} gefunden, wenn die Werthe A bis zu dem A^{IV} nebst den zugehörigen Differenzen gefunden sind, so daß nun die geometrische Reihe fortgesetzt werden kann. Das Verfahren ist aber beschwerlich, nur ein Behelf in Ermangelung des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten.

Briggs giebt noch eine Methode, die Differenzen zu finden, die Hutton in seiner Abhandlung von der Construction der Logarithmen, in der Einleitung zu seinen mathematischen Tafeln, ingenious, but not obvious nennt. Sie beruht auf denselben Gründen als die erstere.

Es sey nämlich $(1+u) - 1 = A$;
$(1+u)^2 - 1 = A'$; $(1+u)^4 - 1 = A''$;
$(1+u)^8 - 1 = A'''$; $(1+u)^{16} - 1 = A^{IV}$, u. s. f.

Ferner sey
$\frac{1}{2}A' - A = B$; $\frac{1}{2}A'' - A' = B'$; $\frac{1}{2}A''' - A'' = B''$; u. s. f.
$\frac{1}{4}B' - B = C$; $\frac{1}{4}B'' - B' = C'$, u. s. f.
$\frac{1}{8}C' - C = D$; $\frac{1}{8}C'' - C' = D'$, u. s. f.
$\frac{1}{10}D' - D = E$, u. s. f.

Hieraus ist $B = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}A^2$;
$C = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{8}u^4$;
$D = \frac{7}{8}u^4 + \frac{7}{8}u^5 + \frac{7}{16}u^6 + \frac{1}{8}u^7 + \frac{1}{64}u^8$. u. s. f.

bald zunehmen, bald abnehmen. Nachher hat ihn die Betrachtung des von Newton in der Schrift über die Differenzen-Methode, in dem dritten Satze gebrauchten Verfahrens zu einer Bemerkung veranlaßt, wodurch er ſeine in jener Abhandlung gebrauchte Methode noch ſehr abgekürzt hat. Er theilt ſein neues Verfahren in dem aſtronomiſchen Jahrbuche für das J. 1783. mit. Hier entwickelt er ein allgemeines Glied von der Form

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \text{etc.}$$

und zeigt ſehr ſcharfſinnig, wie die unveränderlichen Coefficienten ſowohl als die Winkel α, β, γ, etc. φ, χ, ψ, etc. beſtimmt werden können. Man kommt dabey auf Glieder ſucceſſiver Differenzenreihen, die rücklaufende Reihen ausmachen. Noch eine Abhandlung über das Einſchalten von dieſem großen Analyſten iſt in den Memoiren der Berliner Akademie für die Jahre 1792 und 1793 enthalten.

La Place hat ſich auch mit der Theorie des Einſchaltens beſchäftigt, in einer Abhandlung über die Reihen, in den Pariſer Memoiren für das J. 1779.

Was Prony und Charles in dieſem Fache geleiſtet haben, iſt oben ſchon angeführt worden.

* * *

Nach der Interpolations-Methode von Briggs, Newton Meth. diff. Prop. III. IV.), Cotes, Stirling (Prop. XX.), La Grange (Aſtron. Jahrb. 1783.) werden nicht die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenzreihen, wie in der hier (6.) zum Grunde gelegten Formel, ſondern Glieder aus der Mitte dieſer Reihen genommen, um daraus und aus der Stellenzahl eines Gliedes die Formel für daſſelbe zuſammen zu ſetzen. Man ſchreibe die Hauptreihe und die Differenzreihen folgendergeſtalt unter einander:

[illegible] Producte aus den Gliedern arithmetischer Pro[illegible] sind, die in (47.) auf eine andere Art bewerk[illegible]. Er scheint den Ausdruck, Interpolation, zuerst [illegible] zu haben. Die Arithmetica infinitorum, [illegible] eine Erfindung vorträgt, erschien im J. 1655. [illegible] Werke zeigt er auch, wie die figurirten Zahlen [illegible]poliren sind, aus der allgemeinen Form derselben.

[illegible] Mouton, ein Geistlicher, der zu Lyon lebte (gest. [illegible]4.), gebrauchte zu astronomischen Rechnungen eine [illegible]polations-Methode, die er einem Lyoner Mathema[illegible], Namens Regnault, verdankt. Er zeigte, wie man [illegible] sowohl zwischen den Angaben berechneter Tafeln [illegible] Größen finden, als in einer Reihe von Beobachtun[illegible] die fehlenden einschieben könne, und zwar genauer als [illegible] einfache Proportionaltheile. Vermittelst dieser Me[illegible] berechnete er Tafeln der Declination der Sonne, und [illegible] scheinbaren Größen ihres Durchmessers bis zu Secun[illegible] und Tertien, in einer Schrift: Observ. diametr. [illegible] et Lunae apparentium. Lugduni 1670. 4. [illegible]ontucla hist. des Mathem. T. II. p. 6[illegible]0 III. p. 301.)

Leibnitz fand auch, wie die Glieder einer Reihe [illegible] den Anfangsgliedern der Differenzreihen zusammenge[illegible] werden. S. Th. I. S. 839.

[illegible] Allgemeine, zur Anwendung geeignete Vorschriften [illegible] Newton in den Principiis Philos. natur. L. III. [illegible]. 5. für beide Fälle, da die Abstände der gegebenen [illegible] von einander gleich groß oder ungleich sind. Das [illegible] hat die Überschrift: Invenire lineam curvam [illegible] parabolici, quae per data quotcunque [illegible] transit. Die gegebenen und die einzuschaltenden [illegible] werden, nach der damahls gewöhnlichen Methode, [illegible] Relationen geometrisch darzustellen, als Ordinaten einer [illegible]bolischen Curve betrachtet, deren Gleichung ist $y = A + ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$ In einem kleinen Aufsatze: [illegible]thodus differentialis, der 1711. gedruckt ist, zeigt [illegible]ton, wie für irgend eine Anzahl gegebener Größen, [illegible] als Ordinaten einer parabolischen Curve angesehen wer-

Auf eine ähnliche Art hätte man zu verfahren, wenn zu der Hauptreihe eine gerade Anzahl Glieder genommen wäre. Man hätte aber das arithmetische Mittel von den beiden mittlern Gliedern in den Differenzreihen von einer geraden Ordnungszahl zu nehmen.

In unsern allgemeinen Formeln (8. 10. u. f. f.) mögen von den Abständen m, n, p, q, r, etc. der gegebenen Glieder von dem Anfangsgliede, welche man will, negativ genommen werden, daher man zu dem Anfangsgliede, welches man will, nehmen kann. Die Formel in (7.) enthält nur einen besondern Fall, der gebraucht ist, um die allgemeine Form eines einzuschaltenden Gliedes zu erhalten. Man hat nicht nöthig, in dem Falle, da das Anfangsglied in der Mitte zwischen den gegebenen Gliedern liegen soll, eine besondere Formel zu suchen.

Einschreibung der Figuren (Inscriptio) ist bey einer geradlinichten, wenn diese innerhalb einer gegebenen Figur, geradlinichten oder krummlinichten, so gezeichnet wird, daß sie mit jeder ihrer Ecken oder Winkelpuncte den Umfang dieser trifft; bey einer krummlinichten in einer geradlinichten, wenn sie alle Seiten dieser berührt. Die andere Figur ist um die eingeschriebene beschrieben (circumscripta).

Eine eingeschriebene Hyperbel ist diejenige, die ganz in dem Winkel ihrer Asymptoten enthalten ist, wie die gewöhnliche. Eine umschriebene Hyperbel ist ein Theil einer Linie der dritten Ordnung, welche ihre Asymptoten schneidet, und dieselben von dem Durchschnittspuncten an unendlich weit hinaus zwischen ihren Schenkeln begreift. Eine zwitterartige (ambigena) ist, welche mit einem Schenkel innerhalb, mit dem andern ausserhalb des Asymptoten-Winkels liegt.

Der Fall, der am meisten vorkommt, ist die Einschreibung und Umschreibung des Kreises und eines ordentlichen Vielecks in und um einander, s. Kreis und Vieleck.

Eintheilung, s. Theilung.

für die Interpolation der erstern Art giebt der Verfasser eigenthümliche Formeln.

F. C. Maier, in Petersburg, zeigte in den Commentarüs Acad. Petrop. T. II. a. a. 1727, wie der Zeitpunct des Sonnenstillstandes durch Hülfe einer Interpolations-Formel gefunden wird. Er giebt daselbst auch die Formeln für Größen von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. mit dem Gesetz ihrer Fortschreitung. Ihre Glieder sind anders geordnet, als die von den Formeln (15, 16.).

Die Abhandlung, De la méthode des différences et de la Sommation des Series par Walmesley, in den Mem. de l'Acad. de Berlin, T. XIV. a. 758, wird kaum etwas neues enthalten, es möchte denn in der Entwickelung der Formeln seyn. Die Formeln, Probl. II. III. stehen in Stirlings Abhandlung, propos. XX.

In Lamberts Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, 3ten Th. Berlin 1772. sind Anmerkungen über das Einschalten befindlich, die insbesondere auf die schickliche Wahl der Formel zum Einschalten aufmerksam machen. Mit diesem Aufsatze verbinde man den über das Einschalten beym Gebrauche der Ephemeriden, im astron. Jahrbuche für 1776. In den Zusätzen zu den logar. und trigonom. Tabellen, Tab. 38. hat Lambert die obigen Formeln (8. 22. 23.) und noch eine dieser Gattung entwickelt.

Problems concerning Interpolations by E. Waring. Philos. Transact. vol. LXIX. (1779), nr. VII. Die allgemeine Formel kommt mit der in (10.) der Gestalt nach überein. Waring giebt auch eine Methode an, eine angenommene Function für eine Folge von Größen so zu verändern, daß sie nicht allein die gegebenen Glieder, sondern auch die nach derselben berechneten richtig darstelle.

La Grange hat in den Memoiren der Pariser Academie für 1771. eine Abhandlung über das Einschalten der Reihen geliefert, deren Unterschiede sehr ungleich sind,

bald zunehmen, bald abnehmen. Nachher hat ihn Betrachtung des von Newton in der Schrift über die D ferenzen-Methode, in dem dritten Satze gebrauchten V fahrens zu einer Bemerkung veranlaßt, wodurch er se in jener Abhandlung gebrauchte Methode noch sehr ab kürzt hat. Er theilt sein neues Verfahren in dem astr nomischen Jahrbuche für das J. 1783. mit. Hier e wickelt er ein allgemeines Glied von der Form

$$y = a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x + \text{etc.}$$

und zeigt sehr scharfsinnig, wie die unveränderlichen Coef cienten sowohl als die Winkel α, β, γ, etc. φ, χ, ψ, et bestimmt werden können. Man kommt dabey auf Gl der successiver Differenzenreihen, die rücklaufende Reih ausmachen. Noch eine Abhandlung über das Einschalt von diesem großen Analysten ist in den Memoiren der Be liner Akademie für die Jahre 1792 und 1793 enthalten

La Place hat sich auch mit der Theorie des Ein schaltens beschäftigt, in einer Abhandlung über die Reihe in den Pariser Memoiren für das J. 1779.

Was Prony und Charles in diesem Fache geleist haben, ist oben schon angeführt worden.

* * *

Nach der Interpolations-Methode von Briggs, Newton Meth. diff. Prop. III. IV.), Cotes, Stirling (Prop. XX.), La Grange (Astron. Jahrb. 1783.) werden nicht die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenz reihen, wie in der hier (6.) zum Grunde gelegten Formel, sondern Glieder aus der Mitte dieser Reihen genommen, um daraus und aus der Stellenzahl eines Gliedes die For mel für dasselbe zusammen zu setzen. Man schreibe die Hauptreihe und die Differenzreihen folgendergestalt unter einander:

$$
\begin{array}{ccccccc}
{}^{IV}A & {}^{III}A & {}^{II}A & {}^{I}A & A & A' & A'' & A''' \\
{}^{III}B & {}^{II}B & {}^{I}B & B & B' & B'' & B''' \\
{}^{II}C & {}^{I}C & C & C' & C'' \\
{}^{I}D & D & D' & D'' \\
{}^{I}E & E & E' \\
{}^{I}F & F' \\
G
\end{array}
$$

die Differenzen unterhalb zwiſchen denjenigen Gliedern ſtehen, von welchen ſie die Differenzen ſind. Das Anfangsglied der Hauptreihe iſt A, die Glieder, A', A'', A''', gehören zu den Stellen +1, +2, + ; die linker Hand zu den Stellen −1, −2, −3; ſo daß A die Stelle 0 hat. Da aus der Hauptreihe hier eine ungerade Anzahl Glieder genommen iſt, ſo enthalten die Differenzreihen mit einer ungeraden Ordnungszahl eine gerade Anzahl Glieder, und die mit einer geraden Ordnungszahl eine ungerade Anzahl Glieder. Man ſetze deshalb in jenen erſtern $\frac{1}{2}({}^{I}B+B')=B$; $\frac{1}{2}({}^{I}D+D')=D$; $\frac{1}{2}({}^{I}F+F')=F$, u. ſ. f. wenn aus der Hauptreihe noch mehr Glieder in ungerader Anzahl genommen wären. Nun werden in den Formeln der angeführten Verfaſſer die Interpolationsformeln aus den Gliedern B, C, D, E, F, G, und aus der Stellenzahl des einzuſchaltenden Gliedes zuſammengeſetzt. Nach der Formel (6) werden dazu die Differenzglieder B', C', D'', E'', F''', G''', etc. genommen. Nun muß man dieſe Differenzglieder, B', C', D', etc. in jene B, C, D, etc. verwandeln, welches leicht iſt, und in der Formel (6.) ihre Werthe durch dieſe ausgedruckt, ſo erhält man die Formel

$$y=A+xB+\frac{x^2}{1.2}C+\frac{x(x^2-1)}{1.2.3}D+\frac{x^2(x^2-1)}{1.2.3.4}E$$
$$+\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{1.2.3.4.5}F+\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)}{1.2.3.4.5.6}G+\text{etc.}$$

Das iſt die Formel in Newtons Meth. diff. Prop. III. cal. 1.

Auf eine ähnliche Art hätte man zu verfahren, wenn zu der Hauptreihe eine gerade Anzahl Glieder genommen wäre. Man hätte aber das arithmetische Mittel von beiden mittlern Gliedern in den Differenzreihen von geraden Ordnungszahl zu nehmen.

In unsern allgemeinen Formeln (8. 10. u. f. mögen von den Abständen m, n, p, q, r, etc. der denen Glieder von dem Anfangsgliede, welche man negativ genommen werden, daher man zu dem Anfa gliede, welches man will, nehmen kann. Die Form (7.) enthält nur einen besondern Fall, der gebraucht um die allgemeine Form eines einzuschaltenden Gliede erhalten. Man hat nicht nöthig, in dem Falle, da Anfangsglied in der Mitte zwischen den gegebenen Glie liegen soll, eine besondere Formel zu suchen.

Einschreibung der Figuren (Inscriptio) ist einer geradlinichten, wenn diese innerhalb einer gegebe Figur, geradlinichten oder krummlinichten, so gezeich wird, daß sie mit jeder ihrer Ecken oder Winkelpuncte Umfang dieser trifft; bey einer krummlinichten in d geradlinichten, wenn sie alle Seiten dieser berührt. S andere Figur ist um die eingeschriebene beschrieben (c cumscripta).

Eine eingeschriebene Hyperbel ist diejen die ganz in dem Winkel ihrer Asymptoten enthalten ist, die gewöhnliche. Eine umschriebene Hyperbel ein Theil einer Linie der dritten Ordnung, welche i Asymptoten schneidet, und dieselben von dem Durchschni puncten an unendlich weit hinaus zwischen ihren Schenk begreift. Eine zwitterartige (ambigena) ist, wel mit einem Schenkel innerhalb, mit dem andern ausserh des Asymptoten-Winkels liegt.

Der Fall, der am meisten vorkommt, ist die E schreibung und Umschreibung des Kreises und eines orde lichen Vielecks in und um einander, s. Kreis und Viel

Eintheilung, s. Theilung.

Elcataym, die Benennung einer Rechnungsregel bey Luca de Burgo, nämlich der Regel von zwey unrichtigen Annahmen. Das Wort verräth einen arabischen Ursprung. Käſtners Geſch. der Mathem. I. S. 69.

Electio, ſ. Complexion.

Elemente, in der höhern Geometrie, ſind die mit jeder, auch noch ſo kleinen, endlichen Größe unvergleichbaren Theile einer Linie, Fläche oder Körpers, was man allgemein bey jeder Art veränderlicher Größen Differentiale nennt. Auf dieſe bloß relativ denkbaren Theile kommt man nothwendig, wenn man eine Größe ſich ſtetiger Weiſe verändern läßt. Die Unterſchiede der veränderlichen Größen ſind Theile des endlichen Ganzen, aber wegen der Bedingung der Stetigkeit in der Zunahme oder Abnahme können ſie keine meßbare Größe haben. S. Differentiale, S. 815.

Der Ausdruck iſt aus der Naturlehre entlehnt. Elemente der Körper heißen die uranfänglichen Beſtandtheile derſelben, es ſey nun, daß man ſie ſinnlich darſtellen zu können glaube, wie die ältern Philoſophen, oder daß man ihnen eine für uns unſinnliche Beſchaffenheit beylege. Freylich kann man nicht ſagen, Gold beſtehe aus goldnen Theilchen.

Elemente einer mathematiſchen Wiſſenſchaft ſind die Hauptſätze, aus welchen alle beſondern Sätze hergeleitet werden, ſie mögen von der leichtern oder ſchwerern Gattung ſeyn. Die Hauptſätze unterſcheiden ſich von den Folgeſätzen durch die Verbindung mit einem Begriffe, der in den vorhergehenden Lehrſätzen noch nicht angewandt war. So lange in der Verkettung der Sätze bloß dieſelbe Anzahl der Begriffen gebraucht wird, ſind die Sätze Folgerungen aus den vorhergehenden, Umwandlungen gewiſſer Formen. So wie aber ein neuer Begriff eingeführt wird, ſo entſteht eine Abtheilung der Kette, oder ein neuer Zweig, und der Satz, oder die Sätze, die dieſen Zweig anfangen, gehören zu den Elementen. z. B. in der Geometrie ſey man mit den Lehrſätzen über Gleichheit der Dreyecke, Linien und

Winkel fertig, und führe nun die Parallelen ein, so hat man in den Sätzen, worin dieses geschieht, ein Element der Wissenschaft. Ein anderes Element giebt darauf die Betrachtung der Ähnlichkeit durch die Verbindung mit dem Begriffe der Proportionalität; dann die Verbindung eben dieses Begriffs mit den Parallelogrammen von einerley Höhe. In der höhern Geometrie sind die Differentialformeln von dem Flächenraume einer Figur, der Länge des Bogens, dem körperlichen Raum, der durch die Umdrehung um eine Axe erzeugt wird, Elemente dieses Theils der Wissenschaft. So auch die Verbindung eines Kreisbogens mit dem Bogen einer Curve zur Messung der Krümmung; die Verbindung einer geraden Linie mit demselben zur Bestimmung der Richtung, einer solchen oder eines hyperbolischen Zweiges zur Bestimmung der Lage oder Gestalt des unendlich entfernten Theils der Curve, wo dieses Statt hat.

Elemente in dem Lehrvortrage sind eine Sammlung der Grundlehren, mit den wichtigsten Folgesätzen, innerhalb eines gewissen vorgezeichneten Umfanges, mit mehrerer oder geringerer Ausführlichkeit, nach dem Bedürfniß der Leser, für welche der Verfasser seine Schrift bestimmt. Bey den Alten waren die Elemente der Geometrie und Arithmetik von Euklides ein allgemeines classisches Lehrbuch, die auch in der Urschrift den Titel, στοιχεια (Elemente) haben. Er selbst ward manchmal ὁ στοιχειωτης, elementarius, genannt. Was in seinem Werke bewiesen war, ward von andern Geometern als bekannt vorausgesetzt; was sich nicht darin fand, aber doch zur Ausführung einer Untersuchung nöthig war ohne dazu unmittelbar zu gehören, ward unter der Rubrik, Lemma, eingeschaltet.

Wir können schwerlich ein solches allgemein angenommenes Lehrbuch der Mathematik erhalten. Die Wolfischen Anfangsgründe waren es in Deutschland beynahe eine gute Zeit hindurch. Allein die schnelle Zunahme der Wissenschaft und Verbesserung der Methoden verdrängen bald ein gutes Lehrbuch. Ein bleibendes wäre auch nur in der rei-

nen Mathematik zu hoffen. Es ist nicht so leicht zu verfassen, als es unsere rüstigen Schriftsteller glauben. Die Elemente muß man nicht bloß erlernt, sondern durch häufige eigene Anwendungen sich eigenthümlich gemacht haben. Wir werden mit einer Menge Lehrbücher überhäuft, ohne daß das Studium der Mathematik dadurch befördert würde. Man schreibt die Vorgänger nur ab, verändert die Anordnung, läßt hier etwas weg, setzt da hinzu, verbessert hier eine Kleinigkeit, verschlimmert da vielleicht mehr; man hält seine unausgebildeten, verwornen Vorstellungen für helle Begriffe; man schmeichelt sich, daß man der Wissenschaft Dienste leisten möge, und es ist nur die Begierde als Schriftsteller sich zu zeigen, oder sich dadurch als Lehrer zu empfehlen. Aber auch geübten Gelehrten mag die Ausarbeitung eines Lehrbuches mißrathen. Sie können leicht versucht werden, hier ihre Gelehrsamkeit zu zeigen, oder etwas eigenthümliches anzubringen. Allein in einem Lehrbuche muß nichts als das schon bekannte vorgetragen werden, nur auf die möglich gründlichste, kürzeste und lichtvollste Art. Die Form macht das ganze Verdienst des Werks aus. Alles dieses mag auch auf die Lehrbücher in andern Wissenschaften angewandt werden.

Elimination (Eliminatio, exterminatio) in der Analysis ist das Verfahren, da eine Größe, welche in zwey oder mehrern, wesentlich verschiedenen und unabhängigen Gleichungen vorkommt, herausgeschafft wird, so daß dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den übrigen, frey von der weggeschafften Größe, erhalten werden.

1. Man habe zwey Gleichungen und in beiden dieselbe Größe z. Zu dieser haben die übrigen Größen eine bestimmte Relation; sie haben daher auch unter sich eine bestimmte Relation. Diese ist aber nur mittelbar gegeben, wegen der Einmischung der Größe z. Die neue Gleichung, welche durch die Wegschaffung derselben erhalten wird, stellt die Relation der übrigen unabhängig von z, und unmittelbar dar. Jede derselben wird nun durch die damit verbun-

denen bestimmt, und zwar so, daß ihre Relation gegen z den beiden zuerst gegebenen Gleichungen gemäß ist.

2. Überhaupt, wenn n Gleichungen gegeben werden, in deren jeder von den $n-1$ Größen, z, y, x, etc. wenigstens eine vorkommt, so wird durch die Wegschaffung einer dieser Größen eine neue Gleichung (eine Bedingungsgleichung) erhalten, in welcher die Relation der übrigen, in den gegebenen Gleichungen enthaltenen Größen gegen einander so bestimmt wird, daß jede derselben zu der weggeschafften Größe die Relation hat, die in jenen Gleichungen ausgedruckt ist.

3. Die Algebra gebraucht die Elimination zur Absonderung einer der unbekannten Größen von den übrigen. Sind n Gleichungen vorhanden, und n unbekannte Größen, so lassen sich $n-1$ derselben wegschaffen, und es geht eine bestimmte Gleichung zwischen der einen übrig gelassenen und den bekannten Größen hervor, die in den Gleichungen gegeben werden.

4. Die beiden Hauptfälle sind, erstlich, wenn alle unbekannte Größen bloß in der ersten Potenz vorhanden sind, zweytens, wenn von allen oder von einigen höhere Potenzen vorkommen.

I. Elimination der unbekannten Größen, die nur in der ersten Potenz vorhanden sind.

5. Für zwey unbekannte Größen, z, y, seyn die beiden Gleichungen gegeben:

$$\text{I. } az + by = p.$$
$$\text{II. } Az + By = P.$$

Man multiplicire I. mit B, und II. mit b, und ziehe darauf I. von II. ab, so wird erhalten,

$$\text{III. } (Ab - aB)z = Pb - pB.$$

Auf ähnliche Art oder durch gegenseitige Vertauschung von A und a mit B und b, ist

$$\text{IV. } (Ba - bA)y = Pa - pA.$$

In der Gleichung für z ſtehen in dem Theile rechter Hand P und p für A und a in dem Theile linker Hand, ſo wie in der Gleichung für y jene für B und b ſtehen.

6. Die unbekannten Größen ſeyn z, y, x, und die drey Gleichungen:

$$\text{I. } az + by + cx = p$$
$$\text{II. } Az + By + Cx = P$$
$$\text{III. } \alpha z + \beta y + \gamma x = \pi$$

Man multiplicire I. durch $B\gamma - \beta C$: ferner II. durch $\beta c - b\gamma$; und III. durch $bC - Bc$, und addire die Producte, ſo hebt ſich alles auf, was y und x enthält, und es iſt

$$(aB\gamma - a\beta C + A\beta c - Ab\gamma + \alpha bC - \alpha Bc)z = p B\gamma - p\beta C + P\beta c - Pb\gamma + \pi bC - \pi Bc.$$

Verwechſelt man gegenſeitig a, A, α mit b, B, β, ſo erhält man die Gleichung für y. Vertauſcht man gegenſeitig a, A, α mit c, C, γ, ſo wird die Gleichung für x erhalten.

7. Das Geſetz der Formation iſt ein combinatoriſches. Man bezeichne die drey Alphabete, a, b, c; A, B, C; α, β, γ, durch die Zahlen 1, 2, 3; die Buchſtaben durch die Stelle, indem a, A, α in die erſte, b, B, β in die zweyte, c, C, γ, in die dritte Stelle geſetzt werden. Es iſt ſonach der Factor von z $= +123 - 132 + 231 - 213 + 312 - 321$. Das Product von z in dieſen Factor wird auf dieſelbe Art ausgedruckt, wenn p, P, π ſtatt a, A, α geſetzt werden. Es ſind hier alle Verſetzungen der Zahlen 1, 2, 3, vorhanden. Das Vorzeichen der Glieder iſt +, wenn die Anzahl der Folgen einer kleinern Zahl auf eine größere gerade oder null (wie in 123) iſt, und —, wenn dieſe Anzahl ungerade iſt. Oder es iſt +, wenn die Ziffern aus der Reihe 12312 von der linken nach der rechten Hand genommen werden, —, wenn es auf die entgegengeſetzte Art geſchieht. Z. B. in + 231 ſind zwey Folgen, 21, 31, in — 321 ſind drey Folgen 32, 31, 21.

8. Für vier unbekannte Größen, z, y, x, u, werden die Gleichungen gegeben:

$$\text{I. } az + by + cx + dw = p$$
$$\text{II. } Az + By + Cx + Dw = P$$
$$\text{III. } \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta w = \pi$$
$$\text{IV. } \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}w = \mathfrak{P},$$

es sollen die Gleichungen für z, y, x, w, jede besonders gefunden werden. Man bezeichne die für die Coefficienten gebrauchten Alphabete nach der Folge der Gleichungen durch 1, 2, 3, 4; die Buchstaben selbst durch ihre Stelle, wie in dem beygefügten Täflein, so daß z. B. 3412 das Product α B c D bedeutet. Man bezeichne nun die Gleichung für z abgekürzt durch Mz = N, so ist

1	a	b	c	d
2	A	B	C	D
3	α	β	γ	δ
4	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$

M =

$$+ 1234 - 1243 + 1342 - 1324 + 1423 - 1432$$
$$+ 2314 - 2341 + 2431 - 2413 + 2143 - 2134$$
$$+ 3412 - 3421 + 3124 - 3142 + 3241 - 3214$$
$$+ 4132 - 4123 + 4213 - 4231 + 4321 - 4312$$

Die Größe N entsteht aus M, wenn für a, A, α, $\mathfrak{A}$ folgsweise p, P, π, $\mathfrak{P}$ gesetzt werden. Der Factor M enthält alle Versetzungen der Ziffern, 1, 2, 3, 4. Das Vorzeichen + wird gesetzt, wenn die Anzahl der Folgen einer kleinern Zahl nach einer größern gerade oder Null (in 1234) ist, das Vorzeichen —, wenn diese Anzahl ungerade ist. Z. B. in + 3412 sind 4 solche Folgen, 31, 32, 41, 42; in — 3142 sind 3 solche Folgen 31, 32, 42. Oder, das Vorzeichen einer Combination ist in der ersten und dritten Zeile +, wenn die drey letzten Ziffern derselben aus der Folge der Ziffern 1234123 von der linken nach der rechten Hand, mit Übergehung der ersten, genommen werden, und —, wenn es von der rechten nach der linken Hand geschieht; hingegen in der zweyten und vierten Zeile — in dem erstern Falle, + in dem zweyten.

Für die unbekannte Größe y wird die Gleichung erhalten, wenn die Buchstaben in der Ordnung, wie b, c, d, a, geschrieben werden, wie in dem beygefügten Täflein, so daß nun 3412 das Product βCdA bedeutet. Auch werden nun p, P, π, ℘ für b, B, β, ℬ gesetzt.

1	b	c	d	a
2	B	C	D	A
3	β	γ	δ	α
4	ℬ	ℭ	ⅅ	𝔄

Die Rechnung, um die Gleichung für z zu finden, wird folgendergestalt gemacht. Man multiplicirt die Gleichung I. mit den sechs ersten Größen in M, nachdem sie durch a dividirt sind; die Gleichung II. mit den sechs folgenden, durch A vorher dividirten Größen; die Gleichung III. mit dem nächsten sechs folgenden, durch α dividirten; endlich die Gleichung IV. mit den letzten sechs, durch 𝔄 dividirten Größen. Hierauf addirt man die multiplicirten Gleichungen, das ist, die Theile auf jeder Seite, so hebt sich alles, was y, x, w enthält. Je zwey Partialproducte heben sich, die aus Gliedern in M entstehen, worin die dritte und vierte Ziffer dieselben sind, und die beiden ersten ihre Stellen vertauscht haben, wie 1234 und 2134.

9. Wenn in den Gleichungen das gegebene Glied, als p, P, π, ℘, fehlt, so ist

bey zwey Gleichungen

$$Ab = aB,$$

bey drey Gleichungen

$$aB\gamma + A\beta c + a\mathfrak{b}C = a\beta C + Ab\gamma + \mathfrak{a}Bc,$$

bey vier Gleichungen,

$$M = o \text{ aus } (8.).$$

Dieses sind Bedingungsgleichungen für die gegebenen Größen, wodurch die Relation derselben gegeben wird, so daß man sie nicht alle willkührlich annehmen darf.

II. Elimination der Größen, von welchen Potenzen vorhanden sind.

10. Die Methode, welche sich zur Elimination einer Größe y aus zwey Gleichungen zwischen dieser y und einer andern unbekannten x am ersten anbietet, ist folgende. Steigt sie in der einen Gleichung auf eine höhere Potenz als in der andern, so multiplicirt man die letztere Gleichung mit einer Potenz von y, so daß die höchste Potenz dieser Größe in beiden Gleichungen dieselbe sey. Durch die Multiplication jeder Gleichung mit dem Factor der höchsten Potenz in der andern wird der höchste Terminus in beiden einerley, und durch die Subtraction der einen Gleichung von der andern erhält man eine neue Gleichung, in welcher y auf einen niedrigern Grad steigt, als in der Gleichung von dem höhern Grade. So fährt man fort, bis daß man zwey Gleichungen von demselben Grade in Absicht auf y erhält. Aus diesen schafft man durch gehörige Multiplicationen sowohl den Terminus mit der höchsten Potenz von y, als denjenigen, der y nicht enthält, weg, so werden zwey neue Gleichungen erhalten, in welchen y einen niedrigern Grad hat, und auf diesem Wege gelangt man endlich zu zwey gleichen Werthen von y, die eine Gleichung für die zweyte unbekannte Größe und die bekannten geben, es sey denn, daß beide Werthe von y Null sind.

Hier folgen einige Beyspiele. I. Der Fall, da y in der einen Gleichung nur in der ersten Potenz vorkommt, ist leicht, weil man nur den Werth von y aus dieser Gleichung in die andere zu setzen braucht.

II. Es seyn P, Q, R, p, q, r Functionen einer unbekannten x, und die beiden Gleichungen für x und y seyn:

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2 = 0$$
$$\text{II. } p + qy + ry^2 = 0.$$

Man multiplicire I. durch r; II. durch R, und ziehe das zweyte Product von dem ersten ab; dann multiplicire man I. durch p, und II. durch P, und ziehe das erste Product

in dem zweyten ab, worauf man den Unterſchied bey der letzten Subtraction durch y dividire. So entſtehen die Gleichungen,

III. $(Pr - Rp) + (Qr - Rq)\, y = o$

IV. $(Pq - Qp) + (Pr - Rp)\, y = o.$

Aus dieſen Gleichungen erhalten wird

$$y = \frac{Pr - Rp}{Rq - Qr}; \quad y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp},$$

alſo iſt

V. $(Pr - Rp)^2 = (Qp - Pq)(Rq - Qr)$.

In dieſer Gleichung iſt die Relation zwiſchen x und den gegebenen Größen enthalten, wodurch diejenigen x beſtimmt werden, welche in beiden Gleichungen, I. und II. einerley Werth von y geben.

12. Sind die Gleichungen zwiſchen den Größen x und y vom zweyten Grade, ſo überſteigt die Anzahl der Factoren x und y in keinem Gliede die Zahl 2. Daher ſind R und r gegebene Größen, ohne x und y. Ferner hat Q die Form $A + Bx$, und P die Form $C + Dx + Ex^2$. Eben ſo hat q die Form $a + bx$, und p die Form $c + dx + ex^2$. Wenn dieſe Formen vollſtändig gegeben ſind, ſo iſt die höchſte Potenz von x in $Pr - Rp$ die zweyte, in dem quadratiſchen Product die vierte; in $Qp - Pq$ die dritte, in $Rq - Qr$ die erſte, in dem Producte beider die vierte. Daher iſt IV. eine Gleichung für x vom vierten Grade. Da eine ſolche Gleichung entweder vier, oder zwey, oder gar keine, mögliche Wurzeln hat, ſo können die beiden Gleichungen I. und II entweder auf viererley oder zweyerley Art, oder gar nicht neben einander beſtehen, das iſt, es giebt entweder vier Werthe von x (worunter auch gleiche ſeyn können), oder zwey, oder gar keine, für welche y in jenen beiden Gleichungen einerley Werth erhält. Setzt man die Wurzeln der Gleichung V. in die Formel für y, ſo werden dadurch die Werthe der in beiden gegebenen Gleichungen für jene Wurzeln übereinſtimmenden y gefunden.

Setzt man die möglichen Werthe von x in eine der Gleichungen I. oder II. so erhält y für jeden dieser Werthe zwey Werthe, welche möglich sind, da y durch eine Gleichung vom ersten Grade gegeben wird. Hätte nun x vier Werthe, so bekäme y zwar acht Werthe, allein nur vier derselben kommen mit vier Werthen von y in der andern Gleichung überein. Denn y kann, vermöge der einfachen Gleichung, nur so viele mögliche Werthe erhalten, als x hat.

13. Es sey in der einen Gleichung die dritte Potenz von y nebst niedrigern vorhanden; in der andern sey die höchste Potenz von y die zweyte, wie folget.

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2$$

$$\text{II. } p + qy + ry^2 + sy^3 = o,$$

wo P, Q, R, p, q, r eben die Bedeutung haben, wie vorher, und s auch eine Function von x allein ist. Man multiplicire I. durch sy, und II. durch R, ziehe darauf I. von II. ab, so ist

$$\text{III. } Rp + (Rq - Ps)y + (Rr - Qs)y^2 = o.$$

Nun haben wir zwey Gleichungen, in deren jeder die höchste Potenz von y die zweyte ist. Man setze daher für die Functionen p, q, r in (11.) hier Rp; Rq — Ps; Rr — Qs; so erhält man

$$y = \frac{P(Rr - Qs) - R^2p}{R(Rq - Qs) - Q(Rr - Qs)},$$

$$y = \frac{QRp - P(Rq - Ps)}{P(Rr - Qs) - R^2p}.$$

Also ist

$$\text{IV. } (PRr - PQs - R^2p)^2 =$$
$$(QRp - PRq + P^2s)(R^2q - PRs - QRr + Q^2s).$$

Diese Gleichung entwickelt wird

$$P^3s^2 - Q^3ps + R^3p^2 + P^2(Rr^2 - 2Rqs - Qrs) + Q^2(Pqs + Rpr) + R^2(Pq^2 - 2Ppr - Qpq) + PQR(3ps - qr) = o.$$

Zu den Combinationen sind von den Functionen P, Q, R je drey, und von den Functionen p, q, r, s je zwey genommen. Setzt man zu jeder die zugehörige Potenz von y, so bekommt jedes Glied die sechste Potenz von y als Factor.

14. Wenn in der Gleichung I. höchstens zwey unbekannte Größen in einander multiplicirt vorkommen, und in der Gleichung II. höchstens drey, so sind R, s gegebene Größen ohne x; und die andern Functionen haben folgende Formen:

$P = A + Bx + Cx^2$; $Q = D + Ex$;

$p = a + bx + cx^2 + dx^3$; $q = e + fx + gx^2$;

$r = h + ix$. Die Gleichung IV. für x steigt also auf den sechsten Grad, wenn nicht durch gewisse Bestimmungen der gegebenen Größen der Coefficient von x^6, oder die von x^6 und x^5, oder mehrerer Potenzen von oben herab Null sind.

Da eine Gleichung vom sechsten Grade entweder sechs, oder vier, oder zwey mögliche Wurzeln oder gar keine hat, so sind es sechs, oder vier, oder zwey Werthe von x, wodurch beide Gleichungen I. II. in den Werthen von y zusammentreffen, oder es werden diese für keinen Werth von x übereinstimmig.

Beyspiele von höhern Gleichungen sind in Eulers Introd. in Anal. Inf. T. II. cap. 19. anzutreffen.

15. Die Gleichungen zwischen x und y in (11, 13.) können auch als unabhänzige, jede als eine zwischen zwey veränderlichen Größen, angesehen werden, nur daß alsdann, wenn x in beiden dieselbe Größe bedeutet, y nicht einerley Werth hat, außer für solche Werthe von x, welche die Wurzeln der durch die Elimination von y erhaltenen Endgleichung sind. So ist es auch mit den beiden Gleichungen in (5.) beschaffen, worin y nur für denjenigen Werth von z, der durch die Gleichung III. daf. bestimmt ist, übereinstimmende Werthe erhält.

16. Die beiden Gleichungen in (5.) ſtellen jede eine gerade Linie mit den Coordinaten z und y vor. Für den Punct, wo ſie ſich ſchneiden, (wenn ſie nämlich in einer Ebene liegen und nicht parallel ſind;) iſt die Ordinate zu der Abſciſſe z gemeinſchaftlich. Für jede andere Abſciſſe muß man die Ordinaten y in Gedanken oder durch eine Bezeichnung unterſcheiden.

17. Die Gleichungen in (11.) gehören für zwey Linien der zweyten Ordnung. Hier ſind vier Abſciſſen x möglich, für welche die Ordinaten y einerley Werth erhalten, oder die beiden Curven können ſich in vier Puncten ſchneiden. So wie es aber auch nur zwey ſolche x geben kann, oder auch gar keine möglich ſind, ſo giebt es Lagen dieſer Curven, bey welchen ſie ſich nur in zwey Puncten oder gar nicht ſchneiden. Wo ein Durchſchnittspunct gefunden iſt, iſt auch außer dieſem noch einer vorhanden; zu drey Durchſchnittspuncten kommt noch immer der vierte. Dieſes wird durch die Geſtalt dieſer Curven gut erläutert.

18 Die erſte Gleichung in (13.) iſt für eine Linie der zweyten Ordnung, die zweyte für eine der dritten. Dieſe können ſich alſo in ſechs Puncten ſchneiden; es mögen aber der Durchſchnitte auch nur vier, oder zwey vorhanden ſeyn, oder es mag keiner Statt haben.

19. Bey der hier vorgetragenen Methode der Elimination iſt zu erinnern, daß die dadurch erhaltene Endgleichung für die eine der unbekannten, x, auf einen höhern Grad führen kann, als es nach der Beſchaffenheit der Gleichungen ſeyn ſollte, und daß ſie alsdann auf den gehörigen, möglich niedrigſten Grad durch die Diviſion mit einem Factor gebracht wird, der keine gemeinſchaftliche y für die beiden Gleichungen enthält. In dem Beyſpiele (18.) enthält die Endgleichung IV. den Factor R; bey höhern Gleichungen enthält ſie einen mehr zuſammengeſetzten. Die beiden Gleichungen,

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^5 = o,$$

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = o,$$

führt zu einer Endgleichung mit dem Factor $Sp - Ps$, der seine gemeinschaftliche y liefert.

Dieses ist eine Unbequemlichkeit, weil man bey höhern Gleichungen den Factor der Endgleichung vielleicht nicht mehr finden können.

20. Euler giebt a. a. O. noch ein Verfahren an, welches weniger Substitutionen bedarf, als das erstere bey höhern Gleichungen erfordert. Allein in dem Falle (13.) ist es doch viel beschwerlicher, als jenes. Um dieselbe Zeit, als seine Introduction herauskam, (1748.), trug er in den Abhandlungen der Berliner Akademie für das J. 1748. eine sinnreiche Methode der Elimination vor, besonders in der Absicht zu erweisen, daß zwey Linien, eine vom mten Grade, die andere vom nten Grade sich in nicht mehr als $m \times n$ Puncten schneiden können. Ich will sie hier an dem Beyspiele (13.) zeigen.

21. Es sey

I. $P + Qy + Ry^2 = 0$,

II. $p + qy + ry^2 + sy^3 = 0$.

Wenn für einen gemeinschaftlichen Werth von x beide Gleichungen auch denselben Werth für y geben, so ist dieser letztere eine der beiden Wurzeln in I. oder eine der drey Wurzeln in II. Die beiden Wurzeln in I. seyn A, B, so ist entweder

$$p + qA + rA^2 + sA^3 = 0,$$

oder

$$p + qB + rB^2 + sB^3 = 0.$$

Das Product dieser Gleichungen ist Null, es mag A oder B, oder jedes derselben der gemeinschaftliche Werth von y für dasselbe x seyn. Lassen sich aus diesem Producte die A und B herausschaffen, so erhält man eine Gleichung für x mittelst der Functionen P, Q, R, p, q, r, s.

Das Product ist

$$p^2 + pq(A + B) + pr(A^2 + B^2) + ps(A^3 + B^3) + q^2AB + qrAB(A + B) + qsAB(A^2 + B^2) + r^2A^2B^2 + rsA^2B^2(A + B) + s^2A^3B^3.$$

Nun ist nach der Theorie der Gleichungen (s. Gleichung VI. 6.) und derer vom zweyten Grade insbesondere,

$$A+B=-\frac{Q}{R}, \quad AB=\frac{P}{R}.$$

Ferner ist

$$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=\frac{Q^2-2PR}{RR},$$

und

$$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)=\frac{-Q^3+3PQR}{R^3}.$$

(s. auch combinatorische Analysis, 53.). Also ist das Product der beiden Gleichungen für A und für B,

$$\begin{aligned}&=p^2R^3-pqQR^2+prR(Q^2-2PR)\\&+ps(3PQR-Q^3)+q^2PR^2-qrPQR\\&+qsPQ^2-2P^2R)+r^2P^2R-rsP^2Q\\&+s^2P^3=0\end{aligned}$$

übereinstimmig mit der Gleichung in (13.). Nach diesem Verfahren geschieht nichts überflüssiges in der Rechnung, wie bey der erstern geschah, wo mehrere Glieder sich aufheben, und die ganze Gleichung darauf noch durch R dividirt werden muß.

22. Die Bedingungsgleichung für x kann auch durch ein Product dreyer Gleichungen, wie I. dargestellt werden. Die drey Wurzeln der Gleichung II. für irgend ein x seyn a, b, c. Soll eine derselben auch eine Wurzel von I. seyn, so ist

entweder	$P+Qa+Raa=0$
oder	$P+Qb+Rbb=0$
oder	$P+Qc+Rcc=0.$

Die Bedingungsgleichung für x ist das Product dieser drey Gleichungen, nämlich:

$$P^3 + P^2Q(a+b+c) + P^2R(a^2+b^2+c^2)$$
$$+ PQ^2(ab+ac+bc) + PR^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$
$$+ PQR(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$$
$$+ Q^3abc + Q^2R(abc^2+acb^2+bca^2)$$
$$+ QR^2(ab^2c^2+ba^2c^2+ca^2b^2) + R^3a^2b^2c^2 = 0.$$

Zur Wegschaffung von a, b, c, dienen folgende Gleichungen:

1) $a+b+c = -\frac{r}{s}$; 2) $ab+ac+bc = \frac{q}{s}$;

3) $abc = -\frac{p}{s}$; (Gleichung III. 5, und VI. 6.)

Ferner

4) $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

5) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = (ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)$

6) $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b =$
$(ab+ac+bc)(a+b+c) - 3abc$

7) $abc^2+acb^2+bca^2 = abc(a+b+c)$

8) $ab^2c^2 + ba^2c^2 + ca^2b^2 = abc(bc+ac+ab)$.

Durch die Substitution dieser Werthe entsteht wiederum die in (13.) gefundene Gleichung.

23. Bald nach Euler hat Cramer (Analyse des lignes courbes, 1750.) die Methode, welche jener nur gleichsam angedeutet, und in ein paar Beyspielen erläutert hatte, völlig ausgeführt und erwiesen, in dem zweyten Anhange des gedachten Werks, pag. 660—671.

24. Euler selbst hat das Verfahren noch etwas abgeändert, in den Mem. de l'Acad. de Berlin, 1764. T. XX. Er zeigt es zuerst an folgenden beiden Gleichungen,

$$z^2 + Pz + Q = 0$$
$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0,$$

aus welchen z herausgeschafft werden soll. Die Buchstaben P, Q, p, q, r, enthalten die übrigen unbekannten Größen ausser z. Damit beide Gleichungen mit einander zugleich bestehen können, müssen sie für einen gewissen Werth von z beide auf Null gebracht werden können, oder beide Gleichungen haben eine gemeinschaftliche Wurzel, oder auch mehrere. Eine solche Wurzel sey ω, so ist $z - \omega$ ein Factor von beiden Gleichungen, und es ist (Gleichung VI.)

$$z^2 + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A})$$

$$z^3 + pz^2 + qz + r = (z - \omega)(z^2 + az + b),$$

wo der zweyte Factor in dem Producte rechter Hand der Quotient des Werthes der Gleichung durch den Factor $z - \omega$ ist. Hieraus ergiebt sich nun, daß

$$(z^2 + Pz + Q)(z^2 + az + b) =$$
$$(z^3 + pz^2 + qz + r)(z + \mathfrak{A})$$

ist.

Wird das Product auf beiden Seiten entwickelt, so sind die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von z einander gleich, nämlich

I. $P + a = p + \mathfrak{A}$. II. $Q + Pa + b = q + p\mathfrak{A}$.
III. $Pb + Qa = q\mathfrak{A} + r$. IV. $Qb = r\mathfrak{A}$.

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich die drey einfachen Größenzeichen, $\mathfrak{A}$, a, b, wegschaffen, und es bleibt die Bedingungsgleichung für die Functionen P, Q, p, q, r übrig.

25. La Grange hat in den Mem. de l'Acad. de Berlin, 1769. T. XXV. zur Elimination einer unbekannten Größe aus zwey Gleichungen ein lehrreiches Verfahren angewandt. Die beiden Gleichungen sind

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

$$\alpha + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \text{etc.} = 0.$$

erstere vom Grade m, diese vom Grade n

Diese verwandelt er jede in ein Product aus zweytheiligen Factoren von der Form $1 - \alpha x$. Den Logarithmen des Products zerlegt er in einzelne Logarithmen, und diese entwickelt er in Reihen. Den Logarithmen des Aggregats von den Gliedern der Gleichung entwickelt er eben so in Reihen mit Zuziehung der Potenzirung einer Reihe, und findet dadurch ein Mittel, die Wurzeln der Gleichungen herauszuschaffen, wobey er auch den Satz gebraucht, daß die Bedingungsgleichung ein solches Product ist, wie oben in den Beyspielen gemacht worden. Die Bedingungs- oder Endgleichung ist der Form nach eine unendliche Reihe, von welcher er aber zeigt, daß alle Producte aus A, B, C, etc. die über n Dimensionen enthalten, darin wegfallen müssen, so wie auch alle Producte aus a, b, c, etc. von mehr als m Dimensionen. Auf welche Art aber sich dieselben heben, kann man nur in besondern Fällen einsehen.

26. Bezout hat in den Mém. de l'Acad. de Paris 1764. ein Mémoire sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues geliefert. Derselbe lehrt auch in seiner Théorie générale des équations algébriques, à Paris 1779, wie aus n Gleichungen, deren jede n unbekannte Größen enthält, eine Gleichung für jede dieser Größen, hergeleitet werde.

27. In der Vorrede zu Rübigers Specimen analyticum de lineis secundi ordinis, Lipſ. 1784. hat Hindenburg Cramers und Bezouts Methoden zur Wegschaffung der unbekannten Größen aus Gleichungen vom ersten Grade vorgetragen, und aus der combinatorischen Analytik mit bequemen Abkürzungen bereichert.

28. Das erste Beyspiel einer Elimination möchte dasjenige seyn, welches sich in Fermats vermischten Werken (Opera varia, Tolosae 1679.) S. 58. findet. Nach unserer Bezeichnungsart sind die beiden Gleichungen

$$\text{I. } x^3 + y^3 = p$$

$$\text{II. } ax + by + y^2 = q.$$

Aus dieſen leitet Fermat, aber auf eine unbequeme, w
ſchweifige Art, einen Werth für y her. Dieſen ſoll u
in die Gleichung II. ſetzen, welches eine mühſelige R
nung erfordern würde. Fermat rühmt ſeine Methode
ein allgemeines Mittel, irrationale Ausdrücke aus e
Gleichung wegzuſchaffen, wozu die ſymmetrica clin
tismus Vietaea nicht immer hinlänglich ſey.

29. Newton giebt in der Arithm. univ
pag. 62. für vier Fälle die allgemeine Endgleichung, de
man ſich in jedem beſondern Falle bedienen kann. Se
Eliminations-Methode iſt nicht ſo bequem als die hier
(10.) gewieſene.

30. Ein der Elimination entgegengeſetztes Verfah
iſt, wenn zu einer Gleichung für eine unbekannte x zw
Gleichungen zwiſchen dieſer x und einer neben eingefüh
ten, als unbekannt betrachteten Größe y, geſucht werde
ſo daß durch Elimination von y jene erſtere für x entſteh
Oder man verbindet die gegebene Gleichung für x mit ein
unbeſtimmten zwiſchen x und y, um eine Gleichung v
einer gegebenen Form zu erhalten. Dergleichen Fälle ko
men in der Algebra vor, ſ. Gleichung V. u. X.

Ellipſe iſt eine krumme Linie, für welche die Gl
chung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten u und y
$cu - m^2 u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m b
Exponent des Verhältniſſes zweyer gegebenen Linien i
Wenn $m = 1$ genommen wird, ſo verwandelt ſich d
Ellipſe in einen Kreis, deſſen Durchmeſſer $= c$ iſt.

Die Benennung Ellipſe, (Verminderung), ſ
anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate kleiner iſt a
das Rechteck von der Abſciſſe und einer conſtanten Lini
Nimmt man $m = 0$, ſo hat man die Parabel, a
welcher das Quadrat der Ordinate gleich iſt dem Rech
ecke von der Abſciſſe und einer Conſtante. Die Gleichun
$cu + m^2u^2 = y^2$ gehört für die Hyperbel, woran da
Quadrat der Ordinate größer iſt, als das Rechteck cu

Wie dieſe drey Linien durch den Schnitt eines Kegel
mit einer Ebene entſtehen, wird in dem Artikel, Kege

stellt, gezeigt. Hier wird, was die Ellipse betrifft, alles aus ihrer Gleichung, als einer vollständigen Erklärung derselben, hergeleitet. Die Hülfssätze aus der Trigonometrie finden sich in dem Artikel, Goniometrie.

1. Für jedes u hat y zwey gleich große, entgegengesetzte Werthe. Die Axe der Abscissen u theilt die Ellipse in zwey gleiche und ähnliche Hälften, wie ein Durchmesser einen Kreis.

Für $u = o$ ist $y = o$; und für $u = \frac{o}{+mm}$ ist ebenfalls $y = o$. Man setze $\frac{c}{m^2} = 2a$, so ist . . . .

$(2au - u^2) = y^2$. Die Ordinaten an der Ellipse verhalten sich wie die Ordinaten an einem Kreise, dessen Durchmesser $2a$ ist.

2. Man setze $u = a - x$, so ist

$$m^2 (a^2 - x^2) = y^2,$$

und die größte Ordinate an der Ellipse ist $= ma$.

3. Man setze $b^2 = m^2 a^2$, so ist

$$\frac{1}{m^2} (b^2 - y^2) = x^2.$$

Diese Gleichung ist jener ganz ähnlich. Der unveränderliche Factor des ersten Theils der einen ist das Reciproke des Factors der andern. Betrachtet man hier x als Ordinate, so ist ihr größter Werth $= \frac{b}{m} = a$.

4. Setzt man statt m dessen Werth, $\frac{b}{a}$, so ist

$$\frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) = y^2,$$

oder $\frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) = x^2$.

Aus diesen leitet Fermat, aber auf eine unbequeme, weitschweifige Art, einen Werth für y her. Diesen soll man in die Gleichung II. setzen, welches eine mühselige Rechnung erfordern würde. Fermat rühmt seine Methode als ein allgemeines Mittel, irrationale Ausdrücke aus einer Gleichung wegzuschaffen, wozu die symmetrica climatismus Vietaea nicht immer hinlänglich sey.

29. Newton giebt in der Arithm. univers. pag. 62. für vier Fälle die allgemeine Endgleichung, deren man sich in jedem besondern Falle bedienen kann. Seine Eliminations-Methode ist nicht so bequem als die hier in (10.) gewiesene.

30. Ein der Elimination entgegengesetztes Verfahren ist, wenn zu einer Gleichung für eine unbekannte x zwey Gleichungen zwischen dieser x und einer neben eingeführten, als unbekannt betrachteten Größe y, gesucht werden, so daß durch Elimination von y jene erstere für x entstehe. Oder man verbindet die gegebene Gleichung für x mit einer unbestimmten zwischen x und y, um eine Gleichung von einer gegebenen Form zu erhalten. Dergleichen Fälle kommen in der Algebra vor, s. Gleichung V. u. X.

Ellipse ist eine krumme Linie, für welche die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten u und y ist $cu - m^2u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m der Exponent des Verhältnisses zweyer gegebenen Linien ist. Wenn $m = 1$ genommen wird, so verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis, dessen Durchmesser $= c$ ist.

Die Benennung Ellipse, (Verminderung), soll anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate kleiner ist als das Rechteck von der Abscisse und einer constanten Linie. Nimmt man $m = 0$, so hat man die Parabel, an welcher das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Rechtecke von der Abscisse und einer Constante. Die Gleichung $cu + m^2u^2 = y^2$ gehört für die Hyperbel, woran das Quadrat der Ordinate größer ist, als das Rechteck cu.

Wie diese drey Linien durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen, wird in dem Artikel, Kegel-

schnitt, gezeigt. Hier wird, was die Ellipse betrifft, alles aus ihrer Gleichung, als einer vollständigen Erklärung derselben, hergeleitet. Die Hülfssätze aus der Trigonometrie finden sich in dem Artikel, Goniometrie.

1. Für jedes u hat y zwey gleich große, entgegengesetzte Werthe. Die Axe der Abscissen u theilt die Ellipse in zwey gleiche und ähnliche Hälften, wie ein Durchmesser seinen Kreis.

Für $u = o$ ist $y = o$; und für $u = \frac{c}{m}$ ist ebenfalls $y = o$. Man setze $\frac{c}{m} = 2a$, so ist . . . .

$m^2(2au - u^2) = y^2$. Die Ordinaten an der Ellipse verhalten sich wie die Ordinaten an einem Kreise, dessen Durchmesser $2a$ ist.

2. Man setze $u = a - x$, so ist

$$m^2(a^2 - x^2) = y^2,$$

und die größte Ordinate an der Ellipse ist $= ma$.

3. Man setze $b^2 = m^2a^2$, so ist

$$\frac{1}{m^2}(b^2 - y^2) = x^2.$$

Diese Gleichung ist jener ganz ähnlich. Der unveränderliche Factor des ersten Theils der einen ist das Reciproke des Factors der andern. Betrachtet man hier x als Ordinate, so ist ihr größter Werth $= \frac{b}{m} = a$.

4. Setzt man statt m dessen Werth, $\frac{b}{a}$, so ist

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = y^2,$$

oder $$\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = x^2.$$

$$e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2},$$

oder

$$\frac{a^2-e^2}{a^2}(a^2-x^2) = y^2.$$

Der geometrische Ort des Punctes M, oder die g
suchte krumme Linie, ist eine Ellipse, deren große Axe = 2a
und deren kleine Axe $= 2\sqrt{(a^2-e^2)}$ ist

9. Umgekehrt, wenn AMB eine halbe Ellipse is
deren große Axe AB, halbe kleine CD, Mittelpunct, C
und wenn aus dem Endpuncte D an AB die Linien DF
DG gezogen werden, deren jede = CA oder CB ist, so is
die Summe der Linien FM, GM, die von den Punc
F, G an irgend einen Punct der Ellipse gezogen werden
der großen Axe AB gleich.

Bew. Zufolge der Construction ist $CF^2 = a^2 - b^2$
Man setze CF = e, so ist $b^2 = a^2 - e^2$. Da $FM^2 =$
$(e+x)^2 + y^2$, und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ ist, so wird

$$FM^2 = a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2,$$

$$FM = a + \frac{ex}{a}.$$

Eben so wird

$$GM = a - \frac{ex}{a},$$

also $FM + GM = 2a$.

10. Die beiden merkwürdigen Puncte, F, G, hei
ßen bey den alten Geometern Puncta ex comparatione,
(τα γενομενα 'εκ της παραβολης σημεια) bey den Neuern,
Foci, auch Umbilici, Brennpuncte, wegen einer
Eigenschaft, die unten vorkommen wird. Apollonius trägt
den hier in (9.) erwiesenen Satz erst im dritten Buche,

52sten Satze, vor. Er erweiset ihn aus Betrachtungen über die berührenden Linien, und ihre Verbindungen unter sich und mit andern. Der nächste Satz dazu ist der, daß die Linien, welche von den Vergleichungspuncten an einen Berührungspunct gezogen werden, mit der berührenden gleiche Winkel machen. Er nennt sie Vergleichungs- oder vielmehr Gleichheits Puncte, weil er setzt, daß (Fig. 6.) $AF \times FB = AG \times GB = CD^2$ ist, oder gleich dem vierten Theil der Figur zu der Axe, wie er es ausdrückt. Man sieht nicht, wie er auf diese Puncte gekommen seyn mag. Die Gleichung für die Coordinaten auf den Axen bietet keine Veranlassung dazu dar Die leichteste möchte die in (8.) vorgetragene Aufgabe seyn.

11. Die Ordinate in den Brennpuncten ist dem halben Parameter gleich, oder die Doppelordinate dem ganzen Parameter. Denn es ist in denselben $x = \pm e$, also $a^2 - x^2 = b^2$, und $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$; $y = \frac{b^2}{a}$. Das ist auch der Werth des halben Parameters (7.).

12. Es sey $FM = z$, $AFM = \varphi$, so ist

I. $aa + ex = az$; II. $aa - ee = (a - e \cos \varphi) z$.

Die erste Gleichung ist dieselbe mit der Gleichung, $ex = at$ in (8.), da $t = z - a$ ist. Hieraus folgt die zweyte, wegen $x = z \cos \varphi - e$. In der Astronomie wird die letztere vorzüglich gebraucht. Die Winkel an F sind in dieser Formel von dem entferntern Scheitelpuncte A an genommen. Werden sie von dem nächsten Scheitelpuncte B an gerechnet, so ist $aa - ee = (a + e \cos \varphi) z$, wo $BFM = \varphi$ ist.

13. Es sey CH die dritte Proportionale zu CG und CA, so ist $CA : CG = HP : GM$.

Bew. Man setze nun $GM = z$, so ist $t = a - z$, und $ex = aa - az$, oder $az = aa - ex$. Es sey $HP = v$, und $ev = aa - ex$, so ist $aa = e(v + x)$, oder $CA^2 = CG \times CH$, das ist, CH die dritte Propor-

tionallinie zu CG und CA. Umgekehrt, folgt aus dieser Annahme das Verhältniß von HP : GM.

Die Linie GH ist die dritte Proportionale zu der GC und der halben kleinen Axe CD; der Abstand AH die vierte Proportionale zu CG, GA, CA.

Man kann sich des gefundenen Verhältnisses bedienen, um mit Hülfe eines Proportionalzirkels eine Ellipse zu zeichnen.

14. Innerhalb des rechten Winkels ACE (Fig. 7.) ist eine gerade Linie von bestimmter Länge, FG, gelegt, und auf ihrer Verlängerung ist ein Punct M gegeben; es wird die Beschaffenheit der krummen Linie gesucht, welche der Punct M beschreibt, indem der Punct F von A nach C, so wie G von C nach E hin geschoben wird, und diese Bewegung der beiden Puncte rückwärts oder vorwärts auch in den drey andern rechten Winkeln um C geschieht.

Man ziehe MP senkrecht auf CA, und MN parallel mit derselben, so ist MG : FG = MN : FC, und MF : FG = MP : CG. Es sey GM = a; FM = b: CP = x; MP = y, so ist $FC = \frac{a-b}{a}x$; $CG = \frac{a-b}{b}y$. Da $FG^2 = FC^2 + CG^2$, so ist $(a-b)^2 = (a-b)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$. Daraus wird $\frac{bb}{aa}(aa - xx) = yy$, eine Gleichung für die Ellipse, deren halbe große Axe = a = GM (= CA), und halbe kleine Axe = b = FM (= CD) ist.

Wird der Punct M zwischen F und G genommen, so wird von demselben ebenfalls eine Ellipse beschrieben.

Anstatt des rechten Winkels ACE mag auch ein schiefer genommen werden, s. Newtoni Arithm. univ. Quaest. geom. probl. 35. Man kann auch die gegebene MF unter einem rechten Winkel in F auf FG setzen, eb. das. probl. 36.

Wenn zwey Winkel ACB, acb um ihre festen Scheitelpuncte, C, c, gedreht werden, und der Durchschnitt

in Schenkel CA, ca auf einer geraden Linie forträckt, ſo beſchreibt der Durchſchnitt der Schenkel CB, cb eine Ellipſe oder auch einen andern Kegelſchnitt. Newtoni Princip. Phil. nat. L. I. Lemma 21. Maclaurin Geometria organica. Lond. 1720. Prop. 1. Man hat noch mehrere dergleichen Entſtehungsarten einer Ellipſe oder auch anderer Kegelſchnitte erdacht, ſ. van Schooten exercit. mathem. L. IV.

15. Es ſey (Fig. 8.) AB die große Axe einer Ellipſe, C ihr Mittelpunct, DE und FG ſeyn zwey durch den Mittelpunct C in in ihr gezogene gerade Linien, und MN, welche DE in P ſchneidet, der FG parallel. Wenn tang ACD $\times$ tang BCG $= \frac{bb}{aa}$ iſt, ſo wird jede mit FG parallele von DE halbirt.

Bew. Die halbe große Axe AC iſt $= a$; die halbe kleine aC $= b$, CP $= x$: PM $= y$, der W. ACD $= \varphi$, der W. BCG $= \omega$. Von M ziehe man MQ ſenkrecht auf AB, und durch P die parallele PR mit AC, wie auch die ſenkrechte PS auf dieſelbe. Es iſt der W. MPR $=$ GCE (wegen der parallelen MP, GC, und PR, CB), alſo MPR $= \omega$. Daher iſt MR $= y \sin \omega$; PR $= y \cos \omega$. Ferner QR $=$ PS $= x \sin \varphi$; CS $= x \cos \varphi$. Dadurch iſt MQ $= x \sin \varphi + y \sin \omega$, und CQ $= x \cos \varphi - y \cos \omega$. Nun iſt

$$a^2b^2 = b^2 . CQ^2 + a^2 . MQ^2,$$

alſo

$$a^2b^2 = b^2 (x^2 \cos \varphi^2 - 2xy \cos \varphi \cos \omega + y^2 \cos \omega^2) + a^2 (x^2 \sin \varphi^2 + 2xy \sin \varphi \sin \omega + y^2 \sin \omega^2).$$

Sollen nun in dieſer Gleichung für jedes x die Werthe von y gleich und entgegengeſetzt ſeyn, ſo müſſen diejenigen Glieder ſich aufheben, welche y enthalten, das iſt, es muß ſeyn

$$2b^2xy \cos \varphi . \cos \omega = 2a^2xy \sin \varphi . \sin \omega,$$

oder $b^2 \cos \varphi . \cos \omega = a^2 \sin \varphi . \sin \omega$,

folglich $\frac{b^2}{a^2} =$ tang φ. tang. ω.

16. Zwey Linien, welche durch den Mittelpunct unter den Winkeln φ und ω mit der großen Axe, der Bedingung in (15.) gemäß, gezogen sind, heißen conjugirte Durchmesser. Der eine halbirt alle Chorden, die dem andern parallel gezogen sind. Die Gleichung zwischen den Coordinaten CP und PM oder PN ist

$$a^2b^2 = (a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2)x^2 + (a^2 \sin\omega^2 + b^2 \cos\omega^2)y^2.$$

17. Es sey CD $= f$; CG $= g$, so ist

$$\frac{g^2}{f^2}.(f^2 - x^2) = y^2,$$

$$\frac{f^2}{g^2}(g^2 - y^2) = x^2.$$

Bew. Man setze zur Abkürzung in der Gleichung (16.) den Coefficienten von $x^2 = A$, den von $y^2 = B$, so daß $a^2b^2 = Ax^2 + By^2$. In den Endpuncten, D, E, ist $y = o$, und $x = f$, also ist $a^2b^2 = Af^2$. In dem Mittelpuncte C ist $x = o$, und $y = g$, also $a^2b^2 = Bg^2$. Setzt man nun in jener Gleichung für A und B ihre Werthe aus diesen particularen Gleichungen, so ist

$$a^2b^2 = a^2b^2\left(\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2}\right),$$

$$\text{also} \quad 1 = \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2}.$$

Daraus ergeben sich sogleich die aufgestellten Gleichungen, welche den zum Grunde gelegten (4.) ganz ähnlich sind. Aus ihnen folgt

$$f^2g^2 = g^2x^2 + f^2y^2.$$

18. Man setze DP $= u$, also CP $= f - u$. Setzt man diesen Werth für x, so ist $f^2 - x^2 = 2fu - u^2$, und

$$\frac{2g^2}{f}u - \frac{g^2}{f^2}u^2 = y^2.$$

Dieſe Gleichung hat ganz dieſelbe Form, als die urſprünglich für die Ellipſe angeſetzte, welche daher für jedes Paar conjugirter Durchmeſſer gilt, wenn die Abſciſſen auf dem einen von dem Scheitelpuncte an genommen, und die Ordinaten dem andern parallel gezogen werden.

Auch heißt $\frac{2g^2}{f}$ der Parameter zu dem Durchmeſſer af, als die dritte Proportionale zu af und ag.

19. Es iſt

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\sin(\varphi+\omega)}a^2 = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi.\sin(\varphi+\omega)}b^2.$$

$$g^2 = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega.\sin(\varphi+\omega)}a^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega.\sin(\varphi+\omega)}b^2.$$

Bew. Es ſey $a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2 = A$, ſo iſt aus (16.) $a^2b^2 = Af^2$. Nun iſt $b^2 = a^2\tang\varphi.\tang\psi$ aus (15.), oder $b^2 = a^2.\frac{\sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega}$, alſo

$a^2\sin\varphi^2 = b^2.\frac{\sin\varphi.\cos\varphi.\cos\omega}{\sin\omega}$, und

$$A = b^2.\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}(\sin\varphi.\cos\omega + \cos\varphi.\sin\omega)$$

$$= b^2.\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}.\sin(\varphi+\omega).$$ Folglich iſt

$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\sin(\varphi+\omega)}a^2$. Setzt man für a^2 ſeinen Werth durch b^2, ſo wird der zweyte Werth von f^2 erhalten.

Die Werthe von g^2 entſtehen aus denen von f^2, wenn φ und ω mit einander vertauſcht werden, welches nichts anders iſt, als die Durchmeſſer DE und FG vertauſchen, wobey ſtatt des W. ACD der W. BCG, und ſtatt dieſes jener genommen wird.

20. Es iſt $\frac{f^2}{g^2} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\varphi}$, aus (19.).

21. Man ziehe Ee und Gg ſenkrecht auf AB, ſo iſt Ee : Gg = Cg ; Ce, und die Dreyecke ECe, GCg ſind gleich.

Bew. Da $f^2 \sin 2\varphi = g^2 \sin 2\omega$, ſo iſt $f^2 \sin\varphi . \cos\varphi = g^2 \sin\omega . \cos\omega$, folglich $f \sin\varphi : g \sin\omega = g \cos\omega : f \cos\varphi$. Dieſes iſt die angegebene Proportion. Der zweyte Theil des Satzes folgt daher aus der Lehre von den Dreyecken; ſ. Dreyeck, 30.

Der Satz gilt für je zwey Paare von Durchmeſſern, ſ. unten 27.

22. Es iſt $\frac{f}{g} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi} \cdot \frac{a}{b}$ und $\frac{f}{g} < \frac{a}{b}$.

Der erſte Satz aus (19.). Der zweyte erhellt folgendermaßen. Da $\frac{b^2}{a^2} = \tang^2\varphi$, $\tang\omega = \frac{\tang\omega}{\tang(90°-\varphi)}$, ſo iſt $90°-\varphi > \omega$, und $\sin(90°-\varphi) > \sin\omega$, oder $\cos\varphi > \sin\omega$, alſo $\frac{\sin\omega}{\cos\varphi} < 1$. In dem Falle, daß $f < g$ iſt, iſt der zweyte Satz für ſich klar.

Apollonius beweiſet die zweyte Formel in ſeinem Werke von den Kegelſchnitten, B. VII. S. 24.

23. Es iſt $fg \sin(\varphi+\omega) = ab$, oder, das Parallelogramm, welches von zwey conjugirten Durchmeſſern mit dem ihnen zugehörigen Winkel gemacht wird, iſt dem Rechteck von den beiden Axen gleich. Der Winkel $\varphi+\omega$ iſt der W. DCG der Durchmeſſer, innerhalb deſſen die kleine Axe liegt.

Apollonius hat den Satz gefunden, Conicor. L. VII. prop. 31.

24. Es iſt $f^2 + g^2 = a^2 + b^2$.

Bew. Aus (19.) iſt $f^2 + g^2 =$.

$\frac{a^2}{\sin(\varphi+\omega)}\left(\frac{\sin\omega}{\cos\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos\omega}\right)$. Der zweyte Factor iſt $\frac{\sin\omega.\cos\omega+\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos\varphi.\cos\omega}=$

$\frac{\sin 2\omega+\sin 2\varphi}{2\cos\varphi.\cos\omega}=\frac{\sin(\varphi+\omega).\cos(\varphi-\omega)}{\cos\varphi.\cos\omega}$

$=\sin(\varphi+\omega)\left(1+\frac{\sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega}\right)=$

$\sin(\varphi+\omega)(1+\tang\varphi.\tang\omega)=\sin(\varphi+\omega)$

$(1+\frac{b^2}{a^2})$. Setzt man dazu den erſten Factor des Werths von f^2+g^2, ſo erhält man die Formel des Satzes.

Den merkwürdigen Satz hat ſchon Apollonius, Conicorum L. VII. prop. 12.

25. Es iſt $f+g>a+b$, und $f-g<a-b$.

Bew. Denn $f^2+g^2\pm 2fg\sin(\varphi+\omega)=a^2+b^2\pm 2ab$, aus (23 u. 24.), und $f^2+g^2\pm 2fg=(f\pm g)^2$. Nun iſt $fg>fg\sin(\varphi+\omega)$, alſo erhellt der Satz. Bey Apollonius L. VII. prop. 26. 27.

26. Der Unterſchied zwiſchen $f^2+g^2+2fg\times\sin(\varphi+\omega)$, das iſt $(a+b)^2$ und $(f+g)^2$ iſt $=2fg(1-\sin(\varphi+\omega))=2ab(\frac{1}{\sin(\varphi+\omega)}-1)$. Er iſt am größten, wenn $\sin(\varphi+\omega)$ am kleinſten iſt, und dieſer Sinus iſt am kleinſten, wenn $\varphi=\omega$, das iſt, wenn $f=g$ iſt.

Bew. Da $\frac{b^2}{a^2}=\tang\varphi.\tang\omega$ iſt, und

$\tang(\varphi+\omega)=\frac{\tang\varphi+\tang\omega}{1-\tang\varphi.\tang\omega}$, ſo iſt

$\tang(\varphi+\omega)=\frac{a^2}{a^2-b^2}(\tang\varphi+\tang\omega)$. Nun

ist, wenn das Product zweyer veränderlichen Größen eine gegebene Größe ist, ihre Summe ein Kleinstes, wenn beide gleich groß sind (Größtes u. Kleinstes.). Also ist $\tang\varphi + \tang\omega$ ein Kleinstes, wenn $\varphi = \omega$ genommen wird. Alsdann ist $\tang(\varphi + \omega)$ ein Kleinstes, daher auch $\sin(\varphi + \omega)$. Folglich ist der vorher gesuchte Unterschied ein Größtes.

Daher ist nun auch der Unterschied zwischen der Summe zweyer conjugirten Durchmesser und der Summe der beiden Axen am größten, wenn die beiden Durchmesser gleich groß sind. Und die Summe zweyer gleichen conjugirten Durchmesser ist größer als die Summe je zweyer andern conjugirten. Apollonius L. VII. prop. 26.

27. Es ist $\frac{f^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}$,

oder $\frac{f^2}{a^2} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}$.

Bew. Aus (19.) ist $\frac{f^2}{a^2}\cos\varphi = \frac{\sin\omega}{\sin(\varphi+\omega)}$.

Der umgekehrte Bruch ist $\sin\varphi . \cot\omega + \cos\varphi = \frac{a^2}{b^2}\tang\varphi . \sin\varphi + \cos\varphi = \frac{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}{b^2\cos\varphi}$.

Die Umkehrung dieses Bruches giebt den Werth von $\frac{f^2}{a^2}\cos\varphi$, also die erste Formel des Satzes.

In derselben vertausche man $\sin\varphi^2$ mit $1 - \cos\varphi^2$, und $2\cos\varphi^2$ mit $1 + \cos 2\varphi$, so geht die zweyte Formel hervor.

Diese Formeln unterscheiden sich von denen in (19.) dadurch, daß der Durchmesser darin bloß durch den Winkel φ, den er mit der großen Axe macht, nebst a und b ausgedruckt wird.

Die Formeln sind in der mathematischen Geographie anwendbar.

28. Die beiden conjugirten Durchmeſſer, welche e
ander gleich ſind, machen mit der Axe den Winkel, deſſ
Tangente $= \frac{b}{a}$ iſt. Daher ſind ſie parallel mit den Ch
den Aa und Ba (Fig. 8.), durch die Endpuncte der gr
ßen Axe, und einen Endpunct der kleinen.

29. Di durch den Endpunct D eines Durchmeſſe
DE (Fig.) mit dem zugeordneten FG gezogene par
lele TDt iſt eine berührende in dem Puncte D.

Denn wenn ſie die Ellipſe ſchnitte, ſo würde d
Durchmeſſer, welcher die auf ihr enthaltene Chorde h
birte, der zu FG gehörige Durchmeſſer ſeyn, nicht DE, (1

Oder: die mit FG parallelen Chorden ſind Theile v
ſchneidenden Linien, welche von DE halbirt werden.
dem Endpuncte D fallen die Durchſchnittspuncte mit d
Ellipſe in einen einzigen Punct zuſammen, und die dur
D mit FG parallele hat nur dieſen Punct mit der Ellip
gemein, daher ſie eine berührende iſt.

30. Es ſchneide TDt (Fig. 9.) die verlängerte gro
Axe in T, und von D werde DP ſenkrecht auf AB gez
gen, es iſt CP : CA = CA : CT.

Bew. Denn $CT = \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin \omega} f$, und CP :
$f \cos\varphi$, alſo $CT \cdot CP = \frac{\cos\varphi \cdot \sin(\varphi + \omega)}{\sin\omega} f^2 =$
aus (19.).

31. Hieraus folgt CP : PA = CA ; AT, und hi
aus CP : PA = BP ; PT, ſo daß der Punct P ſowohl C
als BT in demſelben Verhältniſſe eintheilt.

Zu vergleichen, berührende Linie, 8, 18. In Ap
lonii Conic. L. I. prop. 37, iſt der Satz (30.) all
meiner vorgetragen, daß nämlich AB irgend ein Du
meſſer ſeyn mag, nur daß DP mit dem zu AB gehöri
parallel ſey. S. unten 38.

32. Es sey DQ (Fig. 9). auf die berührende TDt in D senkrecht, und $\frac{aa-bb}{aa+bb} = m$, so ist tang CDQ $= \frac{m \sin 2\varphi}{1 - m \cos 2\varphi}$.

Bew. Da DCT $= \varphi$, und DQT $= 90° - \omega$, so ist CDQ $= 90° - \omega - \varphi$, also tang CDQ $=$ cot $(\omega + \varphi)$. Ferner ist

$$\text{tang}(\varphi + \omega) = \frac{\text{tang}\,\varphi + \text{tang}\,\omega}{1 - \text{tang}\,\varphi \cdot \text{tang}\,\omega},$$

$$b^2 = a^2 \text{ tang}\,\varphi \cdot \text{tang}\,\omega,$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}; \quad \cot\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

Durch die Substitutionen mittelst der drey letztern Gleichungen wird

$$\text{tang}(\varphi + \omega) = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\varphi}{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi}.$$

Der umgekehrte Bruch ist cot $(\varphi + \omega) =$ tang CDQ. Dividirt man Zähler und Nenner durch $aa + bb$, und gebraucht die abgekürzte Bezeichnung, m, so hat man die Formel des Satzes.

In der Hypothese elliptischer Meridiane ist CDQ der Winkel der Richtung der Schwere mit dem Halbmesser der Erde an einem Orte.

33. Es ist (Fig. 9.) PQ $= f \sin\varphi \cdot \text{tang}\,\omega = \frac{bb}{aa} \times$ CP. Und CQ $= \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ CP $= \frac{e^2}{a^2}$ CP.

Bew. Denn PQ $=$ DP. tang PDQ; DP $= f \sin\varphi$; und W. PDQ $=$ PTD $= \omega$. Aus jedem Werthe von PQ folgt sogleich der Werth von CQ.

34. Es ist DQ $= \frac{f \sin\varphi}{\cos\omega} = \frac{bb}{f \sin(\varphi + \omega)}$ (aus 19.).

35. Man ziehe (Fig. 9.) QS senkrecht auf DC, so ist $CD \times DS = bb$.

Denn $DS = DQ. \cos QDS = DQ. \sin(\varphi + \omega) = \frac{bb}{f}$, aus (34.)

36. Es seyn wiederum DE, FG (Fig. 10.) zwey *conjugirte* Durchmesser. Anstatt sie auf die beiden Axen zu beziehen, nehme man irgend ein Paar anderer conjugirter Durchmesser HI, KL, deren Winkel ICK ist. Es ist

I. $CH^2 \times \sin HCD \times \sin HCG = CK^2 \times \sin KCD \times \sin KCG.$

II. $CH^2 . \sin HCK . \sin HCG = CD^2 . \sin DCG \times \sin DCK.$

III. $CD^2 . \sin DCH . \sin DCK = CG^2 . \sin GCH \times \sin GCK.$

Lem. Man setze $ICK = \alpha$, $HCD = \varphi$; $ICG = \omega$; ferner $DC = f$, $CG = g$; $HC = h$, $CK = k$. Dann ziehe man durch irgend einen Punct M des *Umfanges* MP parallel mit CG, als Ordinate auf dem Durchmesser DE; und MQ parallel mit CK, als Ordinate auf HI; ferner PR parallel mit HC; PS parallel mit CK, und setze $CP = x$; $PM = y$. Nun ist

$$\frac{y \sin \omega}{\sin \alpha} = MR; \quad \frac{y \sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha} = PR;$$

$$\frac{x \sin \varphi}{\sin \alpha} = PS; \quad \frac{x \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} = CS,$$

also

$$MQ = \frac{y \sin \omega}{\sin \alpha} + \frac{x \sin \varphi}{\sin \alpha},$$

$$CQ = \frac{x \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} - \frac{y \sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha}.$$

Da die Ordinaten MQ mit dem conjugirten Durchmesser parallel sind, so ist (17.)

$$h^2 k^2 \sin \alpha^2 = k^2 . CQ^2 + h^2 . QM^2.$$

Daraus ist

$$h^2k^2 \sin \alpha^2 = k^2 (x^2 \sin (\alpha+\varphi)^2 - 2xy \sin (\alpha+\varphi). \sin (\alpha-\omega) + y^2 \sin (\alpha-\omega)^2). + h^2 (x^2 \sin \varphi^2 + 2xy \sin \varphi. \sin \omega + y^2 \sin \omega^2).$$

Weil die Ordinaten MP mit dem conjugirten Durchmesser zu DE parallel sind, so hat y immer zwey gleiche entgegengesetzte Werthe, also ist

$$h^2 \sin \varphi . \sin \omega = k^2 \sin (\alpha+\varphi) . \sin (\alpha - \omega).$$

Dies ist die erste Formel des Satzes.

Die Gleichung zwischen x und y ist nun

$$h^2k^2 \sin \alpha^2 = (h^2 \sin \varphi^2 + k^2 \sin (\alpha+\varphi)^2)x^2 + (h^2 \sin \omega^2 + k^2 \sin (\alpha-\omega^2))y^2.$$

Für $y = o$ ist $x = f$, und

$$h^2k^2 \sin \alpha^2 = (h^2 \sin \varphi^2 + k^2 \sin (\alpha+\varphi)^2) f^2.$$

Setzt man in dem zweyten Theile für h^2 seinen Werth durch k^2, so ist

$$h^2 \sin \alpha^2 = \left(\frac{\sin (\alpha+\varphi) . \sin (\alpha-\omega) . \sin \varphi}{\sin \omega} + \sin (\alpha+\varphi)^2\right) f^2.$$

Entwickelt man die Sinus der zusammengesetzten Winkel, so wird der Factor von $f^2 =$

$$\frac{\sin (\alpha+\varphi)}{\sin \omega} (\sin \alpha . \cos \omega . \sin \varphi + \sin \alpha . \sin \omega . \cos \varphi) = \frac{\sin \alpha . \sin (\alpha+\varphi) . \sin (\varphi+\omega)}{\sin \omega}.$$

Solchergestalt ist

$$h^2 \sin \alpha . \sin \omega = f^2 \sin (\varphi+\omega) . \sin (\alpha+\varphi),$$

welches die zweyte Formel des Satzes ist.

Die dritte Formel ist der ersten ganz ähnlich, indem nur die conjugirten Durchmesser HI, KL mit den Durchmessern, DE, FG, vertauscht sind.

37. Man ziehe (Fig. 10.) durch die Endpuncte E, G, der beiden Durchmesser, DE, FG, die mit dem für

HI conjuctirten Durchmeſſer KL parallelen Ee, Gg an CI: es iſt Ee : Gg = Cg : Ce, und die Dreyecke ECe, GCg ſind ſich gleich.

Bew. Es iſt

CE : Ee = ſin CeE : ſin ECe

CE : Ce = ſin CeE : ſin CEe

und Gg : CG = ſin GCg : ſin CgG

Cg : CG = ſin CGg : ſin CgG.

Da W. ECe = DCH; CEe = DCK; CGg = GCK, und ſin CeE = ſin CgG; ſin GCg = ſin GCH iſt, ſo entſteht durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe rechter Hand das Verhältniß ſin GCH × ſin GCK : ſin DCH × ſin DCK. Dieſes iſt gleich dem Verhältniſſe CD² : CG² nach (36. III.), oder dem CE² : CG². Aus den Verhältniſſen linker Hand entſteht das zuſammengeſetzte CE² × Gg × Cg : CG² × Ee × Ce. Da dieſes dem CE² : CG² gleich iſt, ſo iſt das Verhältniß Gg × Cg : Ee × Ce = 1 : 1, oder es iſt Ee : Gg = Cg : Ce.

38. Es ſey (Fig. 11.) HI irgend ein Durchmeſſer, und DT eine berührende in D, welche die verlängerte IH in T ſchneide. Man ziehe DP parallel mit dem zu HI conjugirten Durchmeſſer KL, ſo iſt CP : CH = CH : CT.

Bew. Durch D ziehe man den Durchmeſſer DE, und den zugeordneten FG, ſo iſt DT parallel mit FG. Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen iſt DC = f; HC = h; W. HCD = φ; ICG = DTC = ω; CPD = α; CDP = 180° — (α + φ); CDT = 180° — (φ + ω); alſo $CP = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha} CD$; $CT = \frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\omega} CD$, daher $CP.CT = \frac{\sin(\alpha+\varphi).\sin(\varphi+\omega)}{\sin\alpha.\sin\omega}$ × CD², alſo aus (36. II.) CP . CT = CH². Hieraus iſt CP : PH = IP : PT, und IP : PH = IT : TH.

39. Die verlängerte Ordinate ſchneide die Ellipſe in d, und die berührende daſelbſt die verlängerte CH in T. Es

werde an d der Halbmesser Cd gezogen, so wird für die berührende in d eben so erwiesen, daß CP : CH = CH : CT'. Daher ist CT = CT'. Oder, der Durchschnitt T der berührenden in zwey Puncten, D, d, liegt mit dem Mittelpuncte der Ellipse, und dem Mittelpuncte der Chorde Dd in gerader Linie. (Apollon. Conic. II. 29.)

40. Die berührende in D (Fig. 11.) schneide die conjugirten Durchmesser HI, LK, jenen in T, diesen in t, auf ihren Verlängerungen, und FG sey der conjugirte Durchmesser zu dem durch D gelegten, oder der berührenden parallel: es ist TD × Dt = CG².

Bew. Es ist sin CTD : sin TCQ = CD : TD,
sin CtD : sin tCD = DC : Dt,
und sin CTD = sin ICG = sin GCH;
sin CtD = sin GCK, also ist durch Verbindung beider Proportionen,
sin GCH . sin GCK : sin HCD : sin KCD = CD² : TD × Dt.
Das erstere Verhältniß ist gleich dem CD² : CG², (36. III.) also ist TD × Dt = CG².

41. Durch die Endpuncte des Durchmessers HI ziehe man mit dem conjugirten KL die parallelen HM, IN bis an die in D berührende TDt: es ist MD : DN = HM : IN.

Denn MD : DN = HP : PI = TH : TI = HM : IN. (s. 38.).

42. Von einer Ellipse sind gegeben drey Puncte, M, N, P, (Fig. 12.). und die berührenden in M, N, die Ellipse zu bestimmen.

Die berührenden schneiden sich in T. Zieht man durch T und die Mitte Q der Chorden, MN die gerade TQ, so geht diese, wenn es nöthig, verlängert durch den Mittelpunct der Ellipse (39.). Eben diese Linie halbirt alle mit MN parallelen Chorden, weil eine gerade Linie, welche die parallelen Chorden halbirt, durch zwey Puncte, hier C und Q, bestimmt wird. Sie treffe die Ellipse in D

Ich finde den Satz beym Apollonius nicht. Er dient zur Auflöſung der aſtronomiſchen Aufgabe, den Stillſtandspunct eines Planeten in einer elliptiſchen Bahn zu finden. Keillii Introd. in Aſtron. Lect. XVII.

50. In den Scheitelpuncten der großen Axe, A, B, ſeyn die ſenkrechten, AD, BE, auf dieſelbe errichtet, welche die berührende TM in D, E, treffen; es iſt $AD \times BE = bb$. (Fig. 13.).

Bew. Es iſt $CT = \frac{CA^2}{CP}$ aus (30.), alſo $AT = CA\left(\frac{CA}{CP} - 1\right)$; $BT = CA\left(\frac{CA}{CP} + 1\right)$, und $AT \times BT = \frac{CA^2}{CP^2}(CA^2 - CP^2)$, oder $AT \times BT = \frac{a^2}{x^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2v^2}{x^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 \operatorname{tg}\varphi^2$, aus (4 u. 15.). Ferner iſt $AD = AT \cdot \operatorname{tang}\omega$; $BE = BT$, $\operatorname{tg}\omega$, alſo $AD \times BE = AT \cdot BT \cdot \operatorname{tang}\omega^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 \cdot \operatorname{tang}\varphi^2 \times \operatorname{tang}\omega^2 = b^2$, (15.).

Apollonius hat den Satz allgemein für jeden Durchmeſſer erwieſen. L. III. prop. 42. Anſtatt des Quadrats der halben kleinen Axe iſt nur das Quadrat des conjugirten Halbmeſſers zu ſetzen. Nach der hier gebrauchten Methode kann der allgemeinere Satz, mit Zuziehung 36. I. erwieſen werden. Der Winkel CPM iſt daſelbſt α, CA iſt h, und ſtatt b iſt k zu ſetzen. Der beſondere Satz iſt wegen der Verbindung mit dem Satz (49.) merkwürdig.

51. Der Winkel, welchen die von F oder G nach den Puncten D, E gezogenen geraden Linien in Fig. 13. mit einander machen, iſt ein Rechter. Apollonius, B. III. S. 45. Der Satz folgt aus den Werthen von AD und BE, verbunden mit denen von AG und BG. Es iſt

$AD = AT \times \text{tang}\,\omega = \frac{a(a-x)}{x}\,\text{tg}\,\omega$; $BE = BT \times \text{tang}\,\omega = \frac{a(a+x)}{x}\,\text{tg}\,\omega$, (31.).

52. Es sind wie vorher, F, G, die Brennpuncte, T, Q, die Puncte, wo die berührende MT und die Normale MQ die Axe treffen; es ist $TG:TQ = TC:TF$. (Fig. 13.).

Erhellt aus den Werthen dieser Linien.

53. Man ziehe aus C an die Puncte H, K, wo die senkrechten FH, GK auf die berührende sie treffen, die geraden CH, CK, so ist CH mit GM, und CK mit FM parallel. (Fig. 13.).

Bew. Es ist $TM:TH = TQ:TF = TG:TC$ (52.), also sind GM, CH parallel. Eben so ist $TK:TM = TG:TQ = TC:TF$, daher KC und MF parallel.

54. Es ist $CH = CK = CA$.

Denn $TF:TC = TM:CK$, das ist $\frac{aa}{x} + e : \frac{aa}{x} = a + \frac{e}{a}x : CK$, also $CK = a$. Eben so ist $TG:TC = GM:CH$, das ist, $\frac{aa}{x} - e : \frac{aa}{x} = a - \frac{ex}{a} : CH$, also $CH = a$.

55. Ein ganz geometrischer Beweis des Satzes (54.) ist folgender. An die Ellipse AMB (Fig. 14.) ist in M die berührende Tt gezogen, und an M aus den Brennpuncten F, G die geraden FM, GM, die nach D und E verlängert werden bis an die gleichfalls verlängerten Perpendikel GK, FH auf die berührende. Wegen der gleichen Winkel, FMH, GMK, HME, KMD, ist $FM = ME$; $GM = MD$, also $FD = AB$, und $GE = AB$. Man ziehe aus dem Mittelpuncte C die CH und CK, so ist,

weil FH = HE, und GK = KD, ſo wie FC = CG iſt, CH parallel mit GME und = ½ GE. Eben ſo iſt CK parallel mit FMD, und = ½ FD. Das iſt, CH = CK = AC.

56. Iſt die große Axe der Länge und Lage nach gegeben, alſo auch der Mittelpunct, ſo ergiebt ſich hieraus die Conſtruction der Ellipſe, welche eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt. Die Forderung kann unmöglich ſeyn.

Sind bloß die Länge der großen Axe und der Mittelpunct gegeben, dazu aber noch zwey gerade Linien, die von der Ellipſe berührt werden ſollen, ſo beſchreibe man aus C mit der halben Axe einen Kreis, welcher auf jeder der berührenden zwey Puncte, wie H, K, angiebt, wenn die Forderung anders möglich iſt. Die Perpendikel auf die berührenden in den Durchſchnittspuncten mit dem Kreiſe beſtimmen die Brennpuncte, und dadurch ſowohl die Lage der großen Axe als die Größe der kleinen.

57. Dieſes ſind die wichtigſten und merkwürdigſten Eigenſchaften der Ellipſe. Die Verhältniſſe an den Abſchnitten zugeordneter Linien bey irgend einer Lage der Axen der Coordinaten werden aus der allgemeinen Gleichung für alle drey Kegelſchnitte in dem Artikel, worin von dieſen Linien allgemein gehandelt wird, hergeleitet werden, da ſie ihnen allen ganz gemein ſind.

Die Rectification und Quadratur der Ellipſe wird in den Artikeln, die dazu überhaupt die Methoden angeben, gezeigt werden. Die Formel für den Halbmeſſer der Krümmung in dem Artikel, Krümmungskreis.

Ellipſen höherer Art (elliptoides) ſind krumme Linien, die durch die Gleichung, $ay^{m+n} = bx^m(a - x^n)$, wenn m und n größer als 1 ſind, beſtimmt werden. Man ſollte noch hinzuſetzen, daß m und n beide ungerade Zahlen ſeyn, damit dieſe höhere Gattung keine ins Unendliche wachſende Ordinaten haben könne, und daß, wie bey der Apolloniſchen Ellipſe, die Abſciſſen, zu welcher mögliche Ordinaten gehören, nicht über eine gewiſſe Gränze, hier a, ſich erſtrecken. Sie können aus einem Kegel höherer Art,

wie die Ellipse aus dem gemeinen Kegel, geschnitten werden, wenn statt des Kreises die Linie genommen wird, deren Gleichung ist $y^{m+1} = x^m(a-x)$. Es wird nicht der Mühe werth seyn, Untersuchungen über diese Linien anzustellen. Man sehe de la Hire in dem Appendice ad sectiones conicas, und Wolf in den elementis Analyseos §. 522. seqq.

Ellipsimber, (ellipsis imbricata,) hohl gebogene Ellipse, ist eine krumme Linie von doppelter Krümmung auf der Oberfläche eines senkrechten elliptischen Cylinders, deren Abscissen Bogen des elliptischen Umfanges von der Grundfläche dieses Körpers, und die Ordinaten, welche auf die Grundfläche senkrecht stehen, den Ordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung gleich sind, an welcher die Abscissen mit denjenigen zu den Bogen des elliptischen Umfanges übereinkommen. Diese zweyte Curve gehe durch die Endpuncte einer der Axen. Die Durchschnittslinie einer Kugelfläche und der Oberfläche eines senkrechten Cylinders, der nach seinem ganzen Umfang durch die Kugel gesteckt ist, so aber, daß die Axe nicht durch ihren Mittelpunct geht, ist eine Ellipsimber. Frezier traité de Stéréotomie. T. I. pag. 54. Vergl. Cykloimber.

Ellipsograph, (Compas elliptique), ein Instrument, um eine Ellipse durch stetige Bewegung eines Stiftes zu beschreiben. Es kann auf verschiedene Art eingerichtet werden. Das einfachste ist ein Faden, dessen Länge man der großen Axe gleich nimmt. Die Endpuncte befestigt man in den Brennpuncten. Mit einem Stifte spannt man den Faden, und führt so die beiden Theile desselben rings um die Brennpuncte herum. Dieses Verfahren gründet sich auf die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Linien aus den Brennpuncten an irgend einen Punct des Umfanges der großen Axe gleich ist.

Anstatt des Fadens kann man auch zwey Liniale mit einem der Länge nach gemachten Einschnitt gebrauchen. In der Figur 14. zu Ellipse (54.) sind FD, GE, die

Ich finde den Satz beym Apollonius nicht. Er dient zur Auflöſung der aſtronomiſchen Aufgabe, den Stillſtandspunct eines Planeten in einer elliptiſchen Bahn zu finden. Keillii Introd. in Aſtron. Lect. XVII.

50. In den Scheitelpuncten der großen Axe, A, B, ſind die ſenkrechten, AD, BE, auf dieſelbe errichtet, welche die berührende TM in D, E, treffen; es iſt $AD \times BE = bb$. (Fig. 13.).

Bew. Es iſt $CT = \frac{CA^2}{CP}$ aus (30.), alſo $AT = CA\left(\frac{CA}{CP} - 1\right)$; $BT = CA\left(\frac{CA}{CP} + 1\right)$, und $AT \times BT = \frac{CA^2}{CP^2}(CA^2 - CP^2)$, oder $AT \times BT = \frac{a^2}{x^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 \operatorname{tg}\varphi^2$, aus (4 u. 15.). Ferner iſt $AD = AT \cdot \operatorname{tang}\omega$; $BE = BT \cdot \operatorname{tg}\omega$, alſo $AD \times BE = AT \cdot BT \cdot \operatorname{tang}\omega^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 \cdot \operatorname{tang}\varphi^2 \times \operatorname{tang}\omega^2 = b^2$, (15.).

Apollonius hat den Satz allgemein für jeden Durchmeſſer erwieſen. L. III. prop. 42. Anſtatt des Quadrats der halben kleinen Axe iſt nur das Quadrat des conjugirten Durchmeſſers zu ſetzen. Nach der hier gebrauchten Methode kann der allgemeinere Satz, mit Zuziehung 36. I. erwieſen werden. Der Winkel CPM iſt daſelbſt α, CA iſt h, und ſtatt b iſt k zu ſetzen. Der beſondere Satz iſt wegen der Verbindung mit dem Satz (49.) merkwürdig.

51. Der Winkel, welchen die von F oder G nach den Puncten D, E gezogenen geraden Linien in Fig. 13. mit einander machen, iſt ein Rechter. Apollonius, B. III. S. 45. Der Satz folgt aus den Werthen von AD und BE, verbunden mit denen von AG und BG. Es iſt

kreise. Weil AD = AE, so wie AB = AC, so ist AD : AE = AB : AC, und ED parallel mit CB, (Dreyeck, 6.). Man verlängere FD bis G auf CB, so ist FG senkrecht auf CB, wie FD auf ED. In den ähnlichen Dreyecken FED, FCG ist FG : GD = FC : EC = FC : DB. Nun beschreibt der Punct F den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser CF ist. Die Ordinate FG an diesem Kreise verhält sich zu der Ordinate an der von D beschriebenen Linie durchgehends wie der Halbmesser FC zu einer gegebenen DB; also ist die von D beschriebene Linie eine Ellipse, deren halbe Axen FC und BD sind.

Den Punct D kann man auch auf der andern Seite von B nehmen.

Von den Instrumenten, Ellipsen und die andern Kegelschnitte zu beschreiben, ist eine umständliche Beschreibung in van Schooten Tractatus de organica conicarum sectionum in plano descriptione, befindlich, in der Sammlung: Exercitationes mathematicae, Lugd. 1657.

Beschreibung eines Ellipsograph, ꝛc. (von G. F. Parrot). Gotha 1794.

Ellipsoid, wird von einigen statt Sphäroid gebraucht, nicht ganz schicklich, weil der Ausdruck eine ellipsenähnliche Figur bedeutet, da er einen Körper anzeigen soll, der durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen entsteht. Da Sphäroid allgemein jeden Körper bedeuten kann, der durch die Umdrehung einer in sich wiederkehrenden rundlichen Figur entsteht, so mag Ellipsoid kurz das elliptische Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipse erzeugte, bedeuten.

Ellipticität ist der Quotient des Unterschiedes der Axen einer Ellipse durch die große (oder auch die kleine) Axe dividirt. Je größer dieser ist, desto mehr entfernt sich die Ellipse von einem Kreise über der großen Axe als Durchmesser. Der Ausdruck ist noch wenig gebräuchlich, aber ganz schicklich. Auf deutsch hieße es die Abplattung, wie

in der Geographie der Quotient des Unterschiedes der beiden Haupt-Durchmesser der Erde dividirt durch den Durchmesser des Aequators ihre Abplattung heißt. Der Abstand der Brennpuncte durch die große Axe dividirt, was man in der Astronomie die Excentricität nennt, dient auch die Abweichung einer Ellipse von dem Kreise über der großen Axe zu messen.

Elliptoides, s. Ellipse höherer Art.

Endecagonalzahl, eilfeckige Zahl, ist eine Polygonalzahl, von der Form $\frac{9nn-7n}{2}$ als die Summe von n Gliedern der arithmetischen Reihe 1, 10, 19, etc.

Endecagonum, ein ordentliches Vieleck von eilf Seiten.

Endlich ist jede Größe, die sich mit der Einheit unmittelbar oder mittelbar vergleichen läßt. Jede zählbare Menge ist endlich; jede begränzte Linie, Fläche oder körperliche Ausdehnung ist endlich. Der Abstand der Sonne von einem Nebelfleck ist endlich, ob er gleich durch unsere Mittel zur Ausmessung der Abstände nicht meßbar ist. Das Unendliche läßt sich weder mit einer abstracten, noch einer sinnlichen Einheit vergleichen; aber wohl kann man ein Unendliches mit einem andern derselben Gattung vergleichen.

Eine Größe kann aus unendlich vielen Theilen bestehen, und dennoch endlich seyn. Eine geometrische abnehmende Progression ins Unendliche fortgesetzt, hat eine endliche Summe. Daher ist der Raum zwischen der logarithmischen Linie und ihrer Asymptote auf der Seite der abnehmenden Ordinaten endlich, ob er gleich unendlich lang ist. Die Körper, die durch die Umdrehung einer Hyperbel und Conchoide um ihre Asymptote entstehen, haben einen endlichen Inhalt, ob sie gleich unendlich in die Länge ausgedehnt sind. S. Conchoide und Cubirung.

Enneagonalzahl, neuneckige Zahl, ist eine Polygonalzahl, von der Form $\frac{7nn-5n}{2}$, als die Summe von n Gliedern der arithmetischen Progression 1, 8, 15, etc.

Enneagonum, ein ordentliches Vieleck von neun Seiten.

Entgegengesetzte Größen sind solche, bey welchen außer ihrer Quantität noch eine entgegengesetzte Beziehung, in Absicht auf Addition und Subtraction, betrachtet wird. Dieses kann auf zweyerley Art geschehen.

Erstlich, es sey der Werth einer Größe der Unterschied zweyer Größen, die eintheilig oder mehrtheilig sind, als $A = a + b - c - d$, so sind die Theile, a, b, den Theilen der abgezogenen Größe, c, d, entgegengesetzt, jene aber sind gleichnamig, so wie diese. Z. B. Schulden sind dem baaren Cassenvorrath und den activen Schuldforderungen entgegengesetzt bey der Berechnung des Vermögenstandes. So sind Steigen und Fallen, vorwärts- und rückwärts gerichtete Bewegung, entgegengesetzte Größen, die bey der Berechnung des zurückgelegten Weges mit entgegengesetzten Vorzeichen zusammengenommen werden. Diejenigen Größen, von welchen die ihnen entgegengesetzten abgezogen werden, nennt man positive, weil man setzt, daß der Werth der Größe A, die aus der Verbindung der entgegengesetzten Größen entsteht, ihnen gleichnamig sey. Die abzuziehenden Größen nennt man negative. Fände sich, daß diese in der Quantität jene übertreffen, so legt man A einen negativen Werth bey, nämlich in Beziehung auf die Beschaffenheit, die man von A vorausgesetzt hatte. Nimmt man aber für A gleich Anfangs diese Beschaffenheit an, so ist, was vorher negativ war, positiv, und das Positive wird in Negatives verwandelt. Wer sein baares Vermögen berechnete, und fände, daß seine Schulden mehr betragen als Cassenvorrath und Forderungen, der hätte ein negatives Vermögen. Hätte er aber das Resultat gleich als Schuld vorausgesetzt, so fand er es positiv.

So verhält es sich auch mit den Werthen einer Gleichung, als $x^3 - 10x^2 + 12x - 140 = y$. Man nennt sie positiv, wenn die mit + bezeichneten Termini mehr ausmachen als die, welche — vor sich haben, z. B. wenn $x = 12$, so ist $y = +292$. Man nennt die Werthe negativ, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt wird, z. B. wenn $x = 5$ ist, wodurch $y = -205$ wird. Ueberhaupt muß man bey allen Progressionen von Größen, die aus Theilen zusammengesetzt werden, sie in Absicht der gegenseitigen Beschaffenheit dieser Theile unterscheiden. Es ist gleichgültig, welche Gattung von Theilen man positiv, und welche man negativ nennen will. So könnte man statt des vorher gegebenen Werthes von y, ohne die Quantität zu ändern, auch annehmen $140 - 12x + 10x^2 - x^3 = y$, wodurch der Werth von $y = +205$ oder positiv für $x = 5$ wird, aber $y = -292$ oder negativ für $x = 12$. Eine arithmetische Progression wird erhalten, wenn entweder derselbe Unterschied zu einer gegebenen Größe folgweise addirt oder subtrahirt wird. Die Glieder sind in dem letzten Falle *negativ*, wenn die Vielfachen des Unterschiedes die gegebene Größe übertreffen. Z. B. der Unterschied = 3; die gegebene Größe = 7, so entsteht durch Addition die Reihe; 7; 10; 13; 16; 19, etc. durch Subtraction die Reihe 7; 4; 1; — 2; — 5; — 8, — etc. Beide Reihen machen durch das gemeinschaftliche Glied, 7, nur eine Reihe aus, in welcher die Glieder auf gleiche Art gebildet werden, in der einem Folge durch Addition, in der andern durch Subtraction.

Diese Anwendung des Entgegengesetzten ist inzwischen nur die unwichtigere, wiewohl in allen Lehrbüchern bloß diese gelehrt wird, zufolge der Erklärung, daß entgegengesetzte Größen solche seyn, die unter der Bedingung betrachtet werden, daß sie sich einander vermindern, und daß die eine durch einen ihr gleich großen Theil der andern aufgehoben wird. Man gründet hierauf auch die Rechnung mit Größen, deren Vorzeichen entgegengesetzt sind. Dieses macht aber Dunkelheit, daher auch diese an sich so leichte Rechnung (s. Buchstabenrechnung) von einigen mit Mühe

und Kunst dargethan wird. Dieses Verfahren kann sogar die unrichtige Vorstellung veranlassen, daß man entgegengesetzte oder gleichnamige Größen mit Rücksicht auf ihre Beziehung in einander multipliciren könne, wenn man bey den Vorzeichen + und — zugleich an die zur Erläuterung gegebenen Beyspiele denkt, sich z. B. die Multiplication von + 8 in — 3 als Multiplication von 8 Thlr. Vermögen in drey Thaler Schulden vorstellt. In der That ist die bisher erklärte Art der Entgegensetzung nur Vertheilung der Werthe einer zusammengesetzten Größe unter zweyerley Rubriken.

Zweytens kann man auch die Größen in einer Verbindung den ihnen gleichartigen in einer andern ähnlichen Verbindung entgegensetzen. Diese Entgegensetzung ist die eigentlich wichtige, wodurch die analytischen Sätze und Auflösungen Allgemeinheit erhalten, und oft viele Fälle aus einem einzigen bloß durch gehörige Vertauschung der Vorzeichen hergeleitet werden können. Die Alten kannten den Gebrauch dieser Entgegensetzung gar nicht. Jeder Fall, der sich durch eine andere Lage einer oder mehrerer Linien und Winkel unterscheidet, ward von ihnen besonders betrachtet. Das macht aber Weitläuftigkeit, und ist ermüdend, wenn ein Beweis oder eine Auflösung mit wenigen Veränderungen oft wiederholt wird, wie in den Büchern des Apollonius de sectione rationis, de sectione determinata, de locis planis.

Bey jeder Verbindung von Größen, einige ganz einfache ausgenommen, sind immer mehrere Fälle vorhanden, die sich nur in der gegenseitigen Beziehung der Größen durch Addition und Subtraction derselben, ihrer Producte, Quotienten und Wurzeln unterscheiden. Alle Abänderungen einer Verbindung, worin eine oder mehrere Größen jene Beziehung durchaus ändern, sind nicht wesentlich verschiedene Verbindungen, sondern nur verwandte Fälle einer und derselben Art von Verbindung. Es genügt, die Rechnung für einen dieser Fälle zu machen, um die Resultate auch für die andern zu gebrauchen, wenn die Vertauschung der Vorzeichen + und — gehörig vorgenommen wird.

Z. B. die Potenzen von $a + b$ und $a - b$ unterscheiden sich bloß darin, daß b entgegengesetzte Werthe hat, daher die ungeraden Potenzen von b in den Formeln für beide entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, (s. Buchstabenrechnung). Es ist das Product $(a + b)^2 (a - b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, und $(a - b)^2 (a + b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$, beide nur in den Vorzeichen von b und b^3 verschieden.

Ein Courier A habe die Geschwindigkeit a, ein anderer B die Geschwindigkeit b, nach einerley Richtung; der Abstand der Örter, von welchen sie ausgehen, sey c; der erstere gehe m Stunden früher aus, als B, und x sey der Weg des A, bis er von B eingeholt wird, so ist $x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$, und $x = \frac{a(c-mb)}{b-a}$, wenn A m Stunden später als B abgeht, wobey $c > mb$ seyn muß, wofern die Antwort für die Frage brauchbar seyn soll. Geht A dem B entgegen, und früher ab, so ist $x = \frac{a(c+mb)}{b+a}$, und, wenn er später abgeht, $x = \frac{a(c-mb)}{b+a}$.

Alle diese vier Fälle sind nur Abänderungen derselben Aufgabe; man mag jeden derselben wählen, um die Auflösungen der andern aus der für den einen Fall gefundenen herzuleiten. Welchen man auch nehme, so werden alle Größen bloß in Absicht auf ihre Quantität betrachtet, und den Umständen des Falles nach gehörig mit einander verbunden. Ist es der erste, so haben die Geschwindigkeiten b und a in dem Nenner des Werthes von x entgegengesetzte Vorzeichen, ob sie gleich nach einerley Richtung genommen werden. Allein hier geschieht auch keine Entgegensetzung der verbundenen Größen. Um den vierten Fall aus dem ersten herzuleiten, müssen m, a, x entgegengesetzt, in Absicht auf dieselben Größen in dem ersten Falle, genommen werden. Das giebt $-x = \frac{-a(c-mb)}{b+a}$ und wenn man unter x und a die Quantität mit Voraussetzung

der Richtung versteht, $x = \frac{a(c-mb)}{b+a}$. Der Weg des B ist in dem ersten Falle $= \frac{b(c+ma)}{b-a}$, in dem vierten $= \frac{b(c+ma)}{b+a}$. Man sehe die dritte Aufgabe, in dem Artikel, Gleichung I. Die 9te Aufgabe dess. Art. zeigt auch, wie der Fall, da das Wasser durch die eine Röhre aus dem Behälter fließt, aus demjenigen hergeleitet wird, da das Wasser durch beide hineinfließt, und wie eine negative Antwort für die gesuchte Größe die Voraussetzung der Frage berichtigt.

In dem Dreyecke ABC (Fig. 16.) soll aus AB, AC und dem Winkel A der Winkel B gefunden werden. Man fälle das Perpendikel CD auf AB, so ist, wenn B spitz ist, $\text{tang } B = \frac{AC.\sin A}{AB - AC.\cos A}$, und wenn B stumpf ist, $\text{tang CBD} = \frac{AC \sin A}{AC \cos A - AB}$. Weil die Segmente DB in beiden Fällen entgegengesetzte Lage haben, so bekommen die Nenner entgegengesetzte Zeichen. Diese Nenner sind die Werthe von BD. Gebraucht man für den zweyten Fall die erste Formel, so zeigt die Negation des Nenners, und daher der Tangente, an, daß der innere Winkel, der zu der Tangente gehört, stumpf ist.

In derjenigen Verbindung von Größen, die zum Grunde für alle übrigen verwandten Verbindungen gelegt wird, müssen alle Größen als positiv betrachtet werden, das heißt, ihre Symbole bezeichnen bloß die Quantität, und die Addition und Subtraction wird durch die Vorzeichen + und — angedeutet, so daß + ein wirkliche Vergrößerung, und — eine wirkliche Verminderung anzeigt. Es kann hier keine negative Größe durch die Subtraction des Größern von dem kleinern entstehen, weil der Fall in Absicht desjenigen, was addirt und subtrahirt wird,

und was eine Summe oder Differenz ist, ganz bestimmt seyn soll. Man hat hier bloß additive und subtractive Größen, nicht positive und negative. Positiv heißen sie in Beziehung auf andere Fälle, nicht in dem vorliegenden Falle für sich allein genommen.

Diejenigen Größen, welche in einer mit dem zum Grunde der Rechnung gelegten Falle, dem Normalfalle, verwandten Verbindung ihre Beziehung ändern, sind negativ, nicht in Rücksicht auf die mit ihnen verbundenen Größen, sondern in Rücksicht auf die mit ihnen gleichnamigen in jenem ersten Falle.

Eine Änderung der Beziehung einer Größe zieht eine durchgängige Vertauschung ihrer Vorzeichen in der ganzen Rechnung nach sich. Wo sie in dem zum Grunde gelegten Falle addirt ward, wird sie nun subtrahirt, und umgekehrt. Wo sie Factor war, ändert das Product sein Vorzeichen; weil der Factor es ändert. Eine ungerade Anzahl negativer Factoren verändert das Vorzeichen des Products, eine gerade Anzahl aber nicht, da je zwey negative oder mit — vergesellschaftete Factoren ein Product mit demselben Vorzeichen geben, was positive an ihrer Stelle bekommen. (Buchstabenrechnung, 14.). Daher behalten die geraden Potenzen einer negativen Größe das Vorzeichen, welches sie in dem zum Grunde gelegten Falle hatten; die ungeraden aber ändern es. Wird durch die Negation einer Größe ein Dividendus oder ein Divisor negativ, so wird der Quotient es auch; werden beide negativ, so bleibt der Quotient positiv und behält sein Vorzeichen; denn das Product des Quotienten in den Divisor muß dasselbe Vorzeichen mit dem Dividendus erhalten.

Giebt die Rechnung ein negatives Resultat, so zeigt dieses an, daß die gefundene Größe in einer entgegengesetzten Beziehung gegen diejenige zu nehmen ist, die man ihr beygelegt hatte. Da man nicht immer bestimmen kann, wie der Fall, den man behandelt, beschaffen sey, so muß das Resultat ergeben, nicht allein, wie groß die gesuchte Größe sey, sondern auch, in welcher Beziehung man sie

zu nehmen habe, durch die Beschaffenheit des Vorzeichens ihres Werthes.

Wenn man nicht vollkommen deutlich einsieht, daß die Übertragung der Rechnung von einem Falle auf einen andern zulässig ist, so muß man sie für diesen Fall besonders anstellen, um die Übertragung zu rechtfertigen, oder ihre Unzulässigkeit zu erweisen. Die Evidenz muß durch die Allgemeinheit der Rechnungen nicht leiden.

Die analytische Behandlung der Geometrie hat das eigenthümliche, daß sie die Rechnung nur für einen gewissen Fall einer Verbindung von Linien und Winkeln ausführt, und das Resultat auf alle andere ähnliche Verbindungen, die nur in der Lage der Linien und Zusammensetzung der Winkel unterschieden sind, anwendet, indem diejenigen Linien und Winkel, welche eine entgegengesetzte Lage in Beziehung auf jenen Normalfall erhalten, negativ werden, und deshalb ihre Vorzeichen ändern. Beyspiele davon kommen in diesem ganzen Werke vor. Insbesondere sehe man die Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie und der Geometrie auf die Algebra. Auch der Artikel, Coordinaten, zeigt, daß man bey der Veränderung derselben die Werthe der neuen aus den vorigen durch eine einzige Rechnung für alle Fälle bestimmen könne.

In den trigonometrischen Formeln werden alle Abänderungen der Verbindung derjenigen Größen, die zu einer Formel gehören, bloß durch die Anwendung des Entgegengesetzten auf die trigonometrischen Functionen hergeleitet. In dem Normalfalle werden alle Winkel spitz genommen, sie mögen unter einander eine Lage, welche es seyn mag, haben. Dadurch sind alle trigonometrische Functionen positiv.

Die analytische Dioptrik bietet sehr viele und lehrreiche Beyspiele der Übertragung der Rechnung von einem Falle auf andere verwandte dar, da hier eine große Menge von Verbindungen gleichnamiger Größen Statt hat. Schon bey einem einzelnen Linsenglase sind manche Abänderungen möglich. Es sey das Glas auf beiden Seiten convex, der Halbmesser der Vorderfläche $= f$, der Hinter-

Z. B. die Potenzen von $a + b$ und $a - b$ unterscheiden sich bloß darin, daß b entgegengesetzte Werthe hat, daher die ungeraden Potenzen von b in den Formeln für beide entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, (s. Buchstabenrechnung). Es ist das Product $(a + b)^3 (a - b) = a^4 + a^3b - ab^3 - b^4$, und $(a - b)^3 (a + b) = a^4 - a^3b - ab^3 + b^4$, beide nur in den Vorzeichen von b und b^3 verschieden.

Ein Courier A habe die Geschwindigkeit a, ein anderer B die Geschwindigkeit b, nach einerley Richtung; der Abstand der Örter, von welchen sie ausgehen, sey c; der erstere gehe m Stunden früher aus, als B, und x sey der Weg des A, bis er von B eingeholt wird, so ist $x = \frac{a(c + mb)}{b - a}$, und $x = \frac{a(c - mb)}{b - a}$, wenn A m Stunden später als B abgeht, wobey $c > mb$ seyn muß, wofern die Antwort für die Frage brauchbar seyn soll. Geht A dem B entgegen, und früher ab, so ist $x = \frac{a(c + mb)}{b + a}$, und, wenn er später abgeht, $x = \frac{a(c - mb)}{b + a}$.

Alle diese vier Fälle sind nur Abänderungen derselben Aufgabe; man mag jeden derselben wählen, um die Auflösungen der andern aus der für den einen Fall gefundenen herzuleiten. Welchen man auch nehme, so werden alle Größen bloß in Absicht auf ihre Quantität betrachtet, und den Umständen des Falles nach gehörig mit einander verbunden. Ist es der erste, so haben die Geschwindigkeiten b und a in dem Nenner des Werthes von x entgegengesetzte Vorzeichen, ob sie gleich nach einerley Richtung genommen werden. Allein hier geschieht auch keine Entgegensetzung der verbundenen Größen. Um den vierten Fall aus dem ersten herzuleiten, müssen m, a, x entgegengesetzt, in Absicht auf dieselben Größen in dem ersten Falle, genommen werden. Das giebt $-x = \frac{-a(c - mb)}{b + a}$ und wenn man unter x und a die Quantität mit Voraussetzung

verglichen, so sind diejenigen Coefficienten negativ, die ein anderes Vorzeichen als in jener Formel haben.

Die negativen Wurzeln einer Gleichung werden in dem Art. Gleichung erklärt, wo ihre Verhältnisse gegen die positiven Wurzeln in allen Fällen der Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade gezeigt werden. Die negativen Wurzeln einer Gleichung sind die positiven einer andern Gleichung, welche zur vollständigen Beantwortung der Aufgabe nöthig wäre, wenn man das Negative umgehen, und alle Größen bloß nach ihrer Quantität betrachten wollte. Durch die Veränderung der Vorzeichen in den ungeraden Potenzen wird die gegebene Gleichung in jene andere verwandelt. Der Gebrauch der negativen Wurzeln vereinigt beide Gleichungen in eine einzige.

Negative Wurzeln können auch positive Werthe für einen andern Fall der Aufgabe enthalten. Z. B. Es sey I. $x^2 - y^2 = xy$, und II. $x + y = xy$. Wenn I. durch II. dividirt wird, so wird erhalten, $x - y = 1$. Dieses giebt die Gleichungen,

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ und } y^2 - y - 1 = 0.$$

Die Wurzeln der erstern sind $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; der zweyten, $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Der erstere Werth von x und von y thun der Frage auf die bestimmte Art, wie sie abgefaßt ist, Genüge. Der zweyte Werth von y ist negativ. Dieser giebt mit $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ die Antwort auf eine verwandte Frage, wenn $y - x = xy$ seyn soll. Es seyn nämlich die beiden Bedingungen: I. $y^2 - x^2 = xy$; II. $y - x = xy$, so sind die Gleichungen, I. $x^2 - 3x + 1 = 0$; II. $y^2 + y - 1 = 0$.

Die Wurzeln der zweyten sind den Werthen von y in der obigen Gleichung entgegengesetzt, so daß die dort für den bestimmten, wörtlichen Sinn der Frage unbrauchbare negative Wurzel y hier positiv nach dem Sinn der veränderten Frage ist. Die beiden andern Combinationen der Wurzeln beider Gleichungen erfüllen die Forderung nicht.

Ein anderes sehr erläuterndes Beyspiel wird in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie. 12. Aufg. angetroffen.

Seit Descartes bis zu Wolfs Zeiten nannten manche die negativen Wurzeln falsche Wurzeln, weil sie sie entweder für ganz unbrauchbar (in dem wörtlichen eingeschränkten Sinne der Frage) hielten, oder auch, wiewohl auf eine zweydeutige und mißverständliche Art, durch den Ausdruck, wahre Wurzeln, diejenigen der gesuchten Größen bezeichneten, welche der Aufgabe nach den Voraussetzungen derselben Genüge thun, durch falsche aber diejenigen, welche in einem andern Sinne es leisten. Die Anwendung auf die Geometrie zeigte ihnen, daß die falschen Wurzeln so gut zur vollständigen Auflösung gehören als die wahren.

Man gebraucht für negative Größen bisweilen den paradoxen Ausdruck, weniger oder kleiner als Nichts. In der zweyten vorher erklärten Bedeutung negativer Größen läßt sich dieser Ausdruck nicht anwenden: allein bey den Gliedern einer Reihe, die durch fortgesetzte Verminderung Null, und dann negativ werden, hat er einen guten Sinn. So wie man ganz richtig sagt, $a-b$ *ist kleiner als* a, wenn $b<a$ ist, so sagt man auch analogisch richtig, $a-(a+b)$ oder $-b$, ist kleiner als a, wenn auch der Unterschied $-b$ absolut genommen größer ist als a. So ist auch beziehungsweise $-(a+b)$ kleiner als $-a$. Dieser Sprachgebrauch verhilft zu allgemein ausgedruckten Sätzen, und erspart die Aufzählung aller einzelnen Fälle. Die Hinzusetzung von $+a$ giebt Größeres, die Hinzusetzung von $-a$ oder Abziehung von $+a$ giebt Kleineres, wenn gleich der Quantität nach das umgekehrte erfolgt, nämlich in dem Falle, wenn die Hinzusetzung zu einer negativen Größe geschieht.

Die Veränderung einer Größe wird also bloß nach der Beschaffenheit der Veränderung benahmt. Sie ist eine Zunahme, wenn die Veränderung das Vorzeichen $+$ hat oder positiv ist; sie ist eine Verminderung, wenn diese das Vorzeichen $-$ hat oder negativ ist. Hat man eine Folge von Größen, nach irgend einer analytischen Form der Zusammensetzung, so werden diese als wachsend betrachtet, wenn zu einer vorangehenden y eine Größe $+\Delta y$ ge-

setzt wird, um die nächstfolgende y' zu erhalten; als abnehmend, wenn zu y die Größe $-\Delta y$ gesetzt wird, um y' zu bekommen; obgleich, wenn y negativ ist, die Größen in jenem Falle abnehmen, in diesem aber zunehmen.

In der Differentialrechnung zeigt ein positiver Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ an, daß beide Größen x und y mit einander der Quantität nach wachsen oder abnehmen, wenn beide gleichnamige (beide positiv oder beide negativ) sind. Ein negativer Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ zeigt an, daß die eine der x und y der Quantität nach abnimmt, wenn die andere zunimmt, in dem Falle, da beide gleichnamig sind. Sind sie aber ungleichnamig, so zeigt der negative Quotient an, daß sie zugleich wachsen und abnehmen, z. B. Kreisbögen und Cosinus.

Principles of Algebra, by W. Frend. London 1796. Der Verfasser sucht das Studium der Algebra durch die Ausschließung der negativen Größen zu erleichtern. Francis Maseres hat dazu einen Anhang geliefert, der stärker ist als die Schrift selbst, 1798. Er stimmt mit Frend überein.

Neue Erörterungen über Plus und Minus ꝛc. von F. G. Busse. Erste Abtheilung. Cöthen 1801. in 8. Der Verf. will die Beziehungen der zu einer Verbindung gehörigen Größen durch die Vorzeichen + und — mit bezeichnen. Die Schrift ist zum Theil gegen meine Abhandlung über die Lehre von den entgegengesetzten Größen, in dem Hindenburgischen Archiv der Mathematik, Heft III. IV. gerichtet. Das daselbst und hier erklärte Verfahren bey der Anwendung entgegengesetzter Größen ist bisher in der That von den vorzüglichsten Mathematikern fast immer befolgt, nur ist nirgends die Theorie desselben gehörig auseinander gesetzt, und von ungleichartigen Beymischungen rein dargestellt worden.

Epicykloide ist die krumme Linie, welche ein in der Ebene eines Kreises befindlicher Punct beschreibt, indem dieser Kreis auf dem Umfange eines andern, in derselben Ebene mit ihm liegenden, Kreises sich um seinen Mittelpunct wälzt, so daß die Bogen, die auf beiden Kreisen zwischen zusammengehörigen Berührungspuncten liegen, gleich groß sind. Oder die Bewegung um den Mittelpunct des sich wälzenden Kreises ist so groß als die fortrückende Bewegung auf dem andern, dem ruhenden. Die Wälzung kann auf der convexen (äußern), oder auf der concaven (innern) Seite des unbewegten Kreises geschehen. In dem letztern Falle heißt die Curve eine Hypocykloide, wiewohl man auch häufig diese eine Epicykloide nennt. Alsdann unterscheidet man beide Gattungen durch die Beywörter äußere (oder obere) und innere (oder untere). Der unbewegte Kreis heißt die Grundlinie oder die Basis, der sich wälzende heißt der erzeugende oder beschreibende Kreis. Liegt der beschreibende Punct auf dem Umfange des bewegten Kreises, so ist die Curve eine Epicykloide im engern Verstande; liegt derselbe außerhalb des Kreises, so ist sie eine verkürzte, (curtata), liegt er innerhalb, so ist dieselbe eine gestreckte (elongata). Der beschreibende Punct bewegt sich in allen drey Fällen um einen gewissen Punct, der wiederum sich um den Mittelpunct der Basis bewegt, allein nur in dem erstern Falle ist seine Kreisbewegung gleich der fortrückenden Bewegung des Kreises auf dem Grundkreise; in dem zweyten ist jene größer, in dem dritten kleiner als diese. Es verhält sich hier wie bey der Cykloide, Th. I. S 599. Wir wollen hier nur die eigentliche Epicykloide betrachten. Zuerst ein Satz aus der geometrischen Lehre von der zusammengesetzten Bewegung.

1. Es werde die gerade AB Tab. IX. (Fig. 17.) von einem Puncte gleichförmig beschrieben. Über derselben als Diagonale verzeichne man das Parallelogramm ACBD, so sind AC, AD die relativen Wege nach den Richtungen AC, AD, in welche der absolute Weg AB

zerlegt wird, oder, wenn AB die Geschwindigkeit nach der Richtung AB darstellt, so ist AC die relative Geschwindigkeit nach der Richtung AC, und AD die relative nach AD. Aus den relativen Geschwindigkeiten wird umgekehrt die absolute zusammengesetzt.

Ist Aa der krummlinichte Weg eines Körpers mit der Richtung und Geschwindigkeit AB in A, so sind AC, AD die relativen Geschwindigkeiten nach denselben Richtungen, in welche die nach AB zerlegt wird, so wie umgekehrt diese aus jenen zusammengesetzt wird.

2. Es sey AB (Fig. 18.) der Halbmesser des unbewegten Kreises, CB des bewegten, B der beschreibende Punct. Durch die Wälzung auf jenem komme der Punct d auf D, so daß der Bogen BD = Bd sey. Man ziehe AD, und nehme auf der Verlängerung derselben DE = CB, beschreibe aus E einen Kreis, nehme darauf den Bogen DF = BD, so ist F ein Punct der Epicykloide.

Den Bogen DF dem BD gleich zu machen, bemerkt man, daß bey gleich großen Kreisbogen die Winkel sich umgekehrt wie die Halbmesser verhalten. Also ist ED : AB = BAD : DEF. In der Figur ist AB : DE = 20 : 9, und BFP die Hälfte der Epicykloide, die nach einer Umwälzung des erzeugenden Kreises die Basis trifft, und nach zwanzig Umwälzungen wieder bey dem Puncte B anfängt.

3. Die Halbmesser der Basis und des erzeugenden Kreises verhalten sich wie m : n; der Umfang des erstern Kreises sey = P, des andern = p, so ist m : n = P : p, und nP = mp. Sind m und n ganze Zahlen, so trifft nach m Umläufen der beschreibende Punct wieder in denjenigen Punct der Basis ein, von welchem er ausgieng. In diesem Falle ist die Epicykloide eine algebraische Linie, für welche eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten Statt hat. Ist das Verhältniß m : n irrational, so besteht auch die Gleichung aus unendlich vielen Gliedern, indem der beschreibende Punct nie wieder in den Anfangspunct trifft, und daher die Curve unendlich viele Umgänge um die Basis macht, so daß eine gerade Linie sie in unendlich vielen Puncten treffen kann.

4. Man ziehe die Chorde FD, und nach dem Endpuncte G des Durchmessers DG die Chorde FG: es ist diese die berührende an der Epicykloide in F.

Bew. Der Punct F hat zwey relative Bewegungen, eine nach der Richtung FH senkrecht auf AF, die andere nach FI senkrecht auf EF. Denn so wie der Mittelpunct E seine Bewegung nach der auf AE in E senkrechten Richtung hat, so hat jeder Punct der Ebene des Kreises ebenfalls eine solche, senkrecht auf die den Punct mit A verbindende gerade Linie. Außerdem hat aber wegen der Wälzung auf der Basis, oder der Drehung um E, jeder Punct eine Bewegung senkrecht auf die von ihm nach E gezogene Linie. Die Geschwindigkeit des Punctes F, nach der Richtung FI ist gleich der Geschwindigkeit des Punctes D, und die nach FH verhält sich zu der des Punctes D wie die von F und D beschriebenen Kreisbogen, das ist, wie AF : AD, also ist FH : FI = AF : AD. Man vollende das Pgrm HFIK, so ist FK die absolute Richtung des Punctes F, oder die berührende in F.

Man setze AB = a, CB = b, AF = z.

In dem Dreyeck AEF, dessen Winkel hier alle spitz sind, ist W. AFE = W. HFI des Pgrms FK, und, wenn AF nach f hin verlängert wird, der äußere W. EFf = W. FHK des Pgrms. Denn es ist AFE + EFH = HFI + EFH, wegen der rechten Winkel AFH, EFI.

Da in dem Dreyeck AEF ist $\sin AFE = \frac{AE}{AF} \sin E$,

so ist $\sin HFI$ oder $\sin FHK = \frac{a+b}{z} \sin E$.

Zweytens, in demselben Dreyeck ist $\tang AFE = \frac{AE \cdot \sin E}{EF - AE \cdot \cos E}$, oder $\cot AFE = \frac{EF}{AE \cdot \sin E} - \cot E$

$= \frac{b}{(a+b) \sin E} - \cot E$. Da W. FHK = EFf =

$= R - AFE$, so ist $\cot FHK = -\cot AFE =$

$\cot E - \frac{b}{(a+b)\sin E}$.

Drittens, in dem Dreyeck FHK ist $\cot FKH$

$= \frac{KH}{FH \cdot \sin FHK} - \cot FHK$, oder, weil $FH : KH$

$= z : a$ ist, $\cot FKH = \frac{a}{z \sin FHK} - \cot FHK$.

Mittelst der vorher gefundenen Werthe des Sinus und der Cotangente von FHK ist

$$\cot FKH = \frac{a}{(a+b)\sin E} + \frac{b}{(a+b)\sin E} - \cot E.$$

$$= \frac{1}{\sin E} - \cot E = \frac{1-\cos E}{\sin E} = \frac{2\sin \frac{1}{2}E^2}{2\sin \frac{1}{2}E \cdot \cos \frac{1}{2}E}$$

$= \tang \frac{1}{2}E$; folglich $FKH = 90° - \frac{1}{2}E$. Da IF mit KH parallel ist, so ist W. IFK $=$ KH, und IFK $= 90° - \frac{1}{2}E$. Wegen des rechten Winkels IFE ist EFK $= \frac{1}{2}E$. Man ziehe nach dem Endpuncte G des Durchmessers DG die FG, so ist W. EFG $= \frac{1}{2}E$, also fällt FK in FG, oder die in F berührende geht durch G.

Daß die in F berührende durch G gehen müßte, konnte man daher schon abnehmen, weil die Ebene des Kreises sich in jedem Moment der Fortwälzung um den Berührungspunct D dreht, daher DF auf die berührende senkrecht ist, also diese selbst durch G geht.

5. In dem Dreyeck FAG ist I. $\sin G^2 = \frac{zz - aa}{4b(a+b)}$;

II. $\cos G^2 = \frac{(a+2b)^2 - zz}{4b(a+b)}$; III. $\tang G^2 = \frac{zz - aa}{(a+2b)^2 - zz}$.

Bew. In dem Dreyeck FAE ist $(a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\cos E = z^2$, also

Epicykloide ist die krumme Linie, welche ein in der Ebene eines Kreises befindlicher Punct beschreibt, indem dieser Kreis auf dem Umfange eines andern, in derselben Ebene mit ihm liegenden, Kreises sich um seinen Mittelpunct wälzt, so daß die Bogen, die auf beiden Kreisen zwischen zusammengehörigen Berührungspuncten liegen, auch groß sind. Oder die Bewegung um den Mittelpunct des sich wälzenden Kreises ist so groß als die fortrückende Bewegung auf dem andern, dem ruhenden. Die Wälzung kann auf der convexen (äußern), oder auf der concaven (innern) Seite des unbewegten Kreises geschehen. In dem letztern Falle heißt die Curve eine Hypocykloide, wiewohl man auch häufig diese eine Epicykloide nennt. Alsdann unterscheidet man beide Gattungen durch die Beywörter äußere (oder obere) und innere (oder untere). Der unbewegte Kreis heißt die Grundlinie oder die Basis, der sich wälzende heißt der erzeugende oder beschreibende Kreis. Liegt der beschreibende Punct auf dem Umfange des bewegten Kreises, so ist die Curve eine Epicykloide im engern Verstande; liegt derselbe außerhalb des Kreises, so ist sie eine verkürzte, (curtata), liegt er innerhalb, so ist dieselbe eine gestreckte (elongata). Der beschreibende Punct bewegt sich in allen drey Fällen um einen gewissen Punct, der wiederum sich um den Mittelpunct der Basis bewegt, allein nur in dem ersten Falle ist seine Kreisbewegung gleich der fortrückenden Bewegung des Kreises auf dem Grundkreise; in dem zweyten ist jene größer, in dem dritten kleiner als diese. Es verhält sich hier wie bey der Cykloide, Th. I. S 599. Wir wollen hier nur die eigentliche Epicykloide betrachten. Zuerst ein Satz aus der geometrischen Lehre von der zusammengesetzten Bewegung.

1. Es werde die gerade AB Tab. IX. (Fig. 17.) von einem Puncte gleichförmig beschrieben. Über derselben als Diagonale verzeichne man das Parallelogramm ACBD, so sind AC, AD die relativen Wege nach den Richtungen AC, AD, in welche der absolute Weg AB

8. Der Bogen BF sey $= s$, und $a + 2b = c$; es ist $s = \frac{cc-aa}{a} - \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a}$,

oder $s = \frac{2(a+b)}{a}(ab - FG)$.

Bew. Es ist nämlich $\partial s = \sqrt{(z^2 \partial w^2 + \partial z^2)}$, s. Rectification. Nun ist $z\partial w = \frac{c}{a}\partial z \sqrt{\frac{zz-aa}{cc-zz}}$, also $\partial s^2 = \frac{(cc-aa)zz}{aa(cc-zz)}\partial z^2$, und $\partial s = \frac{z\sqrt{(cc-aa)}}{a\sqrt{(cc-zz)}}\partial z$. Folglich

$$s = \text{Const} - \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a},$$

(Integralrechn. 40.). In B, wo $z = a$ ist, ist $s = 0$, also $\text{Const} = \frac{cc-aa}{a}$. So wird die erste Formel des Satzes erhalten.

Ferner ist die berührende Chorde $FG = ab \cos \mathfrak{G} = 2b\sqrt{\frac{cc-zz}{4b(a+b)}}$, (5.).

Da $4b(a+b) = cc - aa$ ist, so ist $2(a+b) \times FG = \sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}$. Durch die Substitutionen aus diesen beiden Gleichungen wird die zweyte Formel erhalten.

9. Nimmt man $z = a + 2b = c$, so ist $s = \frac{cc-aa}{a} = \frac{4b(a+b)}{a}$. Für diesen Werth von z ist $w = \frac{b}{a}\pi$, wo π der halbe Kreisumfang mit dem Halbmesser als Einheit ist. Es sey $BAP = \frac{b}{a}\pi$, und

$AP = a + 2b$, ſo iſt der Bogen $BP = \frac{4b(a+b)}{a}$, alſo der Bogen $PF = \frac{\sqrt{(cc-aa)(cc-zz)}}{a}$, oder $PF = \frac{2(a+b)}{a} \times FG$.

10. Die Area BAF zwiſchen den beiden Winkel-Ordinaten AB, AF und dem Bogen der Epicykloide BF iſt $=$

$$\frac{c}{4a}(cc-aa)\,\text{Ang cos}\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}} - \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)},$$

oder $= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times$ Segm. circ. DF.

Bew. Die Area ſey Z, ſo iſt $\partial Z = \frac{1}{2} zz\partial w$ (ſ. Quadratur) alſo $\partial Z = \frac{c}{2a} z\partial z \sqrt{\frac{zz-aa}{cc-zz}}$, wenn $a + 2b = c$ geſetzt wird. Man ſetze $cc - zz = uu$, ſo iſt $z\partial z = -u\partial u$, und

$$\partial Z = -\frac{c}{2a}\partial u \sqrt{(cc-aa-uu)}.$$

Die Integration giebt (Integralr. 36. u. 38.)

$$Z = \text{Conſt} - \frac{c}{4a} u\sqrt{(cc-aa-uu)} - \frac{c}{4a}(cc-aa)\int \frac{\partial u}{\sqrt{(cc-aa-uu)}}$$

$$= \text{Conſt} - \frac{c}{4a} u\sqrt{(cc-aa-uu)} - \frac{c}{4a}(cc-aa)\,\text{Ang sin}\frac{u}{\sqrt{(cc-aa)}}.$$

$$= \text{Conſt} - \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}$$

$$- \frac{c}{4a}(cc-aa)\,\text{Ang. ſin}\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}.$$

Für $z=a$ iſt $Z=0$, und der Winkel in dem letzten Terminus $=90$ Grad oder $\frac{1}{2}\pi$, alſo $\text{Conſt} = +\frac{c}{4a}(cc-aa)\times\frac{1}{2}\pi$. Demnach

$$Z = \frac{c}{4a}(cc-aa)\left(\frac{1}{2}\pi - \text{Ang ſin}\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}\right)$$

$$- \frac{c}{4a}\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)}.$$

Der Winkel in dem erſten Terminus iſt das Complement des Winkels, deſſen Sinus $=\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$ iſt, alſo iſt es der Winkel, deſſen Coſinus eben dieſen Werth hat. So iſt die erſte Formel des Satzes erwieſen.

Weiter iſt der Winkel zu Coſinus $\sqrt{\frac{cc-zz}{cc-aa}}$ der W. AGF, (5.) und $\sqrt{(cc-zz)(zz-aa)} = 4b(a+b)\,\text{ſin AGF. coſ AGF} = (cc-aa)\,\text{ſin AGF. coſ AGF}$, alſo

$$Z = \frac{c}{4a}(cc-aa)(\text{Ang AGF} - \text{ſin AGF. coſ AGF}).$$

Der Kreisbogen DF iſt $= b.\,\text{Ang DEF}$, oder $2b.\,\text{Ang AGF}$, und Sector $DEF = bb.\,\text{Ang AGF}$. Auch iſt $\triangle DEF = \frac{1}{2}\triangle DFG = \frac{1}{2}\,DF \times GF = bb\,\text{ſin G. coſ G}$.

Setzt man nun für $\frac{c}{4a}(cc-aa)$ ſeinen Werth $\frac{a+2b}{a} \times b(a+b)$, ſo wird

$$Z = \frac{(a+2b)(a+b)}{ab}\,(\text{Sect. DEF} - \Delta DEF)$$
$$= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times \text{Segm. DF.}$$

11. Wenn der erzeugende Kreis eine halbe Umwälzung vollendet hat, so daß der beschreibende Punct mit dem Berührungspuncte Q und dem Mittelpuncte des ruhenden Kreises in gerader Linie liegt, nämlich in P, so ist der Flächenraum zwischen AB, AP und dem Bogen BFP $= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \times$ area semicirc. PRQ, oder $\frac{(a+2b)(a+b)}{ab} \cdot \frac{1}{2}bb\pi$.

12. Der Winkel BAQ ist $= \frac{b}{a}\pi$, der Bogen BQ $= b\pi$, der Sector BAQ $= \frac{1}{2}ab\pi$. Zieht man diesen von der ganzen Area BAPB ab, so bleibt die Area BQPB $= \frac{3a+2b}{a} \cdot \frac{1}{2}bb\pi = \frac{3a+2b}{a} \times$ area semic. PRQ.

13. Die Area BDF zwischen dem Kreisbogen BD, dem Bogen BF und der Chorde DF ist $= \frac{3a+2b}{a} \times$ segm. DF.

Bew. Denn es ist Sect. BAD $= \frac{a}{b}$ Sect. DEF, und $\Delta DAF = \frac{a}{b}\Delta DEF$. Nun ist in dem Beweise der zweyten Formel (10.) gefunden

Area BAF $= \frac{(a+2b)(a+b)}{ab}$ (Sect. DEF $- \Delta DEF$).

Addirt man dazu das Dreyeck DAF, und subtrahirt den Sector BAD, so bleibt die Area BDF, und es ist also

Area BDF $= \frac{3a+2b}{a}$ (Sect. DEF — ΔDEF)

$= \frac{3a+2b}{a}$ Segm. DF.

14. Die Area DQPF ist $= \frac{3a+2b}{a}$ Segm. FDG.

Diese Formel giebt Joh. Bernoulli in der Lect. Hospit. XXII. Die Area DQPF und die BDF sind nämlich zusammen $= \frac{3a+2b}{a}$. $\times$ area semicirc. FDG.

15. Der Halbmesser der Krümmung OF in F ist $= \frac{2(a+b)}{a+2b} \times$ DF.

Bew. Das Perpendikel auf die berührende in F aus dem Mittelpuncte A des ruhenden Kreises sey AT $= t$, der Halbmesser der Krümmung in dem Puncte F sey $= r$, so ist $r = \frac{z\partial z}{dt}$ (s. Krümmungskreis). Nun ist AT $=$ AG $\times$ sin AGT $=$ $(a+2b)$ sin G $=$ $(a+2b)\sqrt{\frac{zz-aa}{4b(a+b)}}$ (6. I.). Man setze $\frac{\sqrt{4b(a+b)}}{a+2b} = p$, so ist $t = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{p}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{p\sqrt{(zz-aa)}}$, also $\frac{z\partial z}{\partial t} = p\sqrt{(zz-aa)} = p$ sin G. $\sqrt{4b(a+b)}$ $= \frac{4b(a+b)}{a+2b}$ sin G $= \frac{2\sqrt{(a+b)}}{a+2b} \times$ FD, weil FD $=$ $= 2b$ sin G ist.

16. Die krumme Linie, auf welcher die Mittelpuncte der Krümmungskreise, wie O, liegen, ist eine der BFP ähnliche Epicykloide, s. Evolute.

17. So wie DEF der Wälzungswinkel ist, wenn der Kreis von B nach D hin gerückt ist, so ist GEF der Wälzungswinkel, wenn der Kreis von Q nach D bewegt ist. Es ist nämlich bey der Berührung in Q der beschreibende Punct in P, auf der geraden AQP. Die Gleichung zwischen AF und einer trigonometrischen Function des Wälzungswinkels ist daher eine gedoppelte. In dem erstern Falle ist,

$$zz = aa + 4b(a+b)(\sin \tfrac{1}{2}DEF)^2,$$

wo $z = AF$ ist. In dem andern Falle ist, wenn AP oder $a + 2b = c$ gesetzt wird,

$$zz = cc - 4b(c-b)(\sin \tfrac{1}{2}GEF)^2.$$

Die erste Formel folgt aus (5. I.), die zweyte aus derselben, wenn für a gesetzt wird $c - 2b$, und $1 - (\sin \frac{1}{2}DEF)^2$ mit $(\cos \frac{1}{2}DEF)^2$, das ist mit $(\sin \frac{1}{2}GEF)^2$ vertauscht wird.

In der zweyten Formel ist b dem in der ersten Formel entgegengesetzt.

18. Die hier betrachtete Epicykloide, so sehr sie bloß etwas Beschauliches scheint, hat doch ihren praktischen Nutzen. Die Zähne der Kämme der Räder in Maschinen, und die Hebedaumen, welche Hebel bewegen, müssen nach einer Epicykloide geformt seyn, wenn die Maschine einen gleichförmigen Gang haben soll. Es sey AB der Halbmesser des Rades bis an den Punkt, wo der Zahn oder Kamm zuerst von dem Triebstecken berührt wird; EA der Halbmesser des Getriebes bis an die Axe der Triebstecken, die hier als eine Linie ohne Dicke betrachtet werden. Das Getriebe dreht sich wie der erzeugende Kreis für eine Epicykloide um den Mittelpunct, aber wälzt sich nicht, dagegen schiebt sich der Umfang des Rades unter demselben weg. Es ist einerley, ob der Kreis DIG sich auf BD wälzt, und dadurch C nach E rückt, oder ob der Bogen BD sich unter BC wegschiebt. Stellt man sich die Epicykloide auf der Ebene des Kreises um A gezeichnet vor, so bleibt bey der Wälzung der beschreibende Punct immer auf jener krummen Linie. Ist auf dem Rade der Kamm nach der Epicykloide BF geformt, und verhalten sich die Winkel, welche B und F beschreiben, umgekehrt wie AB und EA, so schiebt der Kamm den Trieb-

stecken ungezwungen fort, ohne Klemmung und Schlottern. Auch bleibt das Verhältniß der gegenwirkenden Kräfte immer dasselbe, wie in der dritten Abtheilung, Artikel, Rad und Getriebe, gezeigt werden wird.

Ist AB der Halbmesser einer Daumenwelle, BF der epicykloidisch geformte Hebedaumen, GFg ein Hebel, der um den Ruhepunct G gedreht wird, und verhalten sich die von AB und GFg zugleich beschriebenen Winkel wie GD: AB, so wirkt der Hebedaumen ungezwungen auf den Hebel, indem er sich daran hinschiebt, und von GFg berührt wird, ohne Verlust an Kraft und ohne Ungleichheit in dem Verhältnisse der entgegen wirkenden Kräfte. S. Hebedaumen in der dritten Abtheilung.

19. Diese nützliche Anwendung ist die Veranlassung zu der Construction der Epicykloiden gewesen. Römer, ein Dänischer Astronom, gerieth auf diese Curve, als er die schicklichste Gestalt der Zähne oder Kämme eines Rades suchte, um das J. 1674. Dies bezeugt Leibnitz in einem Briefe an Joh. Bernoulli (Commerc. epist I. 347.). Er hat es von Römer selbst, wie er mit ihm zugleich in Paris war, und von Huygens vernommen. De la Hire hat eine ausführliche, aber sehr verwickelt abgefaßte Abhandlung über die Epicykloiden und ihre Anwendung in der Mechanik, geschrieben, die in einer kleinen besondern Sammlung: Mémoires de Mathématiques et de Physique, à Paris 1694, befindlich ist. Er erwähnt nichts von Römer, und scheint sich diese geometrische und mechanische Entdeckung zuzueignen.

20. Die äußere Epicykloide, die von einem auf dem Umfange eines sich wälzenden Kreises befindlichen Puncte beschrieben wird, ist die Brennlinie für zurückgeworfene Strahlen an einem Kreise. Der Halbmesser der Basis ist halb so groß als der von dem zurückwerfenden Kreise, und doppelt so groß als der von dem erzeugenden Kreise, wie es de la Hire in einer Abhandlung über die Brennlinien, in der gedachten Sammlung zuerst gezeigt hat. Auch ist die Brennlinie eine Epicykloide, wenn die Strah-

in von dem Endpuncte eines Durchmessers auffallen. S. Bremlinie und Caustica.

21. Wenn die Basis der Epicykloide einen unendlichen großen Halbmesser hat, so verwandelt sie sich in eine gerade Linie, und der erzeugende Kreis giebt eine Cykloide.

Ist aber der Halbmesser des erzeugenden Kreises unendlich groß, so entsteht durch Abwicklung des Umfanges der Basis eine Linie, welche man die Evolvirende nennen kann. Die Basis ist ihre Evolute. Anstatt des Bogens FD ist eine gerade Linie, die dem Bogen BD gleich ist, von dem Anfange der Abwicklung an bis an den Berührungspunct, s. Evolute.

22. Das ganze Verfahren für die äußere Epicykloide kann man auf die innere anwenden. In der Rechnung wird b durchgehends negativ. Denn in dem Dreyeck AEF wird für diese die Seite AE = a — b statt a + b an der äußern. Es ist zur deutlichern Einsicht rathsam, die Zeichnung und Rechnung für diesen Fall besonders zu machen.

Auch sieht man aus dem für die eigentliche Epicykloide angewandten Verfahren, wie die Untersuchung für gestreckte und verkürzte Epicykloiden anzustellen seyn würde.

Halley hat in den Philos. Transs. nr. 219. für den Flächenraum aller Arten von Cykloiden und Epicykloiden verglichen mit dem Flächenraum der zugehörigen Kreissegmente folgenden Satz bewiesen: Die Area dieser Curven verhält sich zu der Area des erzeugenden Kreises, wie die Summe der doppelten Geschwindigkeit des Mittelpunctes und der Geschwindigkeit der drehenden Bewegung zu der Geschwindigkeit dieser letztern, und eben so überhaupt die zusammengehörigen Flächenräume an der Curve und dem Kreise. Die Räume werden von dem Scheitel an gerechnet, und von dem Bogen der Basis, der Curve und dem Durchmesser PQ begränzt, s. 14.

23. Man kann jede Figur über einer andern Figur in derselben Ebene auf die Art, wie einen Kreis über einem andern, sich walzen, und einen Punct in der Ebene der

erstern eine Linie beschreiben lassen. De la Hire hat in den Memoiren der Pariser Akademie vom J. 1706. den Abriß zu dem Verfahren gegeben, der aber unzureichend ist, obgleich Montucla den Aufsatz als ausführlich und nett geschrieben empfiehlt. Hingegen hat in derselben Sammlung vom J. 1707. Nicole Formeln angegeben, durch welche die Gleichung für die auf gedachte Art erzeugte krumme Linie gefunden wird. Es ist ein Eliminations-Proceß zwischen drey Paaren veränderlicher Größen, nämlich den rechtwinklichten Coordinaten der drey Curven. So wie Nicole die Methode vorträgt, scheint die bewegte Curve mit dem Wälzen zugleich rutschen zu können. Er bemerkt nicht, daß die Elemente der beiden Curven, der bewegten und der unbeweglichen, gleich groß sind, aber doch in der Formel, als wenn sie verschieden wären, beybehalten werden müssen, weil Differentiale an zwey verschiedenen Curven nicht mit einander verglichen werden können.

24. Wenn eine Parabel auf einer ihr gleichen sich wälzt, und zuerst die Scheitelpuncte zusammenfallen, so beschreibt der Scheitelpunct jener eine Cissoide. Nicole a. a. O. S. 124. der holl. Ausg.

25. Der Brennpunct der beweglichen Parabel beschreibt, bey dieser Voraussetzung, eine gerade Linie, die senkrecht auf die Axe der Parabel durch den Punct geht, der ausserhalb so weit von dem Scheitel absteht, als der Brennpunct von demselben.

26. Wenn eine Ellipse auf einer ihr gleichen sich wälzt, und die Scheitelpuncte beider zuerst in eins fallen, so beschreiben die Brennpuncte jener Kreise, deren Mittelpunct der andere Brennpunct ist, und der Durchmesser die große Axe. Eben so verhält es sich mit zwey Hyperbeln, bey gleicher Voraussetzung. Der Durchmesser der beschriebenen Kreise ist die Hauptaxe. Dieses beruht darauf, daß die Linien, die in der Ellipse und Hyperbel von den Brennpuncten nach einem Puncte der Curven gezogen werden, mit der berührenden gleiche Winkel machen. In der Parabel kommt statt der einen Linie eine parallele mit der Axe.

27. Eine sphärische Epicykloide wird v einem Puncte des Umfanges eines sich um seinen Mitte punct drehenden Kreises beschrieben, indem derselbe zugle auf einem andern Kreise herumgeführt wird, der in ein andern Ebene liegt, welche aber mit der Ebene jenes eine unveränderlichen Winkel macht. Ein senkrechter Kege der eine Ebene mit einer Seite berührt, und auf ihr he umrollt, so daß die Spitze an derselben Stelle bleibt. b schreibt mit einem Puncte des Umfanges seiner Grundfläch eine solche Epicykloide. Von dieser handeln Herman in den Comment. Acad. Petrop. T. I. ferner Jo Bernoulli, Maupertuis, Nicole und Clairau in den Memoiren der Pariser Akademie vom J. 173 Lexell in den Actis Petrop. T. III. a. a. 1779.

28. Will man verschiedene Methoden zur Entwick lung der Eigenschaften der Epicykloide kennen lernen, s sehe man nach Halleys Abhandlung in den Philo Transf. nr. 218. die vorher angeführte Abhandlung vo de la Hire; L'Hôpital Analyse des infin. petits nr. 100. ff. Ioh. Bernoulli Lect. Hospit. Lect. XX seqq. Newtoni Principia Phil. nat. Prop. 48. 49 Euleri Introd. in Anal Infin. T. II. §. 523. ff.

Epipedometrie ist derjenige Theil der Geometri der von der Vergleichung der Flächen handelt nach einig die Vergleichung von Körpern, die einerley Grundfläch haben. Das Wort wird jetzt nicht mehr gebraucht.

Epitagma, Anordnung, ein Kunstwort in d alten Geometrie, womit Pappus die verschiedene Anza und Lage der Puncte in der Aufgabe von dem bestimmte Schnitte einer Linie, als besondere Fälle verschiedener Au gaben bezeichnet, in der Nachricht, die er von des Apo lonius Schrift über diese Aufgabe ertheilt. Collec mathem. L. VII. praef. S. bestimmter Schnitt.

Eratosthenes, Sieb des (Cribrum, Κοσκινον ist eine Methode dieses alten sehr gelehrten Mathematike und Astronomen im 3ten Jahrh. vor C. G. die Primza

len aus den übrigen Zahlen auszusondern. Sie ist folgende. Man setzt die Reihe aller ungeraden Zahlen hin, so weit als man es nöthig findet, als:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21,
23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39,
41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, etc.

Man streicht zuerst jede dritte Zahl nach 3 aus, als 9, 15; etc. dann das Quadrat von 5 oder 25, und jede 5te Zahl nach 25, als 35, 45, etc. darauf das Quadrat von 7 oder 49, und jede 7te Zahl nach 49. So fährt man fort, bis daß die erste nicht ausgestrichene Zahl, die zunächst auf diejenige folgt, deren Vielfache zuletzt ausgestrichen worden, so beschaffen ist, daß ihr Quadrat größer ist, als die letzte Zahl der Reihe, mit welcher man sie beschließt. Die nun übrig gebliebenen Zahlen sind einfache oder Primzahlen.

Nikomachus in seiner Einleitung zur Arithmetik, und aus ihm Boethius in seinem Abrisse derselben, haben von diesem Verfahren Nachricht gegeben. Sie machen aber zugleich die Factoren der Zahlen, welche Vielfache von andern sind, bemerklich, und fangen deswegen immer bey der Einheit des Vielfachen an, nicht bey ihrem Quadrat. Der bildliche Name eines Siebes, den das Verfahren erhalten hat, zeigt an, daß dieses nicht die Absicht des Eratosthenes gewesen ist, sondern das Aussondern der Primzahlen.

Horsley hat in den Philos. Transact. Vol. 62. eine Abhandlung über das Sieb des Eratosthenes geliefert. Er ist mit den gedachten beiden Schriftstellern unzufrieden, daß sie die Erfindung des alten Griechen verstellt haben. Sie ist hier nach seiner Erklärung vorgetragen. In der schönen Oxforder Ausgabe des Aratus vom J. 1672. ist eine Tafel der ungeraden Zahlen von 1 bis 113, mit den Theilern der zusammengesetzten unter ihnen, angehängt, unter der Aufschrift, Sieb des Eratosthenes. Diese Tafel ist also nach der Vorstellung des Nikomachus gemacht, vermuthlich von irgend einem Commentator desselben.

Erdmeßkunst, s. Geometrie.

Erhebung einer Zahl zu einer Dignität oder Potenz ist, ein Product aus Factoren machen, deren jeder ihr gleich ist.

Erklärung, (definitio), mathematische, ist die deutliche Darstellung eines mathematischen Begriffs durch Worte mit Hinzufügung des Wortzeichens, welches für den Begriff unveränderlich gebraucht werden soll.

In reinen mathematischen Erklärungen ist die Darstellung des Begriffs als Subject eines Satzes zu betrachten, dessen Prädicat das Wortzeichen ist, wenn gleich nach der grammatischen Stellung dieses das Subject zu seyn scheint. Das Wortzeichen zum Subject machen, ist nur, es grammatisch erklären. Es ist hier nicht der Fall, daß das Erklärte außer uns gegeben, und uns schon undeutlich und unvollständig bekannt wäre, so daß die Erklärung den deutlichen und vollständigen Begriff von der Sache geben muß, sondern in der reinen Mathematik entspringen alle Begriffe gleichsam auf unserm eigenen Grund und Boden. Die Erklärungen enthalten eine Form der Größe, welche wir eigenmächtig bilden. Wir gehen also von dem Begriffe zu dem Wortzeichen, nicht von dem schon irgendwoher gegebenen Wortzeichen zu dem Begriffe und dessen Auseinandersetzung. So hat man erst die Form der Kegelschnitte gefunden, und darauf die Benennungen, Ellipse, Parabel, Hyperbel, eingeführt. Wenn auch sinnliche Gegenstände Veranlassung zu einer geometrischen Form geben, so ist dieses nur zufällig, und die abstracte Form gehört doch ganz dem Verstande zu. Arithmetische und analytische Zusammensetzungen sind ganz reine Producte des Verstandes.

Eine mathematische Erklärung braucht nur in so fern bewiesen zu werden, daß zu zeigen ist, wie die darin liegende Form der Größe möglich, und geometrisch oder analytisch dargestellt werden kann. Z. B. Euklides erklärt ein Quadrat als eine vierseitige Figur mit vier gleichen Seiten und rechten Winkeln. In dem System zeigt er, wie eine solche Figur verzeichnet wird.

Die Eigenschaften einer Form der Größe kommen ihr ausschließlich zu, nämlich nach dem grammatischen Sinne des Worts, Eigenschaft. Daher kann man dieselbe Form oft ohne Zwang auf verschiedene Arten charakterisiren. Z. B. die Erklärung, welche Euklides in der 5ten Erkl. des 5ten Buchs von proportionalen Größen giebt, (s. Proportion), ward von ihm gewählt, weil sie zugleich auf rationale und irrationale Verhältnisse sich anwenden läßt, ohne daß man für die letztern eine besondere Erweiterung oder Ergänzung nöthig hat. Die Neuern pflegen die Erklärung zu nehmen, daß für proportionale Größen die Exponenten der Verhältnisse gleich sind, weil dieses zur Rechnung bequem ist. Nimmt man Euklidens Erklärung, so folgt daraus der Lehrsatz, daß die Exponenten der Verhältnisse gleich sind, sie mögen rational oder irrational seyn; so wie nach der Erklärung der Neuern die Euklidische sich in einen Lehrsatz verwandelt. — Von den geraden Parallelen kann man verschiedene Definitionen machen, wodurch dann ein verschiedener Gang in dem Theile des Systems, welcher die Parallelen betrifft, verursacht wird. Was nach der einen Methode zum Grunde gelegt wird, das wird nach der andern Folge. — Eine Ellipse ist eine krumme Linie, die auf eine gewisse Art durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene entsteht; man kann sie auch durch die Gleichung erklären, welche aus dieser Entstehungsart hergeleitet wird, ohne inzwischen dabey diese Entstehung anzugeben. Man kann auch eine Eigenschaft der Ellipse zum Grunde legen, daß sie diejenige krumme Linie sey in welcher die Summe der beiden aus zwey bestimmten Puncten an den Umfang gezogenen Linien unveränderlich ist.

Ermeßliche, dergleichbare, commensurable, Größen sind solche, welche von einem und demselben Maaße gemessen werden, als alle ganze Zahlen, und alle Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, oder auf solche gebracht werden können.

Ermeßliche Zahlen unter sich sind solche, die zwar einzeln von der Einheit oder einem aliquoten Theile

derselben nicht gemessen werden, allein sich doch wie ganze Zahlen verhalten, z. B. $\sqrt{8} : \sqrt{18}$, die sich verhalten wie 2 : 3, weil $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, und $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Diese Art irrationaler oder absolut unvergleichbarer Größen nennt man communicantes. Wolfii Elem. Anal. §. 63.

Ermeßliche Größen in der Potenz sind solche, deren Quadrate von einer und derselben rationalen Zahl, als geometrische von einem und demselben Flächenraume, gemessen werden, wie $\sqrt{5}$ und $\sqrt{17}$. Unter diese gehören auch die gleich vorher angeführten relativ ermeßlichen Größen. Die in der Potenz ermeßlichen Größen kommen in dem 10ten Buche der Euklidischen Elemente viel vor.

Erniedrigung einer Gleichung ist, sie auf die einfachste Form, der sie fähig ist, oder den möglich niedrigsten Grad bringen. Dieses geschieht, nachdem alle Glieder auf eine Seite das Gleichheitszeichen gebracht sind, durch Absonderung des Factors, der nicht zum Wesentlichen der Verbindung der Größen in der Gleichung gehört.

Errathende Rechenkunst (Arithmetica divinatoria) ist eine Sammlung von arithmetischen Spielereyen, Zahlen, die jemand im Sinne hat, durch Verknüpfung mit andern Zahlen zu entdecken. Dahin mag man auch rechnen, wenn aus mehrern Dingen das von jemanden in Gedanken gewählte durch Abzählen und Versetzungen angezeigt wird, und mehreres dergleichen. Sie dient zur Belustigung, bisweilen auch zur Übung in Übersicht arithmetischer Verbindungen, wodurch sie bey dem Unterricht junger Leute gut zu gebrauchen ist. In der natürlichen Magie von Wiegleb und Rosenthal findet sich ein reicher Vorrath dieser Kunststücklein. In den Recréations mathématiques par Ozanam, T. I. sind manche für Anfänger dienliche Aufgaben enthalten. Daselbst werden angeführt Problêmes plaisans et delectables par Bachet. Schwenters mathematische und philosophische Erquickstunden, 1691. nebst den beigen

Fortsetzungen von Harsdörfer, liefern auch dergleichen, so wie Ioco-serierum naturae et artis, s. Magiae naturalis centuriae tres, Auctore Aspasio Caramuelio (Kirchero), 1666. 4.

Ein paar Beyspiele mögen zur Anleitung dienen, die Beweise der Vorschriften in diesen Büchern zu finden.

Eine Zahl x, die jemand in Gedanken hat, zu entdecken, lasse man ihn dazu 2 addiren, die Summe mit der Zahl multipliciren, dann zu dem Product 1 addiren, und dann die Summe beider, a, angeben. Diese ist das Quadrat von x + 1, wodurch also x leicht gefunden wird.

Die Zahl bestehe aus zwey Ziffern, den Zehnern a, und den Einern b, so ist sie 10 a + b. Man lasse sie mit 2 multipliciren, und zu dem Product eine beliebige Zahl, 7, addiren, so entsteht die Summe 20 a + 2 b + 7. Diese werde mit 5 multiplicirt, wodurch 100 a + 10 b + 35 erhalten wird. Dieses Product lasse man mit 10 multipliciren, und dann eine Zahl, 4, addiren, so ergiebt sich 1000 a + 100 b + 354. Diese Zahl lasse man sich angeben, und ziehe von derselben die bekannte Zahl 354 ab, so sind die beiden ersten Ziffern die gesuchte Zahl.

Auf diese Art kann man zwey und mehrere Zahlen herausbringen, wenn sie nicht über 9 sind. Wären sie größer als 9, und kleiner als 12, so müßte man statt der Multiplicatoren 2 und 5, die 2, 3, 4, 6 gebrauchen, wodurch noch mehr Mannigfaltigkeit des Verfahrens entsteht; die überschießende bekannte Zahl muß aber duodekadisch ausgedruckt werden. Bey noch größern Zahlen hätte man sich eines mehr erweiterten Zahlensystems zu bedienen. Dies ist ein Beytrag zu der errathenden Rechenkunst, den man in den Sammlungen noch nicht finden wird.

Drey Zahlen, x, y, z, durch Hülfe der Algebra zu entdecken, lasse man sich die Summen je zweyer, als x + y; x + z; y + z, geben, so hat man drey Gleichungen für die drey unbekannten Größen, woraus sie leicht bestimmt werden.

Euthymetria wird bisweilen derjenige Theil der Geometrie genannt, welcher die Betrachtung der geradlinichten Figuren enthält. Die erste Hälfte des Worts bedeutet das Gerade.

Evolution, Abwicklung einer krummen Linie, ist die stetige Bewegung einer geraden berührenden Linie und eines bestimmten Punctes auf derselben durch alle ihre Lagen an der Curve. Man lege auf oder an eine krumme Linie AMm (Fig. 19.) einen vollkommen biegsamen Faden ohne Dicke, das ist, eine biegsame mathematische Linie, die mit der Curve völlig zusammenfällt, befestige ihn in irgend einem Puncte m, und verlängere ihn in einem andern Puncte A nach der Richtung der berührenden AB, der Faden werde nach dieser Richtung gespannt, und nach der Seite jenes Punctes m hin bewegt, immer gespannt, ohne Drehung, so daß in dem Puncte M der gerade Theil des Fadens die Curve daselbst berühre, da der übrige Theil noch auf dem Bogen Mm liegt. Irgend ein Punct des Fadens, als der Anfangspunct A des Bogens selbst, oder einer auf der berührenden AB, wie B, beschreibt eine Curve BNn, die man die durch Evolution erzeugte (oder evolvirende, abwickelnde) nennt, so wie die AMm die abgewickelte, oder Evolute. Es erhellt, daß der gerade Theil des Fadens MN der Summe des Bogens AM und der geraden AB ist, wenn B der beschreibende Punct ist.

1. Der Radius MN der Evolvirenden BNn ist auf dieselbe senkrecht

Die Coordinaten der Evolute seyn AP = x; PM = y; der Evolvirenden, AQ = t; QN = u, beide Paare rechtwinklichte, die Abscissen AP, AQ auf der die Curve in A berührenden. Der Bogen AM = s, der Radius MN = z. Es ist PM + QN = (MS + SN). sin MSP = MN. sin MSP. Nun ist tang MSP = $\frac{\partial y}{\partial x}$ (berühr. Linie 14.), also sin MSP = $\frac{\partial y}{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}}$

$= \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial z}$, weil der Bogen AM und der Radius MN immerfort gleichviel zunehmen. Folglich $y + u = \frac{z\partial v}{\partial z}$. Eben so ist QP = MN. cos MSP, oder $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$. Die Differentiation giebt $\partial y + \partial u = \partial y + \frac{z\partial^2 y}{\partial z}$, wenn ∂z oder ∂s unveränderlich genommen wird, oder $\partial u = \frac{z\partial^2 y}{\partial z}$. Eben so ist $\partial t = -\frac{z\partial^2 x}{\partial z}$. Da ∂s unveränderlich gesetzt ist, so ist $\partial . (\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, also $\partial x \partial^2 x = -\partial y \partial^2 y$, und $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = \frac{\partial x}{\partial y}$.

Nun ist QS = QN . tang QNS = QN . tang SMP $= \frac{u\partial x}{\partial y}$, also ist $QS = \frac{u\partial u}{\partial t}$. Dieses ist aber der Werth der Subnormale für den Punct N oder die Ordinate u, (berühr. Linie 41.), also ist NS senkrecht auf die Curve BNn.

2. Die berührende MN an der Evolute bis an die Evolvirende ist der Halbmesser der Krümmung an dieser.

Es sey $\frac{\partial u}{\partial t} = p$, der Halbmesser der Krümmung in M sey = r, so ist $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial p}$ (Krümmungskreis, 2.). Da $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial y}$ ist, so ist $p = \frac{\partial x}{\partial y}$, und

$$\partial p = \frac{\partial^2 x \partial y - \partial x \partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{(\partial y^2 + \partial x^2)\partial^2 x}{\partial y^3} = \frac{\partial z^2 \partial}{\partial y^3}$$

In (1.) ist gefunden $\partial t = -\frac{z\partial^2 x}{\partial z}$, also ist

$$\frac{\partial t}{\partial p} = -\frac{z\partial y^3}{\partial z^3}. \quad \text{Ferner ist } 1 + p^2 = \frac{\partial y^2 + \partial}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial z^2}{\partial y^2}, \text{ und } (1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial z^3}{\partial y^3}. \quad \text{Folglich ist } r =$$

3. Die Evolute ist der geometrische Ort der Mitt punkte der Krümmungskreise für diejenige Linie, die a ihrer Evolution entsteht, und wird von den Halbmessern i Krümmung berührt. Diese Eigenschaft kann man a zur Erklärung der Evoluten gebrauchen.

4. Aus der Gleichung für die Evolvirende BNn l sich mittelst der in (1.) gefundenen Formeln immer für die Evolute herleiten. Denn es ist erstlich

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2+1)}}, \text{ und } \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^2+1)}}. \quad \text{Ferner ist}$$

$$z = -(p^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial t}{\partial p}, \text{ also ist } \frac{z\partial x}{\partial z} = -(p^2 +$$

$$\frac{p\partial t}{\partial p}, \text{ und } \frac{z\partial y}{\partial z} = -(p^2+1) \cdot \frac{\partial t}{\partial p}. \quad \text{Dara}$$

werden nun die in (1.) zwischen den Coordinaten bei Linien gefundenen Gleichungen folgende:

$$x = s - (p^2+1) \cdot \frac{p\partial t}{\partial p}$$

$$y = -u - (p^2+1) \cdot \frac{\partial t}{\partial p}.$$

Aus der Gleichung für die Evolvirende werden die Differential-Quotienten p, und $\frac{\partial t}{\partial p}$ hergeleitet, und durch t nebst u gegeben. Setzt man die Werthe derselben in jene beiden Gleichungen, so hat man nebst der für die Curve drey Gleichungen, woraus man die beiden veränderlichen t, u herausschaffen, und eine Gleichung zwischen x und y erhalten kann.

Die Abscissen x und t kann man, wo man will, anfangen lassen, da es ihr Unterschied ist, der in der ersten Gleichung durch p und $\frac{\partial t}{\partial p}$ gegeben wird.

5. Aus der Gleichung für die Evolute läßt sich nicht immer eine Gleichung für die Evolvirende, von Differentialen befreyte, herleiten. Ist die krumme Linie rectificabel, so ist z eine Function von x und y in endlichen Ausdrücken, und die Differentialquotienten, $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ werden durch x und y gegeben. Aus den beiden in (1.) gefundenen Gleichungen und der für x und y gegebenen läßt sich nun sowohl x als y herausschaffen, so daß eine Gleichung für t und u hervorgeht.

Ist aber z keine algebraische Function, von x und y, so ist die Gleichung zwischen t und u keine algebraische. Denn wenn sie es wäre, so wäre die Gleichung zwischen x und y nicht allein auch eine algebraische, sondern die Evolute wäre auch rectificabel, und z eine algebraische Function von x und y. Es kommt nun darauf an, ob die Gleichung, welche man durch die Substitution der in (4.) gefundenen Werthe von x und y in der Gleichung für dieselbe erhält, sich integriren läßt.

6. Exempel. Die Evolvirende BNn sey eine Parabel, deren Axe BQ ist, die Gleichung für die Evolute zu finden.

Die Abſciſſen der Parabel laſſe man in dem Scheitel anfangen, wohin dann auch der Anfang der Abſciſſen x an der Evolute gelegt wird, zufolge der Bemerkung in (4.).

Der Parameter der Parabel ſey a, ſo daß ihre Gleichung iſt, $at = uu$. Alſo iſt $a\partial t = 2u\partial u$; $p = \frac{a}{2u}$;

$p^2 + 1 = \frac{aa + 4uu}{4uu}$; $\partial p = -\frac{a\partial u}{2uu}$, folglich

$$x = t + \frac{aa + 4uu}{2a}$$

$$y = \frac{aa + 4uu}{aa} \cdot u - u = \frac{4u^3}{aa}.$$

Die Verbindung mit der Gleichung $at = uu$ giebt

$x - \frac{1}{2}a = \frac{3uu}{a}$, alſo $(x - \frac{1}{2}a)^3 = \frac{27u^6}{a^3}$. Da

$y^2 = \frac{16u^6}{a^4}$, ſo iſt $(x - \frac{1}{2}a)^3 = \frac{27}{16}ay^2$,

die Gleichung für die Evolute. Wenn in derſelben $x = \frac{1}{2}a$ genommen wird, ſo iſt $y = 0$, alſo iſt der Anfang der Evolute in A, wo $AB = \frac{1}{2}a$, und der Halbmeſſer der Krümmung an der Evolvirenden in B iſt $= \frac{1}{2}a$. Dieſer Werth folgt auch aus der allgemeinen Formel für den Halbmeſſer der Krümmung an der Parabel, $r = \frac{(aa + 4uu)^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, wenn in derſelben $u = 0$ geſetzt wird.

Man ſetze $AP = w$, ſo iſt $w^3 = \frac{27}{16}ay^2$, welches die Gleichung für eine parabola ſemicubica, oder die Neiliſche mit dem Parameter $\frac{27}{16}a$ iſt. Sie hat auf der andern Seite der Abſciſſenlinie einen dem Zweige AMm ähnlichen und gleichen, beide ins Unendliche fortlaufend,

und in A eine Spitze, da hier die berührende in die Abscissenlinie fällt. Vergl. Th. 1. S. 137. f.

7. Zu einem Beyspiele des Verfahrens, aus der Evolute die Evolvirende zu finden, nehme man zur Evolute die Neilische Parabel AMm, mit dem Parameter a, setze hier AP = x; PM = y; so ist für die Curve, $x^3 = ay^2$; die Differentialgleichung, $3x^2\partial x = 2ay\partial y$; das Differential des Bogens oder des Radius MN,

$$\partial z = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4a + 9x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \partial x.$$

Die Integration giebt

$$z = \frac{a}{2}\left(\frac{4a + 9x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + c,$$

wo c eine willkührliche Linie ist, die von der Länge abhängt, welche man der Linie AB giebt. In A ist $x = o$, und $z = \frac{8a}{27} + c$, so daß $AB = \frac{8a}{27}$ ist, wenn $c = o$ genommen wird.

Die beiden Gleichungen für die Coordinaten an beiden Linien sind (1.)

$$y + u = \frac{z\partial y}{\partial z};$$

$$x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}.$$

Daraus ist

$$\frac{y + u}{x - t} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x^2}{2ay}, \text{ oder}$$

$$2ay^2 + 2auy = 3x^3 - 3x^2t.$$

Die Verbindung mit der Gleichung für die Curve giebt

$$2auy = x^3 - 3tx^2.$$

Diese quadrirt, und mit eben derselben verglichen giebt

$$4au^2 = x(x - 3t)^2 \qquad (A).$$

Die Gleichung $x - t = \frac{z\partial x}{\partial z}$ wird durch gehörige Subſtitution

$$x - t = \frac{2}{27}(4a + 9x) + 2c\left(\frac{a}{4a + 9x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$9x - 27t - 8a = 54c\left(\frac{a}{4a + 9x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus dieſer Gleichung und der gleich vorher gefundenen (A) ſchaffe man x weg, ſo erhält man eine Gleichung für die Evolvirende mit der beſtimmten Conſtante c.

Man ſetze $c = 0$, ſo iſt $9x - 27t = 8a$, oder $9(x - 3t) = 8a$, oder $81(x - 3t)^2 = 64a^2$. Dieſe Gleichung verbinde man mit der Gleichung (A), ſo entſteht die Gleichung $81u^2 = 64ax$, und für x ſeinen Werth geſetzt, $81u^2 = 16a(8a + 3t)$, oder

$$u^2 = \frac{16}{27}a\left(\frac{8}{27}a + t\right).$$

Dieſes iſt die Gleichung für eine Parabel, deren Parameter $= \frac{16}{27}a$ iſt, mit dem Abſtande $\frac{8}{27}a$ oder AB, des Anfangs der Abſciſſen vom Scheitel. Der Parameter der Parabel und ihrer Evolute verhalten ſich wie 16 : 27, ſo wie es auch in (6.) gefunden iſt.

8. Man ſieht hieraus, wie man einer gegebenen krummen Linie eine parallele (gleichlaufende) ziehen könne, das iſt, eine ſolche, die ihre Richtung in den ſucceſſiven Puncten eben ſo ändert, wie die gegebene, wobey die parallelen berührenden beider in den correſpondirenden Puncten einen gegebenen Abſtand haben, wie in zwey concentriſchen Kreiſen. Man ſuche zu dem Ende die Gleichung für die Evolute AMm einer gegebenen Linie BNn, und ſetze den Anfangspunct der Abſciſſen in A auf der geraden BAP. Aus jener Gleichung leite man den Werth von z oder $\int(\partial x^2 + \partial y^2)$ her, und beſtimme die Conſtante ſo, daß

für $x = o$ der Werth von z an der parallelen Curve von dem an BNa, oder von AB, um den gegebenen Abſtand der parallelen berührenden verſchieden ſey. Nun hat man aus der Gleichung für die Evolute, und den beiden allgemeinen, $y + u = \frac{z\partial y}{\partial z}$, und $x + t = \frac{z\partial x}{\partial z}$, die Coordinaten, x, y, wegzuſchaffen, um die Gleichung für die geſuchte Linie zu erhalten.

Zum praktiſchen Gebrauch (bey Gewölbebogen, Kämmen der Räder in Maſchinen) mag man die krumme parallele ſo beſchreiben, daß man zuerſt die Evolute durch Hülfe einiger Puncte zeichne, und an dieſer, ſtatt des vorher gebrauchten Fadens, ein Linial herumführe, welches die Evolute ſtetig berührt, und mit einem darauf bemerkten Puncte an ſeiner Schärfe die gegebene Curve beſchreibe, ſo wird irgend ein anderer daran bemerkter Punct eine parallele mit jener beſchreiben. Oder anſtatt die Evolute zu zeichnen, ziehe man mehrere Normalen an die gegebene Curve, und trage darauf von dieſer an den Abſtand der parallelen von jener, ſo erhält man eine Anzahl Puncte, die durch einen freyen Zug zu verbinden ſind.

Ein ſehr gutes Beyſpiel an der Ellipſe giebt von Praſſe in Diſſertatione de Ellipſeos evoluta et aequidiſtantibus. Lipſiae 1798.

Kaeſtner de curvis aequidiſtantibus, Commentt. Soc. Goetting. T. XI. und in der Analyſis des Unendl. §. 95.

9. Die krumme Linie zu finden, deren Evolute mit ihr in den zuſammengehörigen, durch Normale an dieſer, und berührende an jener (der Evolute) verbundenen Puncten gleich große Ordinaten hat.

Die krumme Linie ſey ANB (Tab. X. Fig. 20.), und ihre Evolute AMC. Die Normale an jener NM berührt dieſe in M. Es ſey nun die Ordinate NQ = PM, ſo iſt NS = SM; oder MN = 2NS. Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen iſt $y = u$, alſo $2y = \frac{z\partial y}{\partial z}$,

oder $\frac{2\partial z}{z} = \frac{\partial y}{y}$. Die Integration dieser logarithmischen Differentiale giebt $\frac{zz}{aa} = \frac{y}{b}$ (Different. Formeln 14.), wo a und b zwey willkührliche Constanten sind. Also ist $zz = \frac{aa}{b} y = \frac{aa}{b} u$, oder kürzer $zz = 4cu$, wo c eine unveränderliche Größe bedeutet.

Die Subnormale QS ist $= \frac{u\partial u}{\partial t}$ (berühr. Linie, 42.), also ist $NS^2 = NQ^2 + QS^2 = u^2 \left(\frac{\partial t^2 + \partial u^2}{\partial t^2}\right)$. Da $2NS = z$, und $zz = 4cu$, so ist $u(\partial t^2 + \partial u^2) = c\partial t^2$, oder $u\partial u^2 = (c-u)\partial t^2$, und

$$\partial u \sqrt{\frac{u}{c-u}} = \partial t,$$

als die Differentialgleichung für die gesuchte evolvirende Linie.

Die Gleichung integrirbar zu machen, verwandle man sie in folgende,

$$\frac{u\partial u}{\sqrt{(cu-uu)}} = \partial t.$$

Die Integration (s. Integralformeln) giebt

$t = \frac{1}{2} c \text{ Ang. sin. vers.} \frac{2u}{c} - \sqrt{(cu-uu)}$, wobey Const $= o$ ist. Es sey Ang. sin. vers. $\frac{2u}{c} = \varphi$, so ist $\sin \varphi^2 = \frac{2u}{c}\left(2 - \frac{2u}{c}\right) = \frac{4(cu-uu)}{cc}$, also ist

$$t = \tfrac{1}{2} c (\varphi - \sin \varphi)$$
$$u = \tfrac{1}{2} c (1 - \cos \varphi).$$

Es ist nämlich $x = \frac{2u}{c} = \cos\varphi$.

Jene beiden Gleichungen gehören für die Cykloide (s. Cykloide, I.), welche durch die Wälzung eines Kreises, dessen Durchmesser c, von einem Puncte des Umfanges beschrieben wird. Die Benennungen, x, y, a, a_1, a. O. sind hier mit t, u, $\frac{1}{2}c$ vertauscht.

Die Subnormale QS ist $\frac{u\partial u}{\partial t} = V(eu - nn) = \frac{1}{2}c \sin\varphi$. Da SP = QS ist, so ist AP oder $x = \frac{1}{2}c(\varphi + \sin\varphi)$. Man ziehe AE senkrecht auf AP und MV parallel der letztern, so ist an der Evolute

$$AV = \tfrac{1}{2}c(1 - \cos\varphi)$$
$$VM = \tfrac{1}{2}c(\varphi + \sin\varphi).$$

Diese Linien sind die Coordinaten einer Cykloide, deren erzeugender Kreis den Durchmesser c hat, wie die ANB, aber an der Cykloide AMC ist A der Scheitel, von welchem an die Abscissen auf der Axe AE genommen werden. Die Werthe von AV und VM haben eben die Form, welche die von EQ und QM in dem Art. Cykloide, II. haben. Nur gehören daselbst diese Ordinaten zu demselben Puncte mit den Coordinaten AP, PM, hier aber gehören AV und VM zu einem andern Puncte M als der durch AQ und QN bestimmte N ist, außer in dem Falle $\varphi = 90°$.

Man nehme AE = c, so ist $\cos\varphi = -1$; $\varphi = \pi$, und $EG = \frac{1}{2}c\pi$, dem halben Umfange des erzeugenden Kreises. Die Evolute der halben Cykloide ANB ist sie selbst in einer umgekehrten und entgegengesetzten Lage. Die Evolute der andern Hälfte schließt sich an AMC in C mittelst einer Spitze und gemeinschaftlicher berührenden zwischen beiden.

10. Man krümme zwey blecherne Streifen nach der Linie AMC, und füge sie auf die Art zusammen, wie die beiden Hälften der Evolute der Cykloide sich an einander schließen, stelle sie umgekehrt, so daß CFB lothrecht, und B der unterste Punct sey. Dann lege man nn AMC einen

Faden mit einem Gewichte in A (welches man man sich als einen einzigen schweren Punct zu gedenken hat), so schwingt dieser schwere Punct in der Cykloide hin und her. Läßt man ihn von irgend einem Puncte N an fallen, so gebraucht er dieselbe Zeit bis zu dem untersten Puncte, und von da wieder bis zu dem in der andern Hälfte der Cykloide mit N gleich hoch liegenden, wie von jedem andern Puncte. Diese merkwürdige Entdeckung, so wie von der Evolute der Cykloide, hat Huygens gemacht, und in der Schrift, Horologium oscillatorium, Parisiis 1673. Fol. erwiesen. Die Gleichheit der Schwingungszeiten findet nur in einem leeren Raume statt, und in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist. Euleri Mechanica T. II. §. 584.

11. Die Evolute der Epicykloide zu finden, deren beschreibender Punct auf dem Umfange des erzeugenden Kreises liegt.

Es ist (Fig. 18.) BDQ der Grundkreis, A sein Mittelpunct; FDG der erzeugende Kreis; E der Mittelpunct; F der beschreibende Punct, GFT die berührende; FD die Normale, auf welcher der Mittelpunct des zu F gehörigen Krümmungskreises O ist. In dem Artikel, Epicykloide, ist gesetzt AD = a; DE = b; AF = z. Ferner ist daselbst (15.) gefunden $FO = \frac{2(a+b)}{a+2b} \times DF$.

Man setze $\frac{2(a+b)}{a+2b} = m$, und für DF seinen Werth, 2b sin G; so ist FO = 2mb sin G. Eben daselbst (5. I.) ist gezeigt, daß $\sin G^2 = \frac{zz-aa}{4b\,a+b)}$, und (6. I.) daß $\sin AFg = \frac{a+2b}{z} \sin G$. Da FO senkrecht auf die berührende Fg oder FG ist, so ist $\cos AFO = \frac{a+2b}{z} \sin G$. Die Linie AO aus dem Mittelpuncte A an den Mittelpunct

der Krümmung wird in dem Dreyeck AFO durch AF, FO und den Winkel AFO gegeben. Es ist nämlich

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 - 2AF \times FO \times \text{col}\,AFO.$$

Aus der zweyten der obigen Formeln ist

$$zz = aa + 4b(a+b)\sin G^2,$$

also ist

$$AO^2 = aa + 4b(a+b-m(a+2b) + m^2b)\sin G^2$$
$$= aa - 4(m-1)b(a-(m-1)b)\sin G^2.$$

Dieser Werth von AO hat dieselbe Form mit dem für z, indem statt des Halbmessers b des erzeugenden Kreises hier $-(m-1)b$, das ist, $-\frac{ab}{a+2b}$ gesetzt ist. Aber die Evolute der Epicykloide kann nicht eine innere seyn, wie die Negation von b sonst nach (Epicykloide, 22.), anzeigt, weil diese nach dem Umfange des Grundkreises hin hohl ist, die Evolute aber nach der äußern Epicykloide und daher nach dem Grundkreise hin conver seyn muß. Allein in dem Artikel, Epicykloide (17.) ist bemerkt, daß die Formel,

$$zz = cc - 4b(c-b)(\sin \tfrac{1}{2}GEF)^2$$

auch für die äußere Epicykloide gehört, nur daß der Wälzungswinkel von dem entferntesten Puncte des bewegten Kreises an gerechnet wird, so wie auch c den Abstand dieses Punctes von dem Mittelpuncte des ruhenden Kreises bedeutet. Also ist auch hier für die Evolute eine äußere Epicykloide zu nehmen, an welcher der Abstand des Scheitels von $A = a$; der Halbmesser des bewegten Kreises $= (m-1)b$ oder $\frac{ab}{a+2b}$, also der Halbmesser des ruhenden $= \frac{aa}{a+2b}$, und der Wälzungswinkel 2G von dem entferntesten Puncte des bewegten Kreises an gerechnet wird. Der Scheitel liegt in B; der Radius zu der ersten Spitze macht mit AB den Winkel $\frac{b\pi}{a}$ oder $\frac{b}{a} \cdot 180°$.

In der innern Epicykloide liegt eine Spitze in B, der nächste Scheitelpunct um den Winkel $\frac{b\pi}{a+2b}$ an dem Mittelpuncte A davon entfernt, wo der Radius $= \frac{aa}{a+2b}$ ist. Die Gränzen für den Radius sind an beiden Epicykloiden dieselben, nämlich a und $\frac{aa}{a+2b}$, aber bey demselben Wälzungswinkel ist die Lage ganz verschieden.

12. Ein anderes Verfahren, die Evolute der Epicykloide zu finden lehrt Joh. Bernoulli, Lect. Hospit. XXIV.

Tschirnhausen hat schon gefunden, daß die Brennlinie des Kreises für parallele Strahlen, die eine Epicykloide ist, durch Abwickelung die Brennlinie eines im Durchmesser doppelt so großen Kreises erzeugt. Es ist aber nur für diesen besondern Fall, daß er es darthut. Acta Erud. 1690, pag. 169.

13. Die Evolute der Epicykloide ist derselben ähnlich. Die Basis und der erzeugende Kreis der letztern haben die Halbmesser, a, b; an der Evolute haben diese Kreise die Halbmesser $\frac{aa}{a+2b}$; $\frac{ab}{a+2b}$, welche sich wie a : b verhalten. S. analytische Ähnlichkeit.

Die Halbmesser der Krümmung an beiden Linien für gleiche Wälzungswinkel verhalten sich wie die Halbmesser der erzeugenden Kreise. Denn die Chorde dieses Winkels, von dem Berührungspuncte des erzeugenden Kreises mit dem Grundkreise bis an den beschreibenden Punct sey an der evolvirenden $= f$, an der Evolute $= g$, so ist an jener der Halbmesser der Krümmung $= \frac{2(a+b)}{a+2b} f$. Setzt man für a und b die gleichnamigen Halbmesser, die zu der Evolute gehören, so bleibt der Factor $\frac{2(a+b)}{a+2b}$ derselbe, und

der Halbmesser der Krümmung ist $\frac{2(a+b)}{a+2b}g$. Da f und g sich wie die Halbmesser ihrer Kreise verhalten, so verhalten sich die Halbmesser der Krümmung eben so.

Bey der ähnlichen Form haben Epicykloide und Evolute entgegengesetzte Lage. Darum nennt man sie auch verkehrt ähnlich. S. Kästners Anal. d. Unendl. §. 578. ff.

14. Die Linie, welche durch die Abwickelung eines Kreises beschrieben wird, ist als eine Epicykloide anzusehen, deren erzeugender Kreis einen unendlich großen Halbmesser hat. Der Kreisbogen FD (Fig. 18.) wird dadurch zu einer geraden Linie, der Winkel E wird Null, und W. FDE ein Rechter, so daß FD die BD berührt. Wir werden dieses aber aus der unmittelbaren Betrachtung dieser Linie folgern.

Es sey ADBA (Tab. X. Fig. 21.) ein Kreis, dessen Mittelpunct C ist. Man ziehe einen Halbmesser CD, und durch D darauf die senkrechte DF, nehme DF gleich dem Bogen AD, so ist F ein Punct der durch die Evolution entstandenen Linie.

Man setze $AC=a$, $CF=z$, ACF oder $ACE=\omega$, so ist $\frac{z}{a}=\text{sec DCF}$, und $DCF=\text{Ang. sec.}\frac{z}{a}$, also $ACD=\omega+\text{Ang. sec}\frac{z}{a}$, und der Bogen $AED=$

$=a\left(\omega+\text{Ang. sec.}\frac{z}{a}\right)$. Diesem ist die gerade DF gleich. Also ist $a\left(\omega+\text{Ang. sec}\frac{z}{a}\right)=\sqrt{(zz-aa)}$, und

$$\omega=\frac{\sqrt{(zz-aa)}}{a}-\text{Ang. sec.}\frac{z}{a}.$$

Hieraus entsteht die Differentialgleichung,

$$\partial\omega = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{az}\,\partial z.$$

Es ist nämlich das Differential des ersten Theils von

$$\omega = \frac{z\partial z}{a\sqrt{(zz-aa)}}, \text{ und } \partial.\text{Ang. sec}\frac{z}{a} = \frac{a\partial z}{z\sqrt{(zz-aa)}},$$

(Different. Formeln, 33.), wo $\frac{s}{a}$ ein Bogen oder Winkel für den Halbmesser als Einheit ist, wie derselbe hier angenommen ist.

Die Gleichung entsteht aus der für die Epicykloide (s. diese, 5.), wenn b unendlich groß gesetzt wird.

Der Bogen AF ist $= \frac{zz-aa}{2a}$, oder die dritte proportionale zu dem Durchmesser AB und dem Kreisbogen AD. — Denn es sey AF $= s$, so ist

$\partial s = \sqrt{(z^2\partial\omega^2 + \partial z^2)}$, (Rectification), das ist,

$\partial s = \frac{z\partial z}{a}$ also $s = \frac{zz}{2a} + \text{Const.}$ Für $z = a$ ist $s = o$, also Const $= -\frac{1}{2}a$, und $s = \frac{zz-aa}{2a}$. Da Bog. AD $= \sqrt{(zz-aa)}$, so folgt daraus der zweyte Ausdruck für AF.

Die Area ACF ist $= \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a}$. Denn es ist ihr Differential $= \frac{1}{2}z^2\partial\omega$ (s. Quadratur), und für $\partial\omega$ seinen Werth gesetzt, ist es $= \frac{z\partial z\sqrt{(zz-aa)}}{2a}$, woraus sogleich das Integral, als die Area, ohne eine Constante zu bedürfen, folgt.

Die Area AEDFA ist $= \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} = \frac{(\text{Bog. AD})^3}{6a}$.

Denn das Dreyeck CDF ist gleich dem Kreissector ACD. Addirt man zu der Area ACF jenes, und subtrahirt dafür diesen, so wird die Area zwischen den Bogen, AF, AD und der geraden DF erhalten.

Zieht man BG senkrecht auf den Endpunct B des Durchmessers AB, und nimmt BG gleich dem halben Umfange des Kreises, so ist G ein Punct der Curve, und die Area AEBGA gleich dem sechsten Theile des mit dem Halbmesser BG beschriebenen Kreises. — Denn da der Halbkreis $= \pi a$ ist, so ist die Area AEBGA $= \frac{\pi^3 a^3}{6a} \frac{1}{6}\pi.\pi^2a^2$. Die Area des mit dem Halbmesser πa beschriebenen Kreises ist $\pi(\pi a)^2$.

Der Halbmesser der Krümmung in F ist $=$ DF. Denn es sey die senkrechte CT aus dem Mittelpuncte C auf die berührende FT $= t$, der Halbmesser der Krümmung $= r$, so ist $r = \frac{z\partial z}{\partial t}$, (s. Krümmungskreis). Es ist aber CT $=$ DF, da DF den Kreis berührt, und auf die Evolvirende senkrecht ist, also ist $t = \sqrt{(zz-aa)}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{\sqrt{(zz-aa)}}$, folglich $r = \sqrt{(zz-aa)} =$ DF.

Die letztere Formel folgt sogleich aus der für den Halbmesser der Krümmung an der Epicykloide, wenn (s. das. 15.) der Halbmesser b unendlich groß genommen wird, also Bogen und Chorde sich gleich werden. Wegen der Formel für den Bogen AF, um sie aus der für die Epicykloide (s. das. 8.) herzuleiten, ist zu bemerken, daß für einen verschwindenden Winkel φ ist $1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$, (s. Cyklometrie, 6.), und daß der Bogen der Epicykloide sich auch so ausdrucken lasse, $s = \frac{4b(a+b)}{a}(1-\cos G)$,

oder $\frac{4b(a+b)}{a}(1-\cos\frac{1}{2}E)$, woraus sich denn für ein unendliches b, mit Zuziehung jener Formel, der Werth des Bogens ergiebt. Was die Area betrifft, so ist zu merken, daß ein Kreissegment für den Winkel φ mit dem Halbmesser b ist $= \frac{1}{2}b^2\varphi - b^2\sin\frac{1}{2}\varphi.\cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}b^2(\varphi-\sin\varphi)$. Da $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \text{etc.}$ ist (Cyklometrie, 5.) so verwandelt sich für ein verschwindendes φ das Segment in $\frac{1}{12}b^2\varphi^3$, wo $b\varphi$ der Bogen zu dem verschwindenden Winkel ist. Mittelst dieses Werthes des Segments verwandelt sich die Formel für die Epichkloide (10.) in die hier gefundene.

Die Abwicklung des Kreises kann unendlich oft wiederholt werden, daher die dadurch erzeugte Curve unendlich viele, sich immer mehr erweiternde Umläufe um C macht.

15. Die Linie, deren Evolute der Kreis ist, hat einen wichtigen Nutzen in der Mechanik. Wenn die Hebelatte eines senkrechten Stampfers mit gleichförmiger Kraft und Bewegung ohne Klemmung gehoben werden soll, so muß der Hebedaumen nach einer Curve, wie jene ist, geformt seyn. Es ist AB der Durchmesser der Daumenwelle oder eines concentrischen Kreises. Man sehe meine Encyklopädie, 2te Ausg. Th. III. S. 476.

16. Die mechanische Construction der Curve ist leicht. Man setze BG senkrecht auf AB in B, und mache BG dem halben Umfange gleich, so genau als es der Maaßstab zuläßt. Den halben Umfang theile man in 3, oder 4 oder mehr Theile, und in eben so viele die Linie BG, so erhält man für jeden Theilungspunct wie D die Länge der auf CD senkrechten DF. Auf ähnliche Art wird die krumme Linie weiter fortgesetzt. Man kann sich bequem des Halbmessers der Krümmung in jedem Puncte bedienen, und die Curve beynahe aus Kreisbogen zusammen setzen.

17. Die Evolute der logarithmischen Spirallinie, an welcher der Winkel der Curve mit der berührenden ein halber Rechter ist, ist sie selbst, in einer ähnlichen Lage, wie diese; ist jener Winkel ein anderer, auch beständiger, so ist die Evolute eine ähnliche Spirale. S. Spirallinie.

Die Area AEDFA ist $= \frac{(zz-aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} = \frac{(\text{Bog. AD})^3}{6a}$.

Denn das Dreyeck CDF ist gleich dem Kreissector ACD. Addirt man zu der Area ACF jenes, und subtrahirt dafür diesen, so wird die Area zwischen den Bogen, AF, AD und der geraden DF erhalten.

Zieht man BG senkrecht auf den Endpunct B des Durchmessers AB, und nimmt BG gleich dem halben Umfange des Kreises, so ist G ein Punct der Curve, und die Area AEBGA gleich dem sechsten Theile des mit dem Halbmesser BG beschriebenen Kreises. — Denn da der Halbkreis $= \pi a$ ist, so ist die Area AEBGA $= \frac{\pi^3 a^3}{6a} \frac{1}{6}\pi . \pi^2 a^2$. Die Area des mit dem Halbmesser πa beschriebenen Kreises ist $\pi(\pi a)^2$.

Der Halbmesser der Krümmung in F ist $=$ DF. Denn es sey die senkrechte CT aus dem Mittelpuncte C auf die berührende FT $= t$, der Halbmesser der Krümmung $= r$, so ist $r = \frac{z\partial z}{\partial t}$, (s. Krümmungskreis). Es ist aber CT $=$ DF, da DF den Kreis berührt, und auf die Evolvirende senkrecht ist, also ist $t = \sqrt{(zz-aa)}$, und $\partial t = \frac{z\partial z}{\sqrt{(zz-aa)}}$, folglich $r = \sqrt{(zz-aa)} =$ DF.

Die letztere Formel folgt sogleich aus der für den Halbmesser der Krümmung an der Epicykloide, wenn (s. das. 15.) der Halbmesser b unendlich groß genommen wird, also Bogen und Chorde sich gleich werden. Wegen der Formel für den Bogen AF, um sie aus der für die Epicykloide (s. das. 8.) herzuleiten, ist zu bemerken, daß für einen verschwindenden Winkel φ ist $1 - \cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2$, (s. Cyklometrie, 6.), und daß der Bogen der Epicykloide sich auch so ausdrucken lasse, $s = \frac{4b(a+b)}{a}(1-\cos G)$,

oder $\frac{4b(a+b)}{a}(1-\cos\frac{1}{2}E)$, woraus sich denn für ein unendliches b, mit Zuziehung jener Formel, der Werth des Bogens ergiebt. Was die Area betrifft, so ist zu merken, daß ein Kreissegment für den Winkel φ mit dem Halbmesser b ist $= \frac{1}{2}b^2\varphi - b^2 \sin\frac{1}{2}\varphi . \cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}b^2(\varphi - \sin\varphi)$. Da $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 +$ etc. ist (Cyklometrie, 5.) so verwandelt sich für ein verschwindendes φ das Segment in $\frac{1}{12}b^2\varphi^3$, wo $b\varphi$ der Bogen zu dem verschwindenden Winkel ist. Mittelst dieses Werthes des Segments verwandelt sich die Formel für die Epicykloide (10.) in die hier gefundene.

Die Abwicklung des Kreises kann unendlich oft wiederholt werden, daher die dadurch erzeugte Curve unendlich viele, sich immer mehr erweiternde Umläufe um C macht.

15. Die Linie, deren Evolute der Kreis ist, hat einen wichtigen Nutzen in der Mechanik. Wenn die Hebelatte eines senkrechten Stampfers mit gleichförmiger Kraft und Bewegung ohne Klemmung gehoben werden soll, so muß der Hebedaumen nach einer Curve, wie jene ist, geformt seyn. Es ist AB der Durchmesser der Daumenwelle oder eines concentrischen Kreises. Man sehe meine Encyklopädie, 2te Ausg. Th. III. S. 476.

16. Die mechanische Construction der Curve ist leicht. Man setze BG senkrecht auf AB in B, und mache BG dem halben Umfange gleich, so genau als es der Maaßstab zuläßt. Den halben Umfang theile man in 3, oder 4 oder mehr Theile, und in eben so viele die Linie BG, so erhält man für jeden Theilungspunct wie D die Länge der auf CD senkrechten DF. Auf ähnliche Art wird die krumme Linie weiter fortgesetzt. Man kann sich bequem des Halbmessers der Krümmung in jedem Puncte bedienen, und die Curve beynahe aus Kreisbogen zusammen setzen.

17. Die Evolute der logarithmischen Spirallinie, an welcher der Winkel der Curve mit der berührenden ein halber Rechter ist, ist sie selbst, in einer ähnlichen Lage, wie diese; ist jener Winkel ein anderer, auch beständiger, so ist die Evolute eine ähnliche Spirale. S. Spirallinie.

18. Die Evolution einer krummen Linie iſt zuerſt von Huygens eingeführt worden. In der Schrift, Horologium oſcillatorium, hat er ſie ſonthetiſch, nach der Methode der Alten, behandelt. Die Analyſis des Unendlichen war 1673. als die Schrift herauskam, noch nicht im Gebrauche, nur Newtons Eigenthum. Tſchirnhauſens Bemerkung über die Evolution einer Epicykloide in einem einzelnen Falle iſt in (12.) angeführt. Jakob Bernoulli fand, daß die logarithmiſche Spirallinie mit dem (17.) angegebenen beſtändigen Winkel zur Evolute ſich ſelbſt hat. Acta Erud. 1692. Hernach zeigte G. W. Kraft in den ältern Commentarien der Petersburger Akademie, T. II. a. a. 1727, daß nur die Cykloide, die Epicykloiden, und die Spiralen durch Abwickelung ſich ſelbſt oder ähnliche erzeugen. Euler hat dieſe Unterſuchung auch vorgenommen, und auf die Evoluten der Evoluten angewandt. Inveſtigatio curvarum, quae evolutae ſui ſimiles producunt, Comm. Acad. Petrop. vet. T. XII. Etwa dreyßig Jahre nachher hat er dieſe Unterſuchung noch allgemeiner angeſtellt, mit der in einem ſo langen Zeitraume gewonnenen Erweiterung der Analyſis. Inveſtigatio curvarum, quae ſimiles ſunt ſuis evolutis, vel primis, vel ſecundis, vel tertiis, vel ordinis cujuscunque. Nova Acta Petrop. T. I. a. a. 1783. Ein Auszug aus der ältern Euleriſchen Abhandlung in Käſtners Analyſis d. Unendl. §. 578 — 590.

Evolution, analytiſche, iſt entweder daſſelbe mit Ausziehung einer Wurzel aus einer zwey- oder mehrtheiligen Größe, oder allgemeiner, die Umwandlung irgend einer analytiſchen Zuſammenſetzung in ein Aggregat von Gliedern, es ſey von einer endlichen Anzahl oder einer unendlichen, z. B. eines Products, eines Quotienten, der Wurzel einer Gleichung, der Größe, nach welcher eine Reihe geordnet iſt, wohin auch der zuerſt angeführte Fall gehört. Das entgegengeſetzte der Evolution iſt Involution.

Exhauſtions-Methode iſt ein Verfahren, Größen, welche ſich durch ihre vollſtändigen Theile nicht

vergleichen laſſen, vermittelſt anderer Größen zu vergleichen, welche jene zwar nicht vollkommen erſchöpfen, aber doch ihnen als Gränzen unbeſtimmt nahe gebracht werden können.

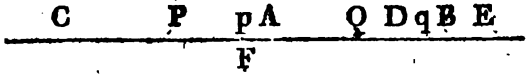
Die alten Geometer bedienten ſich deſſelben bey Vergleichung krummlinichter Figuren, krummer Oberflächen und runder Körper. Es machte ihre Analyſis des Unendlichen aus, welche näher zu kennen es ſich verlohnt, ſowohl um ſie mit der unſrigen, ſo viel weiter greifenden, zu vergleichen, als auch um zu ſehen, wie künſtlich ſie ein ſehr einfaches Werkzeug zu gebrauchen gewußt haben. Sie betrachteten eine krumme Linie nicht als ein Polygon von unendlich vielen Seiten; ſie zerlegten Figuren, Körper und Oberflächen, nicht in unendlich viele, unendlich kleine Theile, ſondern das Krumme unterſchieden ſie ſorgfältig von dem Geradlinichten, und verglichen nur Theile, die oſtenſibel ſind, oder eine endliche, vergleichbare Größe haben. Sie betrachteten aber die krummlinichten Figuren als Gränzen von geradlinichten, und zeigten, daß das Verhältniß derſelben zu einer ebenen weder größer noch kleiner ſeyn könne, als ein gewiſſes beſtimmtes, und ſo auch an Körpern und Oberflächen. Es war bey ihnen ein Grundſatz, daß jede Größe ſo oft genommen werden kann, bis ſie jede Größe ihrer Art übertrifft; ſie würden aber den Satz, daß eine unendlich kleine Größe, unendlich oft genommen, etwas endliches giebt, ſchwerlich ſich haben gefallen laſſen.

Ein Satz, der zu den Beweiſen in der Geometrie des Krummen von den Alten gebraucht wird, iſt folgende: Sind zwey ungleiche Größen, A, a, gegeben, und man nimmt von der größern A mehr als die Hälfte weg, von dem Reſte wieder mehr als die Hälfte, und ſo immer fort, ſo kommt man irgend einmahl auf einen Reſt, der kleiner iſt, als die gegebene kleinere Größe a. Euklides Elemente, X, 1. Die Alten ſagten nicht, die Theile einer Größe können unendlich klein genommen oder gedacht werden.

Die Exhauſtions-Methode, welche, wie geſagt, die Analyſis des Unendlichen der Alten ausmacht, iſt von vierley Art. Die erſte lernt man aus dem zwölften Buche

der Euklidischen Elemente, die andern aus den Schriften des Archimedes kennen.

I. Die erste Methode hat folgenden Gang. Die nicht erschöpfenden Theile zweyer Größen, welche diesen aber unbestimmt nahe kommen können, verhalten sich beständig wie zwey gegebene, a:b, so verhalten sich auch die Gränzen wie a:b.



Es stellen die Linien CA, CB die beiden zu vergleichenden Größen vor, diese mögen nun Linien, Flächen oder Körper seyn, als allgemeine Zeichen, wie die Buchstaben bey den Neuern. Die Theile CP, CQ beider Größen sind auf eine gewisse Art der Form nach bestimmt, es sey nun, daß sie einerley Form oder verschiedene haben; sie haben dadurch, als zusammengehörige Größen, ein gegebenes Verhältniß, a:b, bey veränderlicher Größe, und können ihren Gränzen, CA, CB, so nahe kommen, daß der Unterschied kleiner ist als irgend eine gegebene Größe. Verhalten sich nun CA und CB nicht wie a:b, so sey a:b = CA:Z, wo Z entweder kleiner oder größer als CB ist. Es sey zuerst Z kleiner als CB, und werde durch CD angedeutet. Man nehme von CB den Theil Cq, der die gegebene Form hat, und größer als CD sey, welches der Voraussetzung nach möglich ist, und von CA den Theil Cp, ebenfalls von der gegebenen Form, und mit Cq zusammengehörig, so ist Cp:Cq = a:b. Da CA:CD = a:b ist auch Cp:Cq = CA:CD. Nun ist Cp < CA ist, also muß Cq < CD seyn. Dieses widerspricht dem Vorigen, daß Cq > CD sey. Also ist Z nicht kleiner als CB. — Eben so wird bewiesen, daß nicht seyn kann b:a = CB:Y, wenn Y kleiner als CA ist.

Zweytens sey Z größer als CB, und werde durch CE bezeichnet, so daß a:b = GA:CE, oder b:a = CE:CA sey. Man mache CE:CA = CB:CF, so ist, da CE > CB seyn soll, auch CA > CF. Nun ist ange-

nommen b:a = CE:CA, also ist b:a = CB:CF, wo CF kleiner als CA ist. Dieses ist nach dem ersten Falle unmöglich. Also ist nicht a:b = CA:CE, wo CE größer als B ist.

Da nun das Verhältniß der durch CA, CB bezeichneten Größen weder größer noch kleiner seyn kann als das gegebene, so ist es diesem gleich.

Das zwölfte Buch der Euklidischen Elemente enthält größtentheils Anwendungen dieser Methode. Im 2ten Satze wird erwiesen, daß Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Hier sind CA, CB die Kreisflächen, CP, CQ oder Cp, Cq, eingeschriebene gleichnamige ordentliche Polygone. Die Form ist hier, daß es gleichseitige Figuren von gleicher Anzahl der Seiten sind. Diese verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser ihrer zugehörigen Kreise, und können denselben so nahe kommen, daß der Unterschied kleiner wird als irgend eine anzugebende Größe. Pappus leitet hieraus den Satz her, daß die Umfänge der Kreise sich wie ihre Durchmesser verhalten, und bemerkt, daß dieses auch daraus fließet, daß die Umfänge ähnlicher gleichseitiger Vielecke sich wie die Durchmesser der zugehörigen Kreise verhalten. Collect. mathem. IV. 11.

Der 5te Satz ist, daß dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Die Vorbereitung dazu gehört zu den künstlichsten in der Elementar-Geometrie. Euklides schneidet von den beiden Pyramiden Stücke ab, die sich wie die Grundflächen verhalten, und in jeder zwey Pyramiden übrig lassen, die kleiner als irgend eine gegebene Größe sind. Die beiden gegebenen Pyramiden sind hier die durch CA, CB bezeichneten Größen, die Summen der folgeweise abgeschnittenen Stücke, welche alle einzeln sich wie die Grundflächen der Pyramiden verhalten, daher die Summen auch dasselbe Verhältniß haben, sind CP, CQ, oder Cp, Cq.

Der 10te Satz ist: Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm gleiche Höhe und dieselbe Grundfläche hat. Hier sind Kegel und Cylinder die beiden

zu vergleichenden Größen; die annähernden sind eine Pyramide und ein Prisma über gleichnamigen ordentlichen Polygonen der Grundfläche jener Körper, mit derselben Höhe. Diese haben das Verhältniß 1:3, daher Kegel und Cylinder dasselbe haben.

Der 11te Satz ist: Kegel und Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. Es verhalten sich nämlich die Pyramiden über den ähnlichen ordentlichen eingeschriebenen Polygonen wie diese Polygone, das ist, wie die Kreisflächen, also ihre Gränzen, die Kegel, eben so; und auch die Dreyfachen der Kegel oder die Cylinder.

Der 12te Satz ist: Ähnliche Kegel und Cylinder sind in dreyfachem Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen. Hier wird gezeigt, daß die Pyramiden über den ähnlichen Polygonen der Grundflächen bey derselben Höhe mit den Kegeln das dreyfache Verhältniß der Durchmesser haben. Daß sie den Kegeln näher als um jeden gegebenen Unterschied kommen können, ist vorher schon gewiesen. Die Kegel, die Euklides betrachtet, sind senkrechte.

Der 18te Satz ist: Kugeln sind in dem dreyfachen Verhältniß ihrer Durchmesser. Nämlich ähnliche in den Kugeln beschriebene Polyedra verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser (in dem dreyfachen Verhältnisse derselben), und können ihnen näher als um jede gegebene Größe kommen.

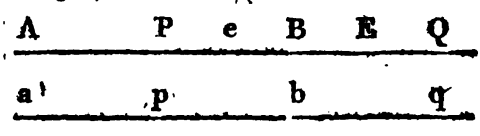
Archimedes beweiset auf diese Art (von Konoiden und Sphäroiden, Satz 5.) den Satz, daß die Fläche einer Ellipse sich zu dem Kreise über ihrer großen Axe verhält wie die kleine Axe zu der großen. Es sey AB (Tab. X. Fig. 22.) die große Axe, CD die halbe kleine, ADB die Hälfte der Ellipse, AEB ein Halbkreis über AB. In dem Kreise werde ein gleichseitiges Vieleck (dessen Seitenzahl ein Vielfaches der Vier sey) beschrieben, und von den Winkelpuncten e werden mit EC parallelen gezogen, welche die Ellipse in den Puncten d treffen. Durch die successiven Puncte d nebst D werden Chorden gelegt, so entstehen in der Ellipse Vierecke, wie CDdc, cddc, und in dem Kreise eben solche. Es ist CE : CD = ce : cd

(Ellipſe, 1.), und daher verhalten ſich die Vierecke über derſelben Grundlinie in beiden Figuren wie CE:CD. Sie zerfallen nämlich jedes in zwey Dreyecke, von welchen die auf gleiche Art liegenden dieſes Verhältniß haben. Daſſelbe Verhältniß haben auch die beiden Paare von Dreyecken bey A und B. Die Polygone in beiden Figuren verhalten ſich alſo auch wie CE:CD. Da dieſes Verhältniß beſtändig bleibt, wie groß auch die Anzahl der Vierecke oder der Chorden genommen wird, und da die Polygone immer weniger von dem Kreiſe und der Ellipſe verſchieden werden, ſo muß jenes Verhältniß auch für ihre Gränzen, den Kreis und die Ellipſe, gelten. Archimedes beweiſet aber dieſes noch auf folgende, beſondere Art.

Man nehme einen Kreis Z, deſſen Halbmeſſer z die mittlere proportionale zwiſchen den beiden AC, CD (a und b, iſt; den Kreis über AB nenne man A, die Ellipſe E. Es iſt nun $A:Z = aa:zz = a:b$ (ſ. Proportion). Iſt Z der Ellipſe nicht gleich, ſo ſey zuerſt Z größer als E. In dem Kreiſe Z beſchreibe man ein gleichſeitiges Vieleck, ſo daß dieſes von Z weniger unterſchieden ſey als E es iſt. Dadurch wird das Polygon in Z größer als E geſetzt. Da das Polygon in A zu dem in E ſich wie a:b verhält, eben ſo wie jenes zu dem in Z, ſo iſt das Polygon in E dem in Z gleich. Es müßte alſo das Polygon in E größer als die Ellipſe ſelbſt ſeyn. Folglich iſt Z nicht größer als E. — Es ſey nun die Ellipſe größer als der Kreis Z. In der Ellipſe werde ein Vieleck beſchrieben, das von jener weniger unterſchieden ſey als der Kreis Z von der Ellipſe E. (Dieſes iſt möglich, weil das Dreyeck in einem Abſchnitte größer iſt als die Hälfte deſſelben). So iſt das Vieleck in E größer als der Kreis Z. Nun iſt vorher erwieſen, daß das Vieleck in Z dem in E gleich iſt, alſo wäre jenes Vieleck größer als der Kreis. — Demnach iſt die Ellipſe ſo groß als der Kreis, und verhält ſich zu dem Kreiſe über der großen Axe, wie die kleine Axe zur großen.

II. Eine beſtimmte Größe A liegt zwiſchen zwey andern unbeſtimmten, aber der Form nach gegebenen Größen,

so daß ihr Unterschied von diesen beliebig klein gemacht werden kann. Eine andere gleichfalls bestimmte Größe B liegt zwischen denselben oder noch weniger verschiedenen Größen, (indem die größere kleiner als die größere jener, und die kleinere größer als die kleinere jener ist), so sind A und B gleich groß.



In der allgemeinen Abbildung bedeuten AB, ab zwey bestimmte Größen von verschiedener Form, AP, AQ zwey unbestimmte, zwischen welchen AB liegt, so daß das Verhältniß AP:AQ dem von 1:1 näher kommen möge, als irgend ein Verhältniß einer kleinern zu einer größern Größe. Eben so falle ab zwischen zwey Größen ap, aq, deren Verhältniß dem von 1:1 näher kommen könne, als irgend ein Verhältniß zweyer auf ähnliche Art ungleichen Größen, und ap sey entweder gleich AP oder größer, so wie aq gleich AQ oder kleiner. Bey diesen Annahmen müssen die in der Form verschiedenen, AB, ab, gleich groß seyn.

Man mag dieses gleich daraus schließen, daß sonst die Verhältnisse AP:AQ und ap:aq dem von 1:1 nicht unbedingt nahe genommen werden könnten. Wäre ab größer oder kleiner als AB, wie es die AE oder Ae sind, so wäre entweder das Verhältniß AB:AE oder das Ae:AB, die Gränze für AP:AQ.

Die Beweisart des Archimedes im Allgemeinen ist folgende.

Man setze erstlich ab sey größer als AB, oder gleich AE. Da das Verhältniß AQ:AP dem 1:1 sich unbedingt nähern kann, so kann dasselbe kleiner als das, AE:AB, genommen werden *). Da ferner aq so groß oder kleiner

*) Ein Verhältniß a:b ist kleiner als ein anderes, c:d, wenn der Quotient der Division von a durch b kleiner ist als der von c durch d; es ist größer in dem entgegengesetzten Falle.

als AQ ist, und ab = AE, so ist das Verhältniß aq : AP kleiner als das, ab : AB. Dieses ist nicht möglich, da aq größer als ab, und AP kleiner als AB ist.

Man setze zweytens ab sey kleiner als AB, oder gleich Ae. Man nehme nun das Verhältniß AQ : AP kleiner als AB : Ae, so ist, weil ap so groß oder größer als AP ist, das Verhältniß AQ : ap kleiner als AB : ab. Dieses ist nicht möglich, weil AQ größer als AB, und ap kleiner als ab ist.

Demnach muß ab = AB seyn.

1. Ein Beyspiel giebt die bekannte von Archimedes gemachte Vergleichung der Kreisfläche mit einem Dreyeck, dessen Grundlinie den Umfang des Kreises, und die Höhe der Halbmesser desselben ist. Der Kreis ist die durch AB bezeichnete Größe, das Dreyeck die ab; die AP ist ein eingeschriebenes ordentliches Vieleck, die AQ ein ähnliches umgeschriebenes; die Größen, ap, aq, sind einerley mit diesen.

2. Archimedes erweiset in dem ersten Buche von Kugel und Cylinder, 13ten Satze, daß eines senkrechten Cylinders Oberfläche einem Kreise gleich ist, der zum Halbmesser die mittlere proportionale zwischen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche hat. Die Oberfläche des Cylinders fällt zwischen die Oberflächen zweyer Prismen, deren eines mit seinen Seitenflächen den Cylinder berührt, das andere seine Seitenlinien in der cylindrischen Fläche liegen hat. Die Oberflächen der Prismen sind dem Rechteck von dem Umfange der Grundfläche und der Höhe des Prisma gleich. Die Grundflächen der beiden Prismen, wenn sie ähnliche gleichseitige Vielecke sind, können sich näher als um jeden angebbaren Unterschied kommen, also auch die darauf errichteten Prismen. Was von ihnen gilt, gilt auch von ihrer Gränze. Archimedes schließt aber nicht aus einem allgemeinen Grundsatze, sondern gebraucht Vergleichungen, die jedem Falle besonders angemessen sind. Die Grundfläche des Cylinders heiße A, der Kreis, dessen Halbmesser die angegebene mittlere proportionale ist, heiße B. Um

und in den Kreis A ſeyn gleichſeitige ähnliche Vielecke gezeichnet, auf welchen Prismen, ſo hoch als der Cylinder, errichtet werden. Die Oberflächen dieſer Prismen (ohne die Grundflächen) werden in Dreyecke verwandelt. Dieſe nennen, D, d, heißen. Um und in den Kreis B werden Vielecke, jenen Vielecken ähnliche, gezeichnet. Das äußere iſt dem Dreyeck D gleich, das innere kleiner als das Dreyeck d. Hier ſind die cylindriſche runde Oberfläche und der Kreis B die in der allgemeinen Darſtellung der Methode durch die Linien AB, ab bezeichneten Größen; die bey den Dreyecke ſind die Linien AP, AQ; die beiden zu dem Kreiſe B gehörigen Vielecke ſind durch ap, aq vorgeſtellt, von welchen die ap der AP immer gleich, aber aq kleiner als AQ iſt. Nun zeigt Archimedes nach der angegebenen Methode, daß der Kreis B weder kleiner noch größer ſeyn kann, als die cylindriſche runde Oberfläche, alſo derſelben gleich iſt.

3. Auf gleiche Art erweiſet Archimedes (Satz 15.), daß die krumme Oberfläche eines gleichſeitigen Kegels einem Kreiſe gleich iſt, der zum Halbmeſſer die mittlere proportionale zwiſchen der Seite des Kegels und dem Halbmeſſer des Grundkreiſes hat.

Einen andern Beweis dieſes Satzes, nach derſelben Methode, giebt Maclaurin, treatiſe of fluxions, pag. 11.

4. Die Oberfläche einer Kugel iſt das Vierfache des größten Kreiſes derſelben. Archimedes a. a. O. Satz 31. Der Vorbereitungs- und Hülfsſätze zu dem Erweiſe ſind viele, die aber ſehr verdienen ſtudirt zu werden. In einem Kreiſe werde ein gleichſeitiges Vieleck beſchrieben, wovon die Anzahl der Seiten ein vierfaches der Vier iſt; um den Kreis ein ähnliches, deſſen Seiten mit denen jenes parallel ſind. Den Kreis und die beiden Vielecke laſſe man ſich um einen Durchmeſſer drehen, ſo beſchreibt der Kreis eine Kugel, und die beiden Vielecke beſchreiben Polyedra, deren Oberfläche theils aus Kegelflächen, theils aus Kegelzonen beſtehen. Zwiſchen beiden liegt die Oberfläche der Kugel. Das Verhältniß der Oberflächen von den beiden Polyedren iſt das duplicirte

der Seiten in den beiden Vielecken, und kann dem Verhältnisse der Gleichheit näher als jedes gegebene gebracht werden. Ferner ist die Oberfläche des innern Polyedrum kleiner als das Vierfache des größten Kreises der Kugel, die des äußern Polyedrum größer als dieses Vierfache. Demnach sind die Oberfläche der Kugel und das Vierfache ihres größten Kreises zwischen denselben Größen enthalten, wie in dem allgemeinen Schema die AB, ab zwischen AP und AQ, welchen hier ap und aq gleich sind. Die Oberfläche der Kugel ist also gleich dem Vierfachen ihres größten Kreises. Archimedes zeigt besonders, daß jene nicht größer noch kleiner seyn könne als dieses.

5. Eine Kugel ist das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich ist. Archimedes a. a. O. Satz 32. Es werden wieder zwey solche Polyedra in und um die Kugel construirt, wie in (4.). Zwischen beiden liegt die Kugel. Das Verhältniß beider Körper ist das triplicirte der Seiten in den beiden Vielecken, durch deren Umdrehung die Polyedra erzeugt werden, und kann dem Verhältnisse der Gleichheit näher als jedes gegebene gebracht werden. Ferner ist das innere Polyedrum kleiner als das Vierfache eines Kegels, dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist, das äußere aber größer als dieses Vierfache. Daraus folgt nun wie bey (4.), daß die Kugel dem Vierfachen dieses Kegels gleich ist.

Pappus giebt einen andern Beweis des Satzes von der Vergleichung der Kugel mit einem Kegel, Collect. mathem. V. 35.

6. Die Oberfläche eines Kugelschnittes, der kleiner ist als die Halbkugel, ist einem Kreise gleich, der zum Halbmesser die vom Scheitel des Abschnittes an den Umfang des Grundkreises gezogene gerade Linie hat. Archimedes a. a. O. S. 40. Diese Oberfläche fällt zwischen die Oberflächen der Abschnitte zweyer solcher Polyedren, als vorher construirt sind, über dem Grundkreise. Das Verhältniß dieser Oberflächen kann dem der Gleichheit näher kommen

ein Glied mehr hat als die Reihe der innern. Nun ist in einer arithmetischen Reihe die Summe aller Glieder grö als die halbe Summe von eben so vielen, dem grö von ihnen gleichen, hingegen ist die Summe aller Gli ohne das größte kleiner als eben diese halbe Sum (Archim. 1. S.), das ist, die Summe der äußern Cylin ist größer als der halbe Cylinder über der mit DC beschr benen Grundfläche bey der Höhe AD, so wie die Summ der innern Cylinder kleiner ist als die Hälfte dieses Cyli ders. Beide Summen sind um den untersten Cylin RCFE unterschieden, der durch fortgesetzte Halbtheilunge von AD kleiner als jede gegebene Größe werden kann. D paraboliſche Kegel liegt ebenfalls zwischen beiden Summe Folglich ist derselbe der Hälfte des Cylinders, mit de Halbmesser DC und der Höhe AD, gleich.

Archimedes gebraucht hier auch die Beweisart, wo durch gezeigt wird, daß der paraboliſche Kegel weder größe noch kleiner seyn könne als des gedachten Cylinders Hälft vergleicht aber die paraboliſchen Kegel mit einem gera linichten, der dieselbe Grundfläche und Höhe hat. Da e aber doch den Cylinder zur Vergleichung mit dem gera linichten Kegel gebraucht, so wird es bequemer seyn, sein Beweisart zur Vergleichung mit dem Cylinder anzuwende Man bezeichne den paraboliſchen Kegel durch K, den Cyli der über BC bey der Höhe AD durch C, den umgeschrieb nen Körper durch U, den eingeschriebenen durch E. Wen K nicht ist $= \frac{1}{2}C$, so sey erstlich K größer, und der Unte schied $= u$, so daß $K - \frac{1}{2}C = u$. Man nehme der Thei auf AD so viele, daß der unterste Cylinder BF kleine werde als u, oder daß $U - E < u$ sey. So i $U - E < K - \frac{1}{2}C$. Da $U > K$ ist, so ist $E > \frac{1}{2}C$ Vorher aber ist erwiesen, daß $E < \frac{1}{2}C$ ist, also kann d paraboliſche Kegel nicht größer seyn als die Hälfte des C linders. — Zweytens mag er nun kleiner seyn, und d Unterschied sey u, so daß $\frac{1}{2}C - K = u$. Wiederum s $U - E < u$, so ist $U - E < \frac{1}{2}C - K$. Da $E < K$ so ist $U < \frac{1}{2}C$. Es ist aber vorher erwiesen, daß $U > \frac{1}{2}C$ ist, folglich kann der paraboliſche Kegel auch nicht kleine

$Q+q=(a+\alpha)+(b+\beta)+(c+\gamma)+(d+\delta)+$ etc.

$Q-q=(a-\alpha)+(b-\beta)+(c-\gamma)+(d-\delta)+$ etc.

Man könne nun die Größen $Q+q$ und $Q-q$ jede mit einer andern vergleichen, so daß die Werthe derselben einen gemeinschaftlichen Theil haben, dem sie desto näher kommen, je mehr der Theile a, b, c, etc. genommen werden. Dieser Theil ist der Werth von Q, da Q die gemeinschaftliche Gränze beider Reihen ist, an welcher sie sich entgegen kommen.

Das leichteste Beyspiel dieser Methode giebt der parabolische Kegel, nach Archimedes von Konoiden und Sphäroiden, Satz 23. Es sey (Fig. 23.) BAC, eine Parabel, deren Axe AD ist, auf welche die Chorde BC senkrecht gezogen ist. Man lasse die Figur sich um die Axe AD ganz herumdrehen, so beschreibt sie einen parabolischen Kegel. Dieser soll mit dem Cylinder, der über der Grundfläche mit dem Durchmesser BC die Höhe AD hat, verglichen werden. — Man theile AD in irgend eine Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte parallele Chorden mit BC. Durch die Puncte, wo diese die Parabel treffen, ziehe man Parallelen mit AD bis an die beiden nächsten Chorden und ihre Verlängerungen. Die Rechtecke und das parabolische Segment beschreiben bey der Umdrehung der Figur jene Cylinder, diese parabolische Kegelsegmente. Der Unterschied aller äußern Cylinder, wie LMNO, von allen innern, wie PQRS, ist der unterste äußere Cylinder BEFC. Dieser kann kleiner gemacht werden als jeder angegebene Raum. Da die Quadrate der Chorden, wie QR, sich wie die dazu gehörigen Abscissen der Axe, AT, verhalten, so verhalten sich die cylindrischen Segmente des umgeschriebenen und eingeschriebenen Körpers wie die zugehörigen Abscissen, bey dem äußern bis zu der untern Basis, bey den innern bis zu der obern genommen. Sie machen daher, jede Folge für sich, eine arithmetische Reihe aus, deren Glieder sich wie die Zahlen, 1, 2, 3, 4, etc. verhalten. Beide Reihen enthalten dieselben Glieder, nur daß die Reihe der äußern Cylinder

ein Glied mehr hat als die Reihe der innern. Nun ist in einer arithmetischen Reihe die Summe aller Glieder größer als die halbe Summe von eben so vielen, dem größten von ihnen gleichen, hingegen ist die Summe aller Glieder ohne das größte kleiner als eben diese halbe Summe (Archim. 1. S.), das ist, die Summe der äußern Cylinder ist größer als der halbe Cylinder über der mit DC beschriebenen Grundfläche bey der Höhe AD, so wie die Summe der innern Cylinder kleiner ist als die Hälfte dieses Cylinders. Beide Summen sind um den untersten Cylinder BCFE unterschieden, der durch fortgesetzte Halbtheilungen von AD kleiner als jede gegebene Größe werden kann. Der paraboliſche Kegel liegt ebenfalls zwischen beiden Summen. Folglich ist derselbe der Hälfte des Cylinders, mit dem Halbmesser DC und der Höhe AD, gleich.

Archimedes gebraucht hier auch die Beweisart, wodurch gezeigt wird, daß der paraboliſche Kegel weder größer noch kleiner seyn könne als des gedachten Cylinders Hälfte, vergleicht aber die paraboliſchen Kegel mit einem geradlinichten, der dieselbe Grundfläche und Höhe hat. Da er aber doch den Cylinder zur Vergleichung mit dem geradlinichten Kegel gebraucht, so wird es bequemer seyn, seine Beweisart zur Vergleichung mit dem Cylinder anzuwenden. Man bezeichne den paraboliſchen Kegel durch K, den Cylinder über BC bey der Höhe AD durch C, den umgeschriebenen Körper durch U, den eingeschriebenen durch E. Wenn K nicht ist $= \frac{1}{2}C$, so sey erstlich K größer, und der Unterschied $= u$, so daß $K - \frac{1}{2}C = u$. Man nehme der Theile auf AD so viele, daß der unterste Cylinder BF kleiner werde als u, oder daß $U - E < u$ sey. So ist $U - E < K - \frac{1}{2}C$. Da $U > K$ ist, so ist $E > \frac{1}{2}C$. Vorher aber ist erwiesen, daß $E < \frac{1}{2}C$ ist, also kann der paraboliſche Kegel nicht größer seyn als die Hälfte des Cylinders. — Zweytens mag er nun kleiner seyn, und der Unterschied sey u, so daß $\frac{1}{2}C - K = u$. Wiederum sey $U - E < u$, so ist $U - E < \frac{1}{2}C - K$. Da $E < K$, so ist $U < \frac{1}{2}C$. Es ist aber vorher erwiesen, daß $U > \frac{1}{2}C$ ist, folglich kann der paraboliſche Kegel auch nicht kleiner

seyn als die Hälfte des Cylinders. Es ist also der Abschnitt des paraboliſchen Kegels BAC halb so groß als der Cylinder über derſelben Grundfläche bey derſelben Höhe.

Der geradlinichte Kegel mit denſelben Beſtimmungen iſt der dritte Theil des Cylinders, und verhält ſich daher zu dem paraboliſchen wie $\frac{1}{3}$ zu $\frac{1}{2}$ oder wie 2:3. Zu vergleichen der Artikel, Cubirung, Th. I. S. 580.

Auf eine ähnliche Art vergleicht Archimedes den Abſchnitt eines hyperboliſchen Kegels und eines Sphäroids mit einem geradlinichten Kegel über einerley Grundfläche bey gleicher Höhe. Die Berechnung aber iſt hier ſchwerer, weil die cylindriſchen Segmente des eingeſchriebenen und umgeſchriebenen Körpers die Summe oder der Unterſchied zweyer Theile ſind, von welchen der eine ein Glied aus einer arithmetiſchen Reihe, der andere ein Glied aus einer Reihe von Quadraten iſt. In der Abhandlung von den Spirallinien, Satz 10. findet Archimedes, daß

$$3(aa + 4aa + 9aa \ldots + n^2a^2) = n^3a^3 + n^2a^2 + a(a + 2a + 3a \ldots + na)$$

iſt, (vergl. arithmet. Reihen höh. Ordn. 14.), und giebt in der Abhandlung von den Konoiden, 3. Satz, die Größen an, zwiſchen welchen die Summe einer arithmetiſchen Reihe und der Reihe von Quadraten mit gleichförmig abnehmenden Wurzeln liegt. Nämlich wenn $(ab + 2ab + 3ab \ldots + nab) + (b^2 + 4b^2 + 9b^2 \ldots + n^2b^2) = S$ iſt, ſo hat das nfache von den beiden größten Gliedern dieſer beiden Reihen, oder $n(nab + n^2b^2)$, zu der Summe S ein kleineres Verhältniß als $a + nb : \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}nb$; aber zu der um das letzte Glied jeder der beiden Reihen verminderten Summe, $S - nab - n^2b^2$, ein größeres Verhältniß als das angegebene. Archimedes druckt den Satz ganz in Worten aus, und führt den Beweis an einer Zeichnung, die durch einen Fall ſich auf alle mögliche Fälle anwenden läßt.

Für die Hyperbel iſt das Quadrat der Ordinate, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, wo die Abſciſſen x von dem näch-

ſten Scheitel an genommen werden, für die Ellipſe iſt $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Man wird leicht einſehen, wie Archimedes das jetzt eben angezeigte Gränzverhältniß bey dem hyperboliſchen Konoid gebraucht hat. Für die Ellipſe iſt eine Abänderung eines Vorzeichens nöthig. Die Größen a, b bedeuten in den Gleichungen für die beiden krummen Linien nicht daſſelbe, was in den beiden vorher aufgeſtellten Reihen.

Man vergleiche mit dieſer Methode den Inhalt eines Körpers zu finden, die Auflöſung, welche die Integralrechnung giebt, Artikel, Cubirung. Dieſe iſt freylich viel kürzer, aber jene läßt die Zuſammenſetzung des Körpers und die Vergleichung mit einem einfachern deutlicher einſehen. Die Methode der Neuern iſt in einiger Abſicht, was eine Maſchine bey Fabrikarbeiten. Sie dient die Arbeit zu fördern, ohne daß man nöthig hat immer auf ihre Wirkungsart zu achten. Doch muß man auch wiſſen, wie weit man ohne Maſchine zu kommen vermöge.

Das Verfahren, wodurch Archimedes den von ſeiner Schneckenlinie nach jedem Umlaufe des Halbmeſſers beſchriebenen Flächenraum mit dem Kreiſe vergleicht, iſt ein ganz ähnliches. In dem Artikel, Spirale, wird davon etwas angeführt werden.

Die Fläche der Parabel zwiſchen ihrem Bogen BAC und der Chorde BC konnte Archimedes auf dieſe Art nicht finden, weil die Rechtecke, die in die Parabel und um dieſelbe beſchrieben werden, dergleichen PQRS und LMNO ſind, ſich wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Abſciſſen, AT, At, verhalten. Die Summe einer Anzahl von Wurzeln aus Zahlen, die in arithmetiſcher Fortſchreitung ſind, konnte er nicht angeben, das iſt, mit einer gegebenen Größe vergleichen. Zwar hätte er den Raum zwiſchen dem Bogen AC, einer mit AD parallelen durch C, und einer auf AD durch den Scheitel A ſenkrechten leicht mit dem Rechteck von AD und DC vergleichen können, weil er, wie ſchon bemerkt iſt, die Summe von Quadraten,

deren Wurzeln in arithmetischer Progression sind, zu bestimmen wußte. Allein er gebraucht, vielleicht um seinen Scharfsinn zu zeigen, ein sehr künstliches Hülfsmittel, die Verbindung der Statik mit der Geometrie, in der Abhandlung von der Quadratur der Parabel.

Es sey BAC (Fig. 24.) eine Parabel, deren Axe AD ist, und BC darauf senkrecht. Diese BC werde in irgend eine Anzahl gleicher Theile, wie BE, EF, FG, etc. getheilt. Durch die Theilungspuncte werden auf BC senkrechte Linien, EM, FN, GO, etc. gezogen, welche die Parabel in M, N, O, etc. schneiden; auch wird auf dieselbe noch BP senkrecht gesetzt. Aus C werden durch die Durchschnittspuncte, M, N, O, etc. die geraden CM, CN, CO, etc. gezogen, welche die auf BC senkrechten in H, I, K, etc. nach ihrer Folge treffen. So entstehen die Vierecke EH, FI, GK, etc. und für den letzten Theilungspunct Z das Dreyeck CZX, dessen Seite CX die Parabel in C berührt, indem hier zwey Durchschnittspuncte in einen Berührungspunct zusammen fallen. Diese Vierecke nenne man die umgeschriebenen. Die Durchschnittspuncte m, n, o, etc. der CM und übrigen mit den Perpendikeln auf der Seite nach C hin geben die eingeschriebenen Vierecke Em, Fn, Go, etc. wozu bey C das Dreyeck ZCY kommt. Nun beweiset Archimedes, erstlich, daß die Summe der umgeschriebenen Vierecke nebst dem Dreyecke ZCX größer ist als der dritte Theil des Dreyecks BCP; zweytens, daß die Summe der eingeschriebenen Vierecke, Em, Fn, etc. nebst dem Dreyecke ZCY kleiner ist als der dritte Theil eben des Dreyecks BPC. Dieses wird durch Hülfe der Statik erwiesen. Man stelle sich die Parabelfläche mit der Chorde BC an dem Arme eines Hebels, dessen Ruhepunct in B ist, aufgehängt vor, so daß der Scheitel A zu unterst liege. An dem andern Arme des Hebels, in einer Entfernung von B, so groß als BC, werde eine schwere Fläche an einem mathematischen Faden ohne Schwere aufgehängt, und halte dem Dreyeck BPC das Gleichgewicht, so ist diese Fläche der dritte Theil des Dreyecks. Nun wird gezeigt, daß das

umgeſchriebene Viereck BEMH gröſſer iſt als die Fläche, welche in dem Abſtande BC auf der andern Seite des Ruhepunctes B dem Trapezium BPeE das Gleichgewicht hält; daß eben ſo die folgenden Vierecke EMNF, FNOG, etc. jedes gröſſer ſind als die Fläche, die in dem gedachten Abſtande dem Trapezium EefF, FfgG, etc. wovon jene Vierecke nach ihrer Folge ein Theil ſind, das Gleichgewicht hält. Die Summe aller dieſer Vierecke nebſt dem Dreyeck ZCX iſt alſo gröſſer als der dritte Theil des Dreyecks BPC. Hingegen iſt jedes der eingeſchriebenen Vierecke wie Em, Fn, etc. kleiner als die Fläche, welche in dem Abſtande BC auf der andern Seite des Ruhepunctes dem Trapezium, wovon es ein Theil iſt, als EefF, FfgG, etc. das Gleichgewicht hält. Die Summe aller dieſer Vierecke, nebſt dem Dreyeck ZCY iſt daher kleiner als der dritte Theil des Dreyecks BPC. Nun zeigt Archimedes, daß die Parabelfläche weder gröſſer noch kleiner ſeyn kann, als der dritte Theil eben dieſes Dreyecks. Beide ſind die gemeinſchaftliche Gränze für die umgeſchriebenen und eingeſchriebenen Vierecke. Daraus folgt endlich vermittelſt einer Eigenſchaft der Parabel, daß der paraboliſche Abſchnitt BAC ſich zu den geradlinichten Dreyeck BAC, das mit demſelben einerley Grundfläche und Höhe hat, wie 4:3 verhält. Der Satz wird von Archimedes auch für den Fall erwieſen, da die Grundlinie oder Chorde BC nicht ſenkrecht auf AD iſt. Das Dreyeck BAC iſt alsdann dasjenige, welches zwiſchen den Endpuncten der Chorde und dem Scheitelpuncte des zugehörigen Durchmeſſers liegt.

IV. Zwey Gröſſen, A, B, ſind beide die Gränzen einer Reihe abnehmender Gröſſen, $a+b+c\ldots+q+$ etc. ſo daß der Unterſchied derſelben und der Reihe kleiner als irgend eine Gröſſe gemacht werden kann: es iſt $A=B$. Denn es ſey das Gegentheil möglich, und entweder $A>B$ oder $A<B$. Man nehme von der Reihe ſo viele Glieder, $a+b+c\ldots+q$, daß der Unterſchied der Summe derſelben von A kleiner ſey, als der Unterſchied zwiſchen A und B, ſo müßte eben dieſe Summe gröſſer ſeyn als B, welches der Vorausſetzung widerſpricht. Nämlich,

wenn $a + b + c \ldots + q = S$; $A - B = u$, und $A - S < u$ iſt, ſo iſt $S > B$. Eben ſo, wenn $B - A = u$ iſt, nehme man $B - S < u$, ſo iſt $S > A$, auch wider die Vorausſetzung.

Archimedes gebraucht dieſe Beweisart bey einer andern Methode für die Quadratur der Parabel, als die gleich vorher beſchriebene iſt. Es iſt BAB (Fig. 25.) eine Parabel, in welcher AC die Axe oder ein anderer (der Axe paralleler) Durchmeſſer; und BB eine Chorde, die von AC in C halbirt wird. Es ſeyn die beiden AB von dem Scheitel A an B gezogen, und durch die Mitte D von BC die beiden DE parallel mit AC bis an die Parabel, welche die beiden AB in F ſchneiden. Das Dreyeck AEB iſt der achte Theil des Dreyecks BAB. Denn in der Parabel iſt EF:FD = 1:2, es mag AC die Axe oder ein anderer Durchmeſſer ſeyn. Beſchreibt man auf dieſelbe Art in jedem der entſtandenen vier Abſchnitte ein Dreyeck, ſo iſt ein ſolches der achte Theil des Dreyecks AEB. Fährt man mit derſelben Einſchreibung fort, ſo machen das Dreyeck BAB und die folgenden eingeſchriebenen zuſammengehörigen Dreyecke, (als die beiden AEB, dann die vier Dreyecke in den Segmenten AE, EB, AE, EB. u. ff.) eine geometriſche Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ aus. Die Summe einer ſolchen Progreſſion mit dem dritten Theile des kleinſten Gliedes verhält ſich zu dem größten Gliede wie 4:3. Demnach iſt $\frac{4}{3}\Delta BAB$ die Gränze aller in dem paraboliſchen Abſchnitt eingeſchriebenen Dreyecke; und der Abſchnitt ſelbſt iſt auch ihre Gränze, weil jedes in einem der Abſchnitte eingeſchriebene Dreyeck größer als die Hälfte deſſelben iſt. Folglich iſt der paraboliſche Abſchnitt $= \frac{4}{3}\Delta BAB$.

Die von Cavaleri gebrauchte Methode des Untheilbaren (ſ. Th. I. S. 415.) iſt zwar auf der einen Seite eine Erweiterung der Erhauſtions-Methode der Alten, aber dabey weniger befriedigend, wegen der darin zum Grunde gelegten Vorſtellungen. Die Abkürzung, daß die Gränze, welcher ſich zwey Reihen nähern, ſtatt dieſer unmittelbar geſetzt wird, ohne beſonders zu zeigen, daß der geſuchte Werth weder größer noch kleiner ſeyn kann, möchte erlaubt

seyn, wo sie der Evidenz nicht nachtheilig ist. Wallis erweiterte die Methode der Alten noch mehr dadurch, daß er die Summen oder Gränzen von manchen Reihen fand, welche den Alten noch nicht erreichbar gewesen waren. Unsere Integrations-Methode ist aber nicht als eine höhere Art der Exhaustion anzusehen. Denn diese mit gehöriger Schärfe behandelt, ist keine Summirung unendlich vieler, unendlich kleiner, Größen. In der Encyclopédie methodique wird zwar gesagt, die Differentialrechnung sey nichts anders als jene Methode der Alten, auf eine einfache und bequeme Analysis gebracht; allein dieses ist eine zu flüchtige und verwirrende Vergleichung. Das zeigt die in dem gegenwärtigen Artikel vorgetragene Erörterung derselben. Hutton sagt in seinem Wörterbuche der Mathematik und Physik, daß auf der Methode der Exhaustion die von Cavaleri gebrauchte Methode des Untheilbaren beruhe, welche nur eine kürzere Art von Exhaustion sey, desgleichen die Arithmetik des Unendlichen von Wallis, welche wiederum eine Verbesserung der Methode des Untheilbaren sey; und dann ferner die Methode der Incremente, Differentiale, Fluxionen und unendlichen Reihen. Die Vergleichung mit den Methoden von Cavaleri und Wallis ist richtig; die neue Analysis des Unendlichen ist aber etwas ganz anders da, wo sie nicht eine Summe, sondern das für eine Function charakteristische Verhältniß der Veränderungen sucht, und von diesem auf die Function selbst zurückgeht. Dieses ist eine ganz andere, viel höhere und ergiebigere Art die Relationen der Größen zu entdecken, als jene ältern Summirungen durch Gränzen der Reihen. Maclaurin hat in der Einleitung zu seinem Werke über die Fluxionen von der Exhaustions-Methode der Alten einen sehr lehrreichen und ausführlichen Unterricht gegeben.

Exponent ist erstlich die Zahl, welche den Grad einer Potenz anzeigt, und kann eine ganze, eine gebrochne, rationale oder irrationale, eine positive oder negative Zahl seyn, s. Potenz. Zweytens ist es die Zahl, womit das Vorderglied eines Verhältnisses zu multipliciren ist, um

r^ω auf ein unendlich entferntes, $r^\alpha = \alpha$, zu kommen, mit Beyseitesetzung der unendlich kleinen Abweichung i. Man vertausche die Benennungen α und ω, so daß r^α das Anfangsglied, und r^ω ein unendlich davon entferntes sey. Die Glieder der Reihe nähern sich einer endlichen Gränze, r^ω, wofern $r^\omega = \omega$ ist. Dieses giebt $\omega \log r = \log \omega$, und $1 r = \frac{1\omega}{\omega}$. Nun darf r nicht größer genommen werden, als es nach dieser Gleichung seyn kann. Der größte oder kleinste Werth einer Function wird gefunden, wenn ihr Differential $= 0$ gesetzt wird. Nun ist

$$\partial . \frac{1\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega^2} (1 - 1\omega) \partial\omega .$$

(Differentialformeln, 5 u. 14.), wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt. Da die natürlichen Logarithmen sich wie die künstlichen, zu denselben Zahlen gehörigen, verhalten, so ist es hier gleichgültig, ob man diese oder jene nimmt. Ist 1ω größer als 1, oder ω größer als die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist das Differential des Quotienten $\frac{1\omega}{\omega}$ negativ, so daß dieser abnimmt, wenn ω wächst. Daher ist der Werth desselben für $\omega =$ der Basis, ein Größtes. Die Basis sey $= e$, so ist in dem Falle eines Größten, log. nat $r = \frac{1}{e}$. Es ist $e = 2{,}7182818\ldots$, und $\frac{1}{e} = 0{,}3678794\ldots$ Der Modulus des Briggischen Systems ist $= 0{,}43429448\ldots = M$, und log. Brigg. $r = \frac{M}{e} = 0{,}1597680\ldots$ also $r = 1{,}444668\ldots$ Das ist die Gränze der Werthe von r, bey welchen die formula replicata, so weit man sie fortsetzt, immer einen endlichen Werth behält.

Exponential-Größe, oder **Exponential-Formel**, ist eine Potenz, deren Exponent eine veränderliche Größe ist, wie a^x, oder z^x. Die Wurzel der Potenz mag eine unveränderliche oder veränderliche Größe seyn. Eine solche, wie die hier angegebene, ist eine Exponential-Größe vom ersten Grade. Ist der Exponent wieder eine Exponentialgröße, so ist die Größe eine solche vom zweyten Grade. So giebt es mehrere Grade dieser Größen, als

$$\text{I. } a^x, \quad \text{II. } a^{x^y}. \quad \text{III. } a^{x^{y^z}}. \quad \text{u. s. f.}$$

Nennt man $x^y = p$, so ist der zweyte Ausdruck $= a^p$. Ist $y^z = p$, und $x^p = q$, so ist der dritte $= a^q$.

Eine besondere Gattung ist,

$$\begin{array}{c} \alpha \\ r \\ r \\ r \\ r \end{array}$$

welcher unterhalb mehrere r beygefügt werden mögen. Condorcet hat über die Eigenschaften dieser Form von Größen Untersuchungen angestellt, die Euler fortgesetzt hat, in einer Abhandlung, de formulis exponentialibus replicatis. Acta Acad. Petrop. T. I. a. a. 1777. Setzt man $r^\alpha = \beta$; $r^\beta = \gamma$; $r^\gamma = \delta$; $r^\delta = \varepsilon$, so ist der obige Ausdruck $= \varepsilon$ oder r^δ. Diese Art Größen wächst ungeheuer an, wenn für r nur eine mäßige Zahl genommen wird. Setzt man nur $r = 2$, und dazu $\alpha = 0$, so ist $\beta = 1$; $\gamma = 2$; $\delta = 4$; $\varepsilon = 16$, aber $r^\varepsilon = \zeta = 65536$, und $r^\zeta =$ wird eine Zahl von 19729 Ziffern. Setzt man $r^\alpha = \alpha$, so bleiben alle Glieder der Reihe gleich groß. Z. B. jedes $= 2$, wenn $\alpha = 2$, wodurch $r = \sqrt{2}$ wird.

Setzt man $r^\alpha = \alpha + i$, wo i unendlich klein ist, so ist es möglich, daß die Glieder der Reihe, β, γ, δ, etc. immerhin unendlich wenig zunehmen, und daß ein unendlich entferntes Glied, r^ω, noch endlich ist. Umgekehrt wird es möglich seyn, von einem solchen endlichen Gliede

r^ω auf ein unendlich entferntes, $r^\alpha = a$, zu kommen, mit Beyseitesetzung der unendlich kleinen Abweichung i. Man vertausche die Benennungen α und ω, so daß r^α das Anfangsglied, und r^ω ein unendlich davon entferntes sey. Die Glieder der Reihe nähern sich einer endlichen Gränze, r^ω, wofern $r^\omega = \omega$ ist. Dieses giebt $\omega \log r = \log \omega$, und $1r = \frac{1\omega}{\omega}$. Nun darf r nicht größer genommen werden, als es nach dieser Gleichung seyn kann. Der größte oder kleinste Werth einer Function wird gefunden, wenn ihr Differential $= 0$ gesetzt wird. Nun ist

$$\partial.\frac{1\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega^2}(1 - 1\omega)\,\partial\omega.$$

(Differentialformeln, 5 u. 14.), wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt. Da die natürlichen Logarithmen sich wie die künstlichen, zu denselben Zahlen gehörigen, verhalten, so ist es hier gleichgültig, ob man diese oder jene nimmt. Ist 1ω größer als 1, oder ω größer als die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist das Differential des Quotienten $\frac{1\omega}{\omega}$ negativ, so daß dieser abnimmt, wenn ω wächst. Daher ist der Werth desselben für $\omega =$ der Basis, ein Größtes. Die Basis sey $= e$, so ist in dem Falle eines Größten, $\log. nat\, r = \frac{1}{e}$. Es ist $e = 2{,}7182818\ldots$, und $\frac{1}{e} = 0{,}3678794\ldots$ Der Modulus des Briggischen Systems ist $= 0{,}43429448\ldots = M$, und $\log. Brigg.\, r = \frac{M}{e} = 0{,}1597680\ldots$ also $r = 1{,}444668\ldots$ Das ist die Gränze der Werthe von r, bey welchen die formula replicata, so weit man sie fortsetzt, immer einen endlichen Werth behält.

Nimmt man r kleiner als 1,444668.. so giebt es zwey Werthe für ω, um die Gleichung $r^{\omega} = \omega$ zu erfüllen. Denn wenn man wiederum $r^{\alpha} = \alpha + i$ setzt, wo i einen unendlich kleinen Werth hat, so mag i auch negativ seyn, oder es ist $r^{\alpha} = \alpha \pm i$, so daß man mit einem größern α und subtractiven i auf dasselbe Glied der Reihe, als mit einem kleinern α und additiven i, kommen mag. Doch die weitern Untersuchungen hierüber hat man in der angeführten Abhandlung nachzusehen. Das hier vorgetragene ist anders abgefaßt als es von Euler geschehen ist, und wird zur Erläuterung dienen können.

Den Coefficienten einer Exponential-Größe kann man, wenn es dienlich ist, in eine Potenz von derselben Wurzel mit der veränderlichen Potenz verwandeln. Z. B. es ist $ha^x = a^{m+x}$, wenn $a^m = h$ ist.

Umgekehrt kann man den Exponenten einer veränderlichen Potenz um eine beliebige Größe vermindern, und dafür einen Coefficienten setzen.

Die Wurzel einer Exponential-Größe kann man beliebig in eine andere verwandeln, wenn dagegen der Exponent gehörig umgeändert wird. So ist $b^x = a^{mx}$, wenn $a^m = b$ gemacht wird.

Die Entwickelung einer Exponentialgröße durch eine Reihe ist in dem Artikel, Differenzenrechnung (25.) gezeigt. Es ist

$$a^u = 1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

wo c:1 das Gränzverhältniß des Logarithmen einer Zahl zu dem Überschusse der Zahl über die Einheit ist, in dem System mit der Basis a. Man setze $a^u = e^x$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl a^u in diesem System ist. In demselben ist $c = 1$, also

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

Nun ist log nat. $a^u = u \,\text{lnat}\, a$, und $\text{lnat}\, e^x = x$, also $x = u \,\text{lnat}$, und

$$a^u = 1 + u\,\text{la} + \tfrac{1}{2}u^2(\text{la})^2 + \tfrac{1}{6}u^3(\text{la})^3 + \tfrac{1}{24}u^4(\text{la})^4 + \text{etc.}$$

Man ſieht, daß $\frac{1}{c} = l$ nat. a iſt. Dieſes folgt auch aus der Formel für $l(x+u)$ a. a. O. (24.), wenn darin $x = 1$ geſetzt wird. Man bezeichne den Logarithmen von $1+u$ in dem Syſtem, wozu das Gränzverhältniß $c:1$ gehört, durch $L(1+u)$; und den von $1+u$ in dem natürlichen Syſtem durch $l(1+u)$, ſo iſt

$$l(1+u) = u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \text{etc.}$$

und $L(1+u) = cl(1+u)$.

In dieſer Formel iſt $1+u$ die Zahl zu einem Logarithmen, in jener für a^n aber iſt u des Logarithme einer Zahl. Die Baſis des Syſtems mit dem Gränzverhältniſſe $c:1$ ſey a, ſo iſt $La = 1$. Setzt man nun $1+u = k$, ſo iſt $1 = cl\,k$, $\frac{1}{c} = lk$.

Es giebt auch Exponentialgrößen mit unmöglichen Exponenten. Solche kommen bey der Vergleichung der Kreisbogen und der Logarithmen, oder eines circularen und hyperboliſchen Sectors vor. S. Differentialformeln, 48-50. und Goniometrie, VIII.

Exponential-Gleichung iſt eine Gleichung, worin Exponentialgrößen vorkommen. Dergleichen iſt $a^x = y$; oder, $z^x = y$; oder $x^x = y$; oder, $ae^{x+a} + be^{x+1} + ce^x = y$; oder $ae^{2x} + be^x = y$.

Dieſe Gleichungen werden, wenn es angeht, mittelſt der Logarithmen aufgelöſet. Die erſte der angeführten verwandelt ſich in dieſe: $x \log a = \log y$, ſo daß durch Hülfe der berechneten Tafeln jede der beiden, x, y, durch die andere gefunden wird. Die zweyte und dritte werden eben ſo behandelt. Die vierte Gleichung verwandle man zuerſt in dieſe, $e^x(ae^a + be + c) = y$, und ſetze $\log e = 1$, ſo iſt $x + l(ae^a + be + c) = ly$. Aus der letzten Gleichung den Werth von x durch y zu finden hat man eine quadratiſche Gleichung, worin e^x die Wurzel iſt, aufzulöſen. Hat man die beiden Werthe von e^x gefunden, ſo findet man x vermittelſt der Logarithmen. In dem Die-

tionnaire encyclopédique wird von dieſer Gleichung geſagt, daß x in derſelben nur durch Probiren gefunden werden könne.

Die gegebenen Coefficienten kann man, wenn man es dienlich findet, mit in die Exponentialgröße ziehen; auch die Wurzel derſelben in eine andere verwandeln, nach Anleitung des vorhergehenden Artikels.

Exponential-Curve iſt eine ſolche, deren Gleichung eine exponentiale iſt. Dergleichen iſt die logarithmiſche, für welche iſt $y = a^x$, alſo $x = \frac{ly}{la}$. Weil Logarithmen ſich auf bloße Zahlen beziehen, ſo iſt hier eine lineariſche Größe zur Einheit gemacht. Dieſe ſey abſolut genommen $= b$, ſo iſt $\frac{x}{b} = \frac{l(y:b)}{l(a:b)}$, wo die Quotienten $\frac{x}{b}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{a}{b}$ numeriſche Größen ſind, ſ. Abmeſſung.

Die logarithmiſche Spirale iſt auch eine ſolche Curve. Ihre Gleichung iſt, $e^{m\varphi} = \frac{y}{a}$, wo a ein gegebener Radius, y irgend ein anderer Radius, φ der Winkel deſſelben mit dem Radius a, und m eine gegebene Zahl iſt. Die Wurzel e iſt die Baſis der natürlichen Logarithmen.

Joh. Bernoulli betrachtet in einem Aufſatze: Principia calculi exponentialium, Acta Erud. 1697. Opp. T. I. nr. 36. die krumme Linie, deren Gleichung iſt, $x^x = y$. Für die Quadratur ihres Flächenraumes, von der Ordinate zu der Abſciſſe $x = 0$ bis zu der $x = 1$, findet er die durch ihre Form merkwürdige Reihe,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.}$$

Das Differential der Area ydx iſt hier $= x^x dx$. Das unbeſtimmte Integral davon wird in dem Artikel, Integralformeln, gefunden.

Exponentialrechnung ist die Entwickelung solcher Relationen, die von Exponentialgrößen abhangen. Sie hat es entweder bloß mit diesen und andern endlichen Größen zu thun, oder sie führt zugleich ihre Differentiale ein. Zu jener Rechnung mit endlichen Größen ist in den vorhergehenden Artikeln Anleitung gegeben. Sie erfordert nur, daß man mit der Potenzenrechnung und der Theorie der Logarithmen bekannt sey. Von der zweyten ist in dem Artikel, Differentialformeln, IV. gehandelt.

Leibnitz und Joh. Bernoulli haben diese Rechnung jeder für sich erfunden. s. Differentialrechnung, Th. I. S. 858.

Exterminatio ist eben das was eliminatio, s. Artikel, Elimination.

Extrema et media ratio bey der Eintheilung einer geraden Linie ist, wenn die ganze sich zu dem größern Abschnitte, wie dieser sich zu dem kleinern verhält. Es ist also so viel als eine Linie nach einer stetigen Proportion theilen. S. Euklides Elemente. B. VI. Erkl. 3. und VI. 30. auch II. 11. Die Aufgabe kommt bey ihm zweymahl vor. Sie ist in dem ersten Theile dieses Wörterbuchs auch zweymahl aufgelöset, einmahl nach einer geometrischen Analysis, S. 91. zum zweytenmahl durch algebraische Rechnung, S. 110.

Die Aufgabe wird zu der Verzeichnung eines gleichseitigen Fünfecks gebraucht. Man hat ehedem auch diese Eintheilung die sectio divina genannt.

Eylinie, Eyrundung. s. Ovale.

F.

Facit ist die Antwort auf eine numerische Rechnungsfrage, als die gesuchte Summe vorgegebener Größen, das Product zweyer Zahlen, das vierte Glied einer Proportion, von welcher drey Glieder gegeben sind. Die Auflösung einer

allgemeinen Frage zeigt, wie das gesuchte aus den gegebenen Größen zusammengesetzt wird.

Factor heißt jede der beiden Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, wodurch eine Zahl entsteht, welche das Product, Factum, genannt wird, s. Multiplication. Ein Factor kann wiederum ein Product von zwey Factoren seyn, und so kann eine Zahl aus vielen Factoren bestehen. Von der Zerlegung einer Zahl in ihre einfachsten Factoren, s. Theilbare Zahl.

Ein Aggregat von Größen, die ihrer Quantität nach unbestimmt gelassen werden, eine algebraische oder analytische Formel, in Factoren zu zerlegen, ordnet man es nach den Potenzen einer der darin vorhandenen Größen, und setzt das Aggregat $= o$, um die Formel wie eine Gleichung behandeln zu können. Eine Gleichung

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \ldots + k = o;$$

habe die Wurzeln p, q, r, s, etc. so ist sie ein Product aus den Factoren $x-p$, $x-q$, $x-r$, $x-s$, etc. Sind die Wurzeln alle mögliche Größen, so ist das Aggregat von ihren Termins ein Product von m einfachen Factoren, wie $x-p$ ist. Um die Gleichung zu erfüllen, muß einer dieser Factoren Null gesetzt werden; soll das Aggregat irgend einen Werth haben können, so bleibt der Werth von x unbestimmt. Hat die Gleichung unmögliche Wurzeln, zwey, oder vier, oder überhaupt eine gerade Anzahl derselben, so giebt jedes Paar zusammengehöriger unmöglicher Wurzeln einen möglichen trinomischen Factor, $xx - \alpha x + \beta\beta$ wo $\beta\beta > \frac{1}{4}\alpha\alpha$ ist. Die Zerlegung eines allgemeinen Ausdrucks einer zusammengesetzten Größe in Factoren hängt also von der Auflösung der Gleichungen ab.

Bey der Differentiation einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen kann ein veränderlicher Factor in der Differentialgleichung entstehen. Eine gegebene Differentialgleichung kann daher von der Beschaffenheit seyn, daß der Factor fehlt, den sie haben muß, um die endliche Gleichung aus ihr zu erhalten, so daß sie ohne denselben

nicht integrirbar ist. Dieser Factor muß also wieder hergestellt werden. Es ist oft nicht leicht ihn zu finden. S. Integration der Differentialgleichungen.

Facultät, numerische, ist ein Product aus Factoren, die in arithmetischer Progression auf einander folgen. Diese sey, a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$ .... $1+mr-r$, so ist das Product dieser m Glieder eine numerische Facultät. Unter dieser Benennung begreife man auch die Quotienten von zwey solchen Producten mit gleich vielen Factoren.

1. Euler hat zu allererst in seiner Differentialrechnung, P. II. cap. 16. 17. diese Form einer Größe nebst andern verwandten betrachtet, die er zusammen functiones inexplicabiles nennt. Vandermonde hat darüber eine Abhandlung in den Schriften der Pariser Akademie vom J. 1772. geliefert, und eine eigne Bezeichnungsart dazu gebraucht. Kramp hat kürzlich die Natur der von ihm so benannten numerischen Facultäten ausführlich untersucht, ihre Entwickelung in andere Formen gelehrt, und ihre Anwendung in der höhern Analysis gezeigt. Diese mit vielem Scharfsinn ausgeführte Theorie nimmt einen beträchtlichen Theil seines Werkes über die Strahlenbrechung ein: Analyse des refractions astronomiques et terrestres, à Leipsic, 1799. 210 pag. in 4. Die Benennung, Facultät, ist, wie man sieht, dem Kunstwort, Potenz oder Dignität, analog. Lacroix nennt das Product aus Factoren mit gleichen Unterschieden, von dem Factor x an, eine puissance de x du second ordre, in dem Traité des différences et des Series, à Paris. 1800, worin von dieser analytischen Form mehreremale Gebrauch gemacht wird.

2. Man nehme folgeweise einen, zwey, drey, und so fort mehrere Factoren, so erhält man eine Reihe von Größen, die nur in einer Absicht ein gemeinschaftliches Gesetz der Zusammensetzung haben, in anderer aber, nämlich in der Anzahl der Factoren, unterschieden sind, nämlich:

$$\overset{1}{a},\quad \overset{2}{a(a+r)},\quad \overset{3}{a(a+r)(a+2r)}$$

$$\overset{4}{a(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots\ldots}$$

$$\overset{m}{a(a+r)\ldots(a+mr-r)}.$$

Die Form dieser Glieder läßt sich durch die Stelle m nicht auf eine übereinstimmende Art angeben, wie es bey algebraischen und transscendenten Functionen angeht, in welchen die veränderliche Größe, die als Stellenzahl dient, zwischen zwey endlichen Werthen alle mögliche dazwischen liegende haben kann, daher die Function sich auf eine stetige Art verändert. Die numerischen Facultäten ändern sich sprungweise. Man kann in einer Reihe von Größen dieser Form keine einschalten, ohne die Art der Formation wesentlich zu ändern. Darum nannte Euler sie functiones inexplicabiles.

3. Den ersten Factor einer numerischen Facultät nenne man die Basis; die Anzahl der Factoren den Exponenten. Kramp bezeichnet eine Facultät, deren Basis a, Exponent m, und in deren zugehörigen Progression der Unterschied der Glieder r ist, durch $a^{m|r}$. Ist der Exponent eine zusammengesetzte Zahl, wie m + n, so ist die Bezeichnung, $a^{(m+n)|r}$, oder auch $a^{m+n|r}$, wo das Exponentenzeichen sich auf alle vorhergehende Theile bezieht. Es ist, wenigstens im Schreiben, bequemer statt des Buchstaben I ein Komma zu gebrauchen, wie in $a^{m,r}$ oder $a^{m+n,r}$. Diese Bezeichnung wird in dem gegenwärtigen Artikel gebraucht werden.

4. Den letzten Factor einer Facultät kann man zum ersten nehmen. Die Facultät sey

$$a(a+r)(a+2r)\ldots(a+mr-r),$$

so ist, wenn $a+mr-r=b$ gesetzt wird,

$$a^{m,+r} = b^{m,-r}.$$

Hieraus sieht man, wie Facultäten mit entgegengesetzten Differenzen eine in die andere verwandelt werden, wobey aber eine Umänderung der Basis geschieht.

5. Der Exponent bestehe aus zwey Theilen, $m+n$, so ist die Facultät, $a(a+r)\ldots(a+mr-r)(a+mr)\ldots(a+(m+n-1)r$, also ist

$$a^{m+n,r} = a^{m,r}(a+mr)^{n,r},$$

und auch

$$a^{m+n,r} = a^{n,r}(a+nr)^{m,r},$$

wo zu dem ersten Factor n Factoren, a bis $a+(n-1)r$, genommen sind, und zu dem andern Factor die übrigen von $a+nr$ an.

6. Daraus folgt $a^{m,r}(a+mr)^{n,r} = a^{n,r}(a+nr)^{m,r}$.

7. Exempel. Es ist das Product $1.2.3\ldots2n$ gleich dem Producte der beiden Producte oder Facultäten, $1.3.5\ldots2n-1$. und $2.4.6\ldots2n$, oder $(1.2.3\ldots n)2^n$. Nach der angenommenen Bezeichnung ist nun $1^{2n,1} = 1^{n,2} \times 1^{n,1}2^n$. Aus (5.) ist $1^{2n,1} = 1^{n,1}(1+n)^{n,1}$. Folglich ist $(1+n)^{n,1} = 1^{n,2}.2^n$, das ist, $1+n.2+n\ldots2n = 1.3.5\ldots(2n-1).2^n$. Dieser Satz ist in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, 12. gebraucht, und daselbst auf eine andere Art erwiesen worden.

8. Es sey n kleiner als m, so ist $\frac{a^{m,r}}{a^{n,r}} = (a+nr)^{m-n,r}$. Denn von den m Factoren des Zählers werden n Factoren, a bis $a+(n-1)r$, durch die Division mit dem Nenner abgeschnitten, und es bleiben $m-n$ Factoren von $a+nr$ bis $a+(m-1)r$.

9. Der Exponent in dem Nenner sey größer als in dem Zähler, so ist $\frac{a^{m,r}}{a^{m+n,r}} = \frac{1}{(a+mr)^{n,r}}$.

Wenn dieser Fall dem nächstvorhergehenden gleich behandelt wird, so ist

$$\frac{a^{m,r}}{a^{m+n,r}} = (a+(m+n)r)^{-n,r},$$

und es ist

$$(a+(m+n)r)^{-n,r} = \frac{1}{(a+mr)^{n,r}},$$

Es sey $a+(m+n)r = b$, so ist

$$b^{-n,r} = \frac{1}{(b-nr)^{n,r}},$$

$$\text{oder } b^{-n,r} = \frac{1}{(b-r)^{n,-r}},$$

Diese Ausdrücke sind dem für Potenzen, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, analog.

10. Man multiplicire auf beiden Seiten der vorletzten Formel in (9.) mit $(b-nr)^{m,r}$, wo m größer als n sey, so ist $(b-nr)^{m,r}.b^{-n,r} = \frac{(b-nr)^{m,r}}{(b-nr)^{n,r}}$.

Der Zähler des Bruches ist das Product

$b-nr.b-nr+r...b-r.b..b+(m-n)r-r.$

Der Nenner ist das Product $b-nr,..b-r$. Also ist

$$(b-nr)^{m,r}.b^{-n,r} = b^{m-n,r}.$$

Diese Formel folgt aus der zweyten in (5.) wenn daselbst n negativ genommen wird.

11. Die Differenz sey negativ, so ist, $n<m$ gesetzt, $\frac{a^{m,-r}}{a^{n,-r}} = (a-nr)^{m-n,-r}$, und $\frac{a^{m,-r}}{a^{m+n,-r}} = \frac{1}{(a-mr)^{n,-r}}$.

Wenn der letztere Fall dem erstern gleich behandelt wird, so ist der Quotient $= (a-(m+n)r)^{-n,-r} = \frac{1}{(a-mr)^{n,-r}}$. Setzt man $a-(m+n)r = b$, so ist

$$b^{-n,-r} = \frac{1}{(b+nr)^{n,-r}},$$

oder auch $b^{-n,-r} = \frac{1}{(b+r)^{n,r}}$.

12. Es ist $b^{0,+r} = 1$, und $b^{0,-r} = 1$, so daß 1 das gemeinschaftliche Glied der beiden Reihen

$1; b; b(b+r); b(b+r)(b+2r);$ etc. und

$1; \frac{1}{b-r}; \frac{1}{(b-r)(b-2r)};$ etc. ist, so wie der Reihen $1; b; b(b-r); b(b-r)(b-2r);$ etc. und

$1; \frac{1}{b+r}; \frac{1}{(b+r)(b+2r)};$ etc.

Auch ist, wenn in der letzten Formel (11.) die Basis $b = 0$ gesetzt wird

$$0^{-n,-r} = \frac{1}{r^{n,r}} = \frac{1}{r.2r...nr}.$$

13. Die numerischen Facultäten sind ganz leicht zu behandeln, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, diese mag positiv oder negativ seyn. Allein wenn der Exponent ein Bruch ist, so entsteht eine Schwierigkeit, da eine Facultät mit gebrochnem Exponenten eine andere Form erhalten muß als eine, deren Exponent eine ganze Zahl ist. Die Formel $a^{\frac{m}{n},r}$ kann nichts anders bedeuten als ein in der Reihe der Facultäten mit ganzen Exponenten eingeschaltetes Glied zwischen den beiden Gliedern, deren Stellenzahlen die dem Bruche $\frac{m}{n}$ nächsten ganzen Zahlen sind.

In dem Artikel, Einschalten, §. 40. ff. ist gezeigt, wie eine Reihe von Facultäten interpolirt wird. Es ist, wenn daselbst in (44.) für $m+\omega$ gesetzt wird $\frac{m}{n}$, und r für h,

$$a^{\frac{m}{n},r} = \frac{a.a+r.a+2r.\text{ etc.}}{a+\frac{mr}{n}.a+\frac{mr}{n}+r.a+\frac{mr}{n}+2r.\text{etc.}},$$

oder, wenn $a+\frac{mr}{n}=b$ gesetzt wird, welches b aber mit dem in jenem Artikel gebrauchten b (hier r) nicht zu verwechseln ist,

$$a^{\frac{b-a}{r},r} = \frac{a.a+r.a+2r.\text{etc.}}{b.b+r.b+2r.\text{etc.}}.$$

14. Eben so ist $b^{\frac{a-b}{r},r} = \frac{b.b+r.\text{etc.}}{a.a+r.\text{etc.}}$, also ist $b^{\frac{a-b}{r},r} = 1 : a^{\frac{b-a}{r},r}$, oder

$b^{-\frac{m}{n},r} = 1 : a^{\frac{m}{n},r}$, oder

$$b^{-\frac{m}{n},r} = 1 : \left(b-\frac{mr}{n}\right)^{\frac{m}{n},r},$$

wie für ganze Exponenten in (9.).

15. Für eine negative Differenz ist auf ähnliche Art, wie für eine positive,

$$a^{\frac{m}{n},-r} = \frac{a.a-r.a-2r.\text{ etc.}}{a-\frac{mr}{n}.a-\frac{mr}{n}-r.\text{etc.}}.$$

Nun sey $a-\frac{mr}{n}=b$, so ist auf gleiche Art wie in (14.), $b^{-\frac{m}{n},-r} = 1 : a^{\frac{m}{n},-r}$, oder

$$b^{-\frac{m}{n},-r} = 1 : \left(b + \frac{mr}{n}\right)^{\frac{m}{n},-r},$$

wie für ganze Exponenten in (11.). Aber die zweyte Form daselbst ist hier nicht anwendbar. Die in (4.) gezeigte Verwandlung einer Facultät in Rücksicht der Differenz hat bey gebrochnen Exponenten nicht statt.

16. Das Product zweyer Facultäten mit gebrochnen Exponenten, $a^{\frac{b-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r}$, ist

$$= \frac{a.\alpha.a+r.\alpha+r.a+2r.\alpha+2r.\text{ etc.}}{b.\beta.b+r.\beta+r.b+2r.\beta+2r.\text{ etc.}}$$

Eben diesen Bruch giebt das Product der beiden Facultäten, $a^{\frac{\beta-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{b-\alpha}{r},r}$. Also ist

$$a^{\frac{b-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r} = a^{\frac{\beta-a}{r},r} \times \alpha^{\frac{b-\alpha}{r},r}.$$

17. Es sey $\alpha = b$, so ist $a^{\frac{b-a}{r},r} \times b^{\frac{\beta-b}{r},r}$

$= \frac{a.a+r.a+2r.\text{ etc.}}{\beta.\beta+r.\beta+2r.\text{ etc.}}$. Dieser Bruch ist

$= a^{\frac{\beta-a}{r},r}$, also ist $a^{\frac{b-a}{r},r} \times b^{\frac{\beta-b}{r},r} = a^{\frac{\beta-a}{r},r}$.

Man setze die Exponenten $\frac{b-a}{r} = m$; $\frac{\beta-b}{r} = n$, so ist $a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{m+n,r}$, für gebrochne positive Exponenten wie für ganze in (5.).

18. Es ist nämlich $a^{m,r} = \frac{a.a+r.\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{etc.}}$

und $(a+mr)^{n,r} = \frac{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}{a+mr+nr.a+mr+r+nr.\text{ etc.}}$;

also $a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} =$

$\frac{a.a+r.\text{ etc.}}{a+mr+nr.a+mr+r+nr.\text{ etc.}}$, das ist

$a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{m+n,r}$, wie für ganze Exponenten in (5.).

Die Differenz r darf auch negativ genommen werden, so daß $a^{m,-r} \times (a-mr)^{n,-r} = a^{m+n,-r}$ ist.

19. Offenbar kann man m und n vertauschen, und es ist $a^{n,r} \times (a+nr)^{m,r} = a^{m+n,r}$, also

$a^{m,r} \times (a+mr)^{n,r} = a^{n,r} \times (a+nr)^{m,r}$, wie für ganze Exponenten in (6.).

20. Auch ist $(a-nr)^{m,r} . a^{-n,r} = a^{m-n,r}$, wie für ganze Exponenten in (10.).

Denn $a^{-n,r} = \frac{1}{(a-nr)^{n,r}}$

$= \frac{a.a+r \text{ etc.}}{a-nr.a-nr+r. \text{ etc.}}$, und $(a-nr)^{m,r}$

$= \frac{a-nr.a-nr+r. \text{ etc.}}{a+(m-n)r.a+(m-n)r+r. \text{ etc.}}$ woraus der Satz unmittelbar folgt,

21. Die Division giebt $a^{\frac{b-a}{r},r} : \alpha^{\frac{\beta-\alpha}{r},r}$

$= \frac{a.\beta.a+r.\beta+r.a+2r.\beta+2r. \text{ etc.}}{b.\alpha.b+r.\alpha+r.b+2r.\alpha+2r. \text{ etc.}}$.

Eben diesen Bruch giebt auch der Quotient

$a^{\frac{\alpha-a}{r},r} : b^{\frac{\beta-b}{r},r}$, welcher also jenem Quotienten gleich ist.

22. Es sey $\alpha = b$; $\beta = a$, so ist

$$a^{\frac{b-a}{r},r} : b^{\frac{a-b}{r},r} = \frac{a.a.a+r.a+r.a+2r.a+2r. \text{ etc.}}{b.b.b+r.b+r.b+2r.b+2r. \text{ etc.}}.$$

23. Ist $\alpha = b$, so ist $a^{\frac{b-a}{r},r} : b^{\frac{\beta-b}{r},r}$
$= \frac{a.\beta.a+r,\beta+r.\text{ etc.}}{b.b.b+r.b+r.\text{ etc.}}$.

Ein Bruch wie dieser kann auch als das Product zweyer Facultäten betrachtet werden.

24. Es sey m eine gebrochne, und p eine ganze Zahl, so ist $a^{m,r} : a^{p,r} = (a+pr)^{m-p,r}$,

Denn $a^m = \frac{a.a+r.,\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$,

und $a^{p,r} = a, a+r, .. a+pr-r$. Also ist

$a^{m,r} : a^{p,r} = \frac{a+pr.a+pr+r\text{ etc.}}{a+mr.a+mr+r.\text{ etc.}}$
$= (a+pr)^{m-p,r}$,

Der Satz folgt auch aus (18.).

25. Es ist $a^{m,r} - (a-r)^{m,r} = \frac{mr}{a-r+mr} a^{m,r}$,

auch für gebrochne Werthe von m. Man hat nur die Werthe der beiden Facultäten für diesen Fall zu entwickeln.

Da $a^{m-1,r}(a+mr-r) = a^{m,r}$ ist (18.), so ist $a^{m,r} - (a-r)^{m,r} = mr.a^{m-1,r}$.

Auch ist $(a+r)^{m,-r} - a^{m,-r}$
$= \frac{mr}{a+r-mr} a^{m,-r} = mr, a^{m-1,-r}$. Diese Formeln dienen zu der Differenzenrechnung für numerische Facultäten.

26. Exempel zu (22.). Es ist (Cyklometrie, 29.)

$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.\text{ etc.}}{1.1.3.3.5.5.\text{ etc.}}$.

Also ist

$$\frac{1}{2}\pi = 2^{-\frac{1}{2},2} : 1^{\frac{1}{2},2}.$$

Da $2^{-\frac{1}{2},2} = 1 : 1^{\frac{1}{2},2}$, so ist

$$\frac{2}{\pi} = (1^{\frac{1}{2},2})^2.$$

27. Exempel zu (23.). Es ist (Cyklometrie, 28.)

$$\sin\tfrac{1}{2}m\pi = \frac{m.2-m.2+m.4-m.\text{etc.}}{1\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ \text{etc.}}.$$

Also ist $\sin\frac{1}{2}m\pi = m^{\frac{1-m}{2},2} : 1^{\frac{1-m}{2},2}$.

Setzt man $m = \frac{1}{2}$, so ist $\sin\frac{1}{2}m\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, also $\sqrt{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{4},2} : 1^{\frac{1}{4},2} = 1^{\frac{1}{4},4} : 2^{\frac{1}{4},4}$.

Wenn man in der Formel für $\sin\frac{1}{2}m\pi$ alle Factoren des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl multiplicirt, so werden die beiden Basen und die Differenz dadurch multiplicirt, der Exponent der Facultäten, oder die Stelle des eingeschalteten Gliedes, welches sie bedeuten, bleibt unverändert. Hier wird die Basis $\frac{1}{2}$ in 1, die Basis 1 in 2, und die Differenz 2 in 4 verwandelt.

Setzt man $m = \frac{1}{3}$, so ist $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, und $\frac{1}{2} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3},2} : 1^{\frac{1}{3},2} = 1^{\frac{1}{3},6} : 3^{\frac{1}{3},6}$.

28. Es ist

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m.1-m.1+m.2-m.2+m.\text{etc.}}{n.1-n.1+n.2-n.2+n.\text{etc.}}.$$

Folglich

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = m^{n-m,1} : (1-n)^{n-m,1},$$

oder

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = m^{1-m+n,1} : n^{1-m-n,1}.$$

Für m, n, und die Differenz 1 können auch Zahlen, die ihnen proportional sind, gesetzt werden.

29. Aus der Vergleichung der Formeln für $\sin\frac{m\pi}{2n}$ und $\cos\frac{m\pi}{2n}$, a. a. O. folgt

$$\tang\frac{m\pi}{2n} = \frac{m.2n-m.2n+m.4n-m.\text{ etc.}}{n-m.n+m.3n-m.3n+m.\text{ etc.}}.$$

Dieses giebt

$$\tang\frac{m\pi}{2n} = m^{\frac{n-2m}{2n},2n} : (n+m)^{\frac{n-2m}{2n},2n},$$

und auch

$$\tang\frac{m\pi}{2n} = m^{\frac{1}{2},2n} : (n-m)^{\frac{1}{2},2n}.$$

30. Die Form eines eingeschalteten Gliedes in der Reihe der Brüche, deren Zähler und Nenner numerische Facultäten sind, ist dieselbe mit der Form des Products oder des Quotienten zweyer numerischen Facultäten mit gebrochnem Exponenten. Jene Reihe sey

$$\frac{a}{b}; \frac{a.a+r.}{b.b+r.}; \frac{a.a+r.a+2r.}{b.b+r.b+2r.}; \text{ etc.}$$

Die Stelle eines eingeschalteten Gliedes Z sey z, die des ersten Gliedes als Eins genommen. Es ist (Einschalten, 46. wo für $m+\omega$ hier zu setzen ist z).

$$Z = \frac{a.a+r.a+2r.\text{ etc.}}{b.b+r.b+2r.\text{ etc.}} \times \frac{b+rz.b+r+rz.\text{ etc.}}{a+rz.a+r+rz.\text{ etc.}}$$

oder

$$Z = \frac{a.b+rz.a+r.b+r+rz.a+2r.\text{ etc.}}{b.a+rz.b+r.a+r+rz.b+2r.\text{ etc.}}.$$

Folglich ist nach der angenommmenen Bezeichnung

$$Z = a^{\frac{b-a}{r}, r} : (a+rz)^{\frac{b-a}{r}, r}.$$

Oder, wenn die Exponenten entgegengesetzt genommen werden, aus (14.),

$$Z = (b+rz)^{\frac{a-b}{r}, r} : b^{\frac{a-b}{r}, r}.$$

31. Es ist oft möglich, diesen Quotienten, wenn er nicht unmittelbar mit dem Quotienten zweyer Sinus, oder dem Werthe einer Tangente übereinkommt, durch Hinzufügung einer Anzahl Factoren im Dividendus und Divisor auf eine solche Form zu bringen.

32. Exempel. In der Reihe, $\frac{19}{15}, \frac{19.26}{15.22}, \frac{19.26.33}{15.22.29}$, etc. wird das Glied gesucht, dessen Stelle $\frac{43}{7}$ ist, oder das erste von 6 eingeschalteten Gliedern zwischen dem sechsten und siebenten Gliede. Hier ist $a=19$, $b=15$; $r=7$; $z=\frac{43}{7}$, also

$$Z = \frac{19.26.33.40.\text{etc.}}{15.22.29.36.\text{etc.}} \times \frac{58.65.72.79.\text{etc.}}{62.69.76.83.\text{etc.}}.$$

Der Quotient $\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi}$ in (28.) läßt sich in zwey solche Brüche, wie Z enthält, zerlegen. Um Z mit jenem zu vergleichen, da m und n Brüche sind, multiplicire man alle Factoren in denselben mit 7, und setze $7m=\alpha$, $7n=\beta$, so ist

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{\alpha.\alpha+7.\alpha+14.}{\beta.\beta+7.\beta+14.} \times \frac{7-\alpha.14-\alpha.\text{etc.}}{7-\beta.14-\beta.\text{etc.}}.$$

Da α und β kleiner sind als 7, so setze man die Reihen der Factoren in Z rückwärts fort, bis man auf Factoren unter 7 kommt. Dadurch wird

$$Z \times \frac{5.12}{1.8} \times \frac{2.9..51}{6.13..55} = \frac{5.12.19.\text{etc.}}{1.8.15.\text{etc.}} \times \frac{2.9..51.58.\text{etc.}}{6.13..55.62.\text{etc.}}$$

Vergleicht man das Product rechter Hand mit dem für den Quotienten der beiden Sinus, so ist es damit übereinstimmig, wenn $\alpha = 5$, und $\beta = 1$ gesetzt wird. Es ist also $= \frac{\sin \frac{5}{7}\pi}{\sin \frac{1}{7}\pi}$, und daher

$$Z = \frac{1.8}{5.12} \times \frac{6.13..55}{2.9...51} \times \frac{\sin \frac{5}{7}\pi}{\sin \frac{1}{7}\pi};$$

33. Man sieht bald, worauf es bey dieser Reduction ankommt. Es müssen sich zwey Vielfache von r, pr und qr finden lassen, so daß $a - pr = \alpha$, und $b + rz - qr = r - \alpha$ sey, wo α kleiner als r ist. Auf gleiche Weise verhält es sich bey der Reduction auf die Formel für die Tangente eines Winkels.

34. Das bisherige ist zwar aus Kramps angeführter Schrift genommen, aber nicht ohne beträchtliche Verbesserungen und Ergänzungen. Kramp wendet ohne Bedenken die Formeln, welche für ganze und positive Exponenten erwiesen sind, auf gebrochne und negative an. Daß dieses verstattet sey, ist hier dargethan. Allein man darf nicht bey gebrochnen Exponenten die positive Differenz in eine negative verwandeln, wie es bey ganzen Exponenten angeht. Kramp aber thut dieses, und geräth dadurch auf Folgerungen, die ihn selbst befremden, denen er aber doch zu Gefallen andere, als ausgemacht anerkannte, Lehren aufopfern will.

35. Er findet, daß der unendlich fortlaufende Bruch, $\frac{a.a+r.a+2r.\text{etc.}}{b.b+r.b+2r.\text{etc.}}$, gleich sey $a^{\frac{b-a}{r}}$, r dividirt

durch $(\text{infin.}\,r)^{\frac{b-a}{r}}$. In der Gleichung, $a^{m,r}\,(a+mr)^{n,r} = a^{n,r}\,(a+nr)^{m,r}$ setzt er den Exponenten n unendlich groß. Dadurch, sagt er, verwandle sich die Facultät $(a+nr)^{m,r}$ in eine Potenz, $(\text{inf. } r)^{m,r}$. Setze man $a+mr=b$, so sey $m=\frac{b-a}{r}$, und $\frac{a^{n,r}}{b^{n,r}}=a^{\frac{b-a}{r}}$: $(\text{inf. } r)^{\frac{b-a}{r}}$. Der Theil linker Hand sey aber jener unendlich fortlaufende Bruch. Nun gründet jene zum Grunde gelegte Gleichung sich darauf, daß $a^{m+n,r}$ sowohl $a^{m,r}\,(a+mr)^{n,r}$ als $a^{n,r}\,(a+nr)^{m,r}$ ist, (18. 19.). Setzt man n unendlich, so ist $a^{m+n,r}$ gleichgültig mit $a^{n,r}$, und jenes ist zugleich $a^{n,r}\,(a+nr)^{m,r}$ welches beides sich nicht gut vereinigen läßt. Zweytens, wenn $\frac{b-a}{r}$ eine ganze Zahl ist, so wird der Bruch eine endliche Facultät mit einem ganzen Exponenten, da der von Kramp angegebene Werth unendlich klein oder unendlich groß bleibt. Drittens, die Facultät $(a+nr)^{m,r}$ ist für ein unendlich großes n doch nicht als eine Potenz zu betrachten, da m ein Bruch ist, wenn der vorgegebene Bruch nicht abbricht. Alsdann hat jene Function eben die Form, welche der Bruch hat. Zu jedem unendlichen Factor im Zähler gehört ein unendlicher Factor im Nenner. In dem Artikel, Einschalten (52. 53.), ist gezeigt, daß der vorgegebene Bruch als eingeschaltetes Glied in einer Reihe von Facultäten eine endliche Größe hat.

36. Bey dem Verhältnisse zweyer Facultäten, mit einerley Differenz, $a^{\frac{c}{r},r} : A^{\frac{c}{r},r}$ geht der unendliche Divisor aus der Rechnung heraus; allein die Vergleichung der Facultäten mit gebrochnen Exponenten ist, bey dem

Krampfschen Lehrsatze, auf den Fall gleich großer Exponenten eingeschränkt.

27. Eben so leidet, bey demselben Lehrsatze, die Formel für das Product zweyer solcher Facultäten eine Einschränkung. Damit es endlich seyn könne, muß eine gewisse Relation zwischen den Exponenten und Differenzen Statt haben. Man sehe Kramps Schrift §. 34. In §. 35. daselbst ist p gesetzt, wo nach der Rechnung in §. 34. der Exponent q, stehen sollte.

28. Es ist an diesem Orte die Aufgabe, das ohne Ende fortgesetzte Product,

$$\frac{A^p B^q}{C^{p+q}} \cdot \frac{(A+r)^p (B+r)^q}{(C+r)^{p+q}} \cdot \frac{(A+2r)^p (B+2r)^q}{(C+2r)^{p+q}} \cdot \text{etc.}$$

in ein Product aus Potenzen zweyer Facultäten zu verwandeln. Kramp bringt eine unendliche Größe hinein, die durch eine andere Annahme wieder in eine endliche, und zwar die Einheit, verwandelt wird. Dasselbe Resultat aber wird erhalten, wenn $C = A + mr$, und auch $C = B + nr$ gesetzt wird. Alsdann ist, da $C^{p+q} = C^p \cdot C^q$ ist, und so auch bey den Nennern der folgenden Factoren, das vorgegebene Product $= (A^{m,r})^p \times (B^{n,r})^q$, nach (13. u. 16.). Nach Kramps Rechnung sind m und n von p und q abhängig, welches sie aber nicht sind.

Setzt man $B = A + r$, so ist $n = m - 1$; und $B^{n,r} = B^{m-1,r} = \frac{(B-r)^{m,r}}{(B-r)^{1,r}} = \frac{A^{m,r}}{A}$. Zugleich setze man $p + q = 1$, oder $q = 1 - p$, so ist

$$A^{m,r} = A^p \cdot \frac{A^{1-p} (A+r)^p}{A+mr} \times \frac{(A+r)^{1-p} (A+2r)^p}{A+r+mr} \cdot \text{etc.}$$

Der Werth von p ist willkührlich. Nimmt man $p = m$, so hat man die Form eines interpolirten Gliedes in der

Reihe der Facultäten, a; a.a+r; a.a+r.a+2r; etc. wie sie Euler in dem Calc. differ. P. II. § 401. angiebt.

39. Kramp lehrt zweyerley Entwickelungen einer Facultät, die angeführt zu werden verdienen.

Die erste ist die Entwickelung der Facultät mit einer binomischen Basis durch die Facultäten ihrer Theile. Es ist (Kramp, 54.)

$$(a+b)^{n,r} = a^{n,r} + Aa^{n-1,r}b + Ba^{n-2,r}b^{2,r} + Ca^{n-3,r}b^{3,r} + Da^{n-4,r}b^{4,r} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten, A, B, C, D, etc. die Binomial-Coefficienten in der Potenz $(a+b)^n$ sind, nämlich $A = n$; $B = \frac{n.n-1.}{1.\ 2}$; u. s. f.

Den sinnreichen Beweis, der nur etwas lang ist, hat man bey dem Verfasser selbst nachzusehen. Der Satz ist dem binomischen Lehrsatze analog, und eine merkwürdige Erweiterung desselben. Er gilt auch für gebrochne Exponenten, weil die Facultät $(-mr)^{m+1,r}$ Null ist, so daß die Reihe für $(a-mr)^{n,r}$ mit dem Gliede $a^{n-m,r} \times (-mr)^{m,r}$ abbricht, wenn auch n ein Bruch ist, und die Coefficienten in diesem Falle eben die Form erhalten, wie für ganze Werthe von n. Dabey ist zu merken, daß die bey dem Beweise gebrauchte Gleichung, $Z^{n,r} - (Z-r)^{n,r} = nZ^{n-1,r}$ auch für gebrochne n gültig ist, s. 25. Am Ende dieses Artikels wird ein anderer Beweis dieser Formel gegeben.

40. Die Lehrsätze, welche Kramp aus dieser Form einer Facultät zieht (bey ihm nr. 61.), können nur für ganze Exponenten gelten. Die Verwandlung einer Differenz in die entgegengesetzte, welche für ganze Exponenten gilt, (4.), kann nicht für gebrochne angewandt werden. Kramp nimmt sie auch als für solche gültig an, und gründet darauf die Verwandlung einer Integralformel in die Form einer Facultät, bey welcher noch der Übergang einer

nach (5; 18.), also ist $a.a^{m,1} = a^{m+1,1} - ma^{m,1}$.

Mittelst dieser Formel kann man die gemeinen Potenzen folgeweise in eine Reihe von Facultäten verwandeln. Es ist.

$$a^{2,1} = a(a+1), \text{ also}$$
$$a^2 = a^{2,1} - a^{1,1}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit a, so ist

$$a^3 = a.a^{2,1} - a.a^{1,1}, \text{ das ist}$$
$$a^3 = a^{3,1} - 3a^{2,1} + a^{1,1}.$$

Daraus ist

$$a^4 = a^{4,1} - 6a^{3,1} + 7a^{2,1} - a^{1,1}.$$

u. s. f.

Allgemein sey

$$a^m = a^{m,1} - Aa^{m-1,1} + Ba^{m-2,1} - Ca^{m-3,1} + Da^{m-4,1} - \text{etc.}$$

so ist $a^{m+1} =$

$$a^{m+1,1} - (A+m)a^{m,1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,1} - (C+(m-2)B)a^{m-2,1} + (D+(m-3)C)a^{m-3,1} - \text{etc.}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Coefficienten, wie sie folgende Tabelle bis zu $m = 9$ darstellt.

m	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	6	7	1	0	0	0	0	0
5	10	25	15	1	0	0	0	0
6	15	65	90	31	1	0	0	0
7	21	140	350	301	63	1	0	0
8	28	266	1050	1701	966	127	1	0
9	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1

44. In der Reihe der Coefficienten A ist der erste Unterschied derselben, oder $\Delta A = m$. Hieraus ergiebt

gabe geliefert, aber ohne den Beweis beyzufügen, den mancher Leser von ihm zu erhalten wünschen mag.

42. Eine andere, auch rücklaufende Form der Coefficienten ist folgende.

$$A = \frac{m.m-1}{1.2}.$$

$$2B = \frac{m-1.m-2.}{1.2} A + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3}.$$

$$3C = \frac{m-2.m-3.}{1.2} B + \frac{m-1\ldots m-3.}{1.2.3} A + \frac{m\ldots m-3.}{1\ldots 4}.$$

$$4D = \frac{m-3.m-4.}{1.2} C + \frac{m-2\ldots m-4.}{1.2.3} B + \frac{m-1\ldots m-4.}{1\ldots 4} A + \frac{m\ldots m-4.}{1\ldots 5}.$$

u. s. f.

Es ist nämlich $(a+mr) \times a^{m,r} = a(a+r)^{m,1}$ aus (6. u. 19.). Da gesetzt ist $a^{m,r} = a^m + Aa^{m-1}r + Ba^{m-2}r^2 + Ca^{m-3}r^3 +$ etc. so ist auch $(a+r)^{m,1} = (a+r)^m + A(a+r)^{m-1}r + B(a+r)^{m-2}r^2 + C(a+r)^{m-3}r^3 +$ etc. Man entwickele in dieser letztern Reihe die Potenzen von $a+r$ nach dem binomischen Lehrsatze, und multiplicire darauf die Reihe mit a; desgleichen entwickele man das Product aus der Reihe für $a^{m,r}$ in den Factor $a+mr$. Beide Producte gleich gesetzt geben für jeden der Coefficienten, A, B, C, etc. eine Gleichung zur Bestimmung desselben.

43. Umgekehrt lassen sich Potenzen der ersten Art, a^m, durch Potenzen der zweyten Art, oder durch Facultäten, ausdrücken. Man setze den Unterschied der Factoren in der Facultät $= 1$. Es ist $a^{m+1,1} = a^{m,1}(a+m)$

nach (5; 18.), also ist $a.a^{m,1} = a^{m+1,1} - ma^{m,1}$. Mittelst dieser Formel kann man die gemeinen Potenzen folgeweise in eine Reihe von Facultäten verwandeln. Es ist.

$$a^{2,1} = a(a+1), \text{ also}$$
$$a^2 = a^{2,1} + a^{1,1}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit a, so ist

$$a^3 = a.a^{2,1} + a.a^{1,1}, \text{ das ist}$$
$$a^3 = a^{3,1} + 3a^{2,1} + a^{1,1}.$$

Daraus ist

$$a^4 = a^{4,1} + 6a^{3,1} + 7a^{2,1} + a^{1,1}.$$

u. s. f.

Allgemein sey

$$a^m = a^{m,1} + Aa^{m-1,1} + Ba^{m-2,1} + Ca^{m-3,1} + Da^{m-4,1} + \text{etc.}$$

so ist $a^{m+1} =$

$$a^{m+1,1} + (A+m)a^{m,1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,1} + (C+(m-2)B)a^{m-2,1} + (D+(m-3)C)a^{m-3,1} + \text{etc.}$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Coefficienten, wie sie folgende Tabelle bis zu $m = 9$ darstellt.

m	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	6	7	1	0	0	0	0	0
5	10	25	15	1	0	0	0	0
6	15	65	90	31	1	0	0	0
7	21	140	350	301	63	1	0	0
8	28	266	1050	1701	966	127	1	0
9	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1

44. In der Reihe der Coefficienten A ist der erste Unterschied derselben, oder $\Delta A = m$. Hieraus ergiebt

sich, nach der Differenzenrechnung, (54.), $A = \frac{1}{2}m(m-1)$. Die Reihe der A ist eine arithmetische der zweyten Ordnung.

In der Reihe der B ist der Unterschied der Glieder, oder $\Delta B = (m-1).\frac{m.m-1.}{1.2} = \frac{1}{2}(m^3 - 2m^2 + m)$.

Daraus wird, (a. a. O. 54, 55, 56.).

$$B = \frac{1}{24}(3m^4 - 14m^3 + 21m^2 - 10m),$$

oder

$$24B = m.m-1.m-2.3m-5.$$

Da $B = 0$ ist, für $m = 1$ und $m = 2$, so muß der Werth von B die Factoren $m-1$ und $m-2$ haben. Die Reihe der B ist eine arithmetische Reihe der vierten Ordnung.

In der Reihe der C ist der Unterschied,

$$\Delta C = (m-2)B = \frac{1}{24}m.m-1.m-2.m-2.3m-5.$$
$$= \frac{1}{24}(3m^5 - 20m^4 - 49m^3 - 52m^2 + 20m).$$

Man setze auf gleiche Art, wie a. a. O. die integrirende Function

$$24C = am^6 - bm^5 + cm^4 - dm^3 + em^2 - fm,$$

setze hierin $m+1$ für m, und ziehe die Function 24C von der veränderten $24(C + \Delta C)$ ab, so erhält man den Werth von $24\Delta C$, worin die noch unbestimmten Coefficienten, a, b, c, d, e, f, enthalten sind. Die Vergleichung mit dem gegebenen Werthe von $24\Delta C$ giebt die Werthe derselben, nämlich $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{17}{2}$; $c = \frac{47}{2}$; $d = \frac{97}{2}$; $e = 48$; $f = 18$, so daß

$$48C = m^6 - 11m^5 + 47m^4 - 97m^3 + 96m^2 - 36m.$$

Da diese Function $= 0$ wird, für $m = 0$; $m = 1$; $m = 2$; $m = 3$, so ist sie durch $m(m-1)(m-2)(m-3)$ oder $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$ theilbar, und der Quotient der Division ist $m^2 - 5m + 6$, Also ist

$$48C = m.m-1.m-2.m-3.m^2 - 5m + 6.$$

Auf diese Art kann man die allgemeinen Ausdrücke für die folgenden Coefficienten erhalten.

45. Leichter geschieht es auf folgende Art, die an dem Coefficienten C gezeigt werden soll. Da ΔC eine ganze

Function von m ist, die von der ersten bis zur fünften Potenz von m steigt, so ist C eine solche vom sechsten Grade, ohne ein unveränderliches Glied. Da ferner C für die Werthe 0, 1, 2, 3, Null ist, so enthält diese Function die Factoren m, m−1, m−2, m−3, und einen quadratischen $\alpha m^2 - \beta m + \gamma$. Um hierin α, β, γ, zu bestimmen, muß man drey Werthe von C kennen, als für m = 4; m = 5; m = 6. Nun hat man drey Gleichungen,

I. $1 = 4.3.2.1\ (16\alpha - 4\beta + \gamma)$.

II. $15 = 5.4.3.2\ (25\alpha - 5\beta + \gamma)$.

III. $90 = 6.5.4.3\ (36\alpha - 6\beta + \gamma)$.

Aus diesen drey Gleichungen wird erhalten $\alpha = \frac{1}{48}$; $\beta = \frac{5}{48}$; $\gamma = \frac{10}{48}$, so daß

$$48\,C = m.m-1.m-2.m-3.m^2-5m+6.$$

wie vorher gefunden ist.

Hieraus erhellt, daß D die Form,

$$\frac{1}{n} m.m-1.m-2.m-3.m-4(\alpha m^5 - \beta m^4 + \gamma m - \delta)$$

haben müsse, so wie E die Form

$$\frac{1}{p} m.m-1 \ldots m-5.\alpha m^4 - \beta m^3 + \gamma m^2 - \delta m + \varepsilon.$$

u. s. f.

46. Noch einen Weg zur Entdeckung der allgemeinen Werthe dieser Coefficienten giebt die Differenzenrechnung auf Facultäten angewandt. Dieses Verfahren lehrt la Croix in dem Traité des différences et des séries, (§. 902.) welcher den dritten Theil seines schätzbaren Werks über Differential- und Integralrechnung ausmacht. Es ist aus (25.), oder durch unmittelbare Entwickelung,

$$(m+1)^{n+1,-1} - m^{n+1,-1} = (n+1)m^{n,-1}.$$

Es sey $\Delta M = m^{n,-1}$, so ist $M = \frac{1}{n+1} m^{n+1,-1}$.

In der Reihe der A ist $\Delta A = m$, also ist $n = 1$, und $A = \frac{1}{2} m^{2,-1}$.

In der Reihe der B ist $\Delta B = (m-1)A = \frac{1}{2}(m-1)m^{2,-1} = \frac{1}{2}(m-2)m^{2,-1} + \frac{1}{2}m^{2,-1} = \frac{1}{3}m^{3,-1} + \frac{1}{2}m^{2,-1}$. Also ist $B = \frac{1}{3}(\frac{1}{4}m^{4,-1} + \frac{1}{3}m^{3,-1})$.

In der Reihe der C ist $\Delta C = (m-2)B = \frac{1}{24}(3(m-2)m^{4,-1} + 4(m-2)m^{3,-1})$. Es ist $(m-2)m^{4,-1} = (m-4)m^{4,-1} + 2m^{4,-1} = m^{5,-1} + 2m^{4,-1}$, und $(m-2)m^{3,-1} = (m-3)m^{3,-1} + m^{3,-1} = m^{4,-1} + m^{3,-1}$; also $\Delta C = \frac{1}{24}(3m^{5,-1} + 10m^{4,-1} + 4m^{3,-1}$.

Daraus ist

$$C = \tfrac{1}{24}\left(\frac{3}{6}m^{6,-1} + \frac{10}{5}m^{5,-1} + \frac{4}{4}m^{4,-1}\right)$$
$$= \tfrac{1}{48}(m^{6,-1} + 4.m^{5,-1} + 2m^{4,-1}).$$

Die Entwickelung dieser Formeln giebt dieselben Werthe mit den vorher gefundenen.

47. Die Potenzen lassen sich auch durch Facultäten mit subtractiven Unterschieden der Factoren darstellen. Es ist nämlich $a^{m+1,-1} = a^{m,-1}(a-m)$, aus (18.), oder bey ganzen Exponenten m durch unmittelbare Entwickelung. Also ist $a.a^{m,-1} = a^{m+1,-1} + ma^{m,-1}$.

Nun ist $a = a^{1,-1}$, dadurch

$$a^2 = a^{2,-1} + a^{1,-1}.$$

Hieraus ist

$$a^3 = a^{3,-1} + a^{2,-1}$$
$$+ 2a^{2,-1} + a^{1,-1}$$
$$= a^{3,-1} + 3a^{2,-1} + a^{1,-1}.$$

Allgemein sey

$$a^{m} = a^{m,-1} + Aa^{m-1,-1} + Ba^{m-2,-1} + Ca^{m-3,-1} + Da^{m-4,-1} + \text{etc.}$$

so ist

$$a^{m+1} = a^{m+1,-1} + (A+m)a^{m,-1} + (B+(m-1)A)a^{m-1,-1} + (C+(m-2)B)a^{m-2,-1} + \text{etc.}$$

Die Coefficienten sind hier dieselben wie in (43.), absolut genommen, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen.

48. Die Reihe der Coefficienten A, B, C, etc. läßt sich rückwärts fortsetzen, indem man m negativ nimmt. Alsdann bekommen die Potenzen negative Exponenten, oder werden das Reciproke der Potenzen mit positiven Exponenten. Es ist zu untersuchen, ob jene Formeln und diese umgekehrten Potenzen zusammen gehören. Die Brüche,

$$\frac{1}{(a+1)^{m,1}} + \frac{A}{(a+1)^{m+1,1}} + \frac{B}{(a+1)^{m+2,1}} + \frac{C}{(a+1)^{m+3,1}} + \text{etc.}$$

sollen in den Zählern so bestimmt werden, daß ihre Summe $= a^{-m}$ wird. Dieses ist der erste Theil des Quotienten, welchen die Entwickelung des ersten Bruches, oder des $\frac{1}{a+1.a+2....a+m.}$ giebt. Alle übrigen Theile der Reihe, in welche dieser Bruch verwandelt wird, und die Reihen, welche aus den übrigen Brüchen entstehen, heben sich gegen einander auf.

49. Es ist $a^{-m,-1} = \frac{1}{(a+1)^{m,1}}$,

und $a^{-m-1,-1} = \frac{1}{(a+1)^{m+1,1}}$, nach (11.). Da $(a+1)^{m,1} : (a+1)^{m+1,1} = 1 : a+1+m$, nach

Die hier gefundenen Werthe von A, B, C, entstehen aus denen in (46.), wenn daselbst für m gesetzt wird —m. So verhalten sich auch die entwickelten Werthe beiderseits. Die Reihen für die Potenzen von a^{+m} und a^{-m} machen eine zusammenhangende Folge aus, so wie die Potenzen selbst.

52. Um eine Reihe von Facultäten mit additiven Differenzen zu haben, setze man

$$a^{-m} = a^{-m,1} - Aa^{-m-1,1} + Ba^{-m-2,1} - Ca^{-m-3,1} + Da^{-m-4,1} - \text{etc.}$$

Es ist, vermittelst (9 oder 14.)

$$a^{-m+1,1} = (a-m)a^{-m,1}$$

also $$a.a^{-m,1} = a^{-m+1,1} + m.a^{-m,1}.$$

Dadurch ist

$$a^{-m+1} = a^{-m+1,1} - (A-m)a^{-m,1} + (B-(m+1)A)a^{-m-1,1} - (C-(m+2)B)a^{-m-2,1} + (D-(m+3)C)a^{-m-3,1} - \text{etc.}$$

Die Coefficienten A, B, C, etc. haben eben dieselben absoluten Werthe wie in (49.), nur sind sie zum Theil in den Vorzeichen von jenen verschieden.

53. Noch füge ich eine sehr einfache Deduction des erweiterten binomischen Lehrsatzes aus dem angeführten Werke von la Croix §. 904. bey.

Es ist (aus 25.)

$$(a+1)^{n,-1} = a^{n,-1} + na^{n-1,-1}$$
$$(a+2)^{n,-1} = (a+1)^{n,-1} + n(a+1)^{n-1,-1}$$
$$(a+3)^{n,-1} = (a+2)^{n,-1} + n(a+2)^{n-1,-1}$$
u. s. f.

Hier müssen nun rechter Hand die Facultäten auf dieselbe Basis a reducirt werden. Dieses geschieht durch Substitutionen aus den vorhergehenden Werthen. Es ist dadurch

$$(a+2)^{n,-1} = a^{n,-1} + 2na^{n-1,-1} + n.n-1.a^{n-2,-1},$$

indem nämlich in der ersten Formel n mit n — 1 vertauscht wird. Mittelst dieser gefundenen Formel wird auf ähnliche Art erhalten

$$(a+3)^{n,-1} = a^{n,-1} + 3na^{n-1,-1} + 3n(n-1)a^{n-2,-1} + n.n-1.n-2.a^{n-3,-1}.$$

Hier entdeckt sich schon ein Gesetz der Formation. Die Factoren, welche von n abhangen, sind Facultäten mit der Basis n und Differenz — 1. Die numerischen sind Binomialcoefficienten. Man setze

$$(a+b)^{n,-1} = a^{n,-1} + An^{1,-1}.a^{n-1,-1} + Bn^{2,-1}.a^{n-2,-1} + Cn^{3,-1}.a^{n-3,-1} + Dn^{4,-1}.a^{n-4,-1} + En^{5,-1}.a^{n-5,-1} + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten A, B, C, etc. Functionen von b sind.

Nun setze man a + 1 für a, so ist $(a+1+b)^{n,-1} = (a+1)^{n,-1} + An^{1,-1}(a+1)^{n-1,-1} + Bn^{2,-1} \times (a+1)^{n-2,-1} + Cn^{3,-1}(a+1)^{n-3,-1} + \text{etc.}$

Mittelst der Formel für $(a+1)^{n,-1}$ verwandle man die Facultäten mit der Basis a + 1 in Facultäten mit der Basis a, indem man folgeweise für n setzt n, n — 1, n — 2, u. s. f. Dadurch werden die Coefficienten von $a^{n,-1}$, $a^{n-1,-1}$ u. s. w. in der Facultät $(a+1+b)^{n,-1}$ folgende,

$$1 \parallel (A+1)n^{1,-1} \parallel (B+A)n^{2,-1} \parallel (C+B)n^{3,-1} \parallel (D+C)n^{4,-1} \parallel (E+D)n^{5,-1} \parallel + \text{etc.}$$

Die Coefficienten in der Facultät mit der Basis a + 1 + b werden aus denen in der Facultät mit der Basis a + b eben so zusammengesetzt, wie die Binomialcoefficienten in einer Potenz aus denen in der nächstvorhergehenden. Nun sind sie für die Basen, a + 1; a + 2; a + 3, die Binomialcoefficienten zu den Potenzen mit den Exponenten 1,

2, 3, also sind die Coefficienten für die Basen, $a+4$; $a+5$; u. s. f. die Binomialcoefficienten zu den Potenzen mit den Exponenten 4, 5, etc. folglich ist

$$A = b = \frac{1}{1} b^{1,-1}; \quad B = \frac{b.b-1.}{1.2} = \frac{1}{1.2} b^{2,-1}.$$

$$C = \frac{b.b-1.b-2.}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3} b^{3,-1}; \text{ u. s. f.}$$

Setzt man die Divisoren zu den Facultäten von n, so verwandeln sich diese in die Binomialcoefficienten zu der nten Potenz, und es ist, wenn diese durch A, B, C, D, E, etc. bezeichnet werden,

$$(a+b)^{n,-1} = a^{n,-1} + Aa^{n-1,-1} . b^{1,-1}$$
$$+ Ba^{n-2,-1} . b^{2,-1} + Ca^{n-3,-1} . b^{3,-1}$$
$$+ Da^{n-4,-1} . b^{4,-1} + \text{etc.}$$

wie in 39. La Croix bleibt bey der erstern Form von $(a+b)^{n,-1}$ stehen. Die zweyte aber macht die Formel dem binomischen Lehrsatze ganz ähnlich.

Fälle, mögliche s. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Falsche Wurzel einer Gleichung, bey manchen ältern Algebraisten eine unschickliche Benennung für negative Wurzel einer Gleichung, s. Algebra Th. I. S. 58. und Entgegengesetzte Größen.

Familie krummer Linien ist der Inbegriff aller krummen Linien, die unter dieselbe Gleichung von einem unbestimmten Grade gehören. Eine solche Gleichung sey z. B. diese: $a^{m-1} x = y^m$, so begreift diese die Gleichungen; $ax = y^2$; $a^2x = y^3$; $a^3x = y^4$; u. s. f. Alle die krummen Linien, die durch diese Gleichungen bestimmt werden, gehören unter eine Familie. Das Wort hat also mit Geschlecht (genus) einerley Bedeutung.

Fehler, eine Abweichung von der richtigen und scharfen Bestimmung einer Größe, ist in arithmetischen

und analytischen Berechnungen oft unvermeidlich, wegen der Form, in welcher die Größen sich darstellen. So können die irrationalen Wurzeln von Zahlen und Gleichungen, nicht vollkommen durch die Einheit und ihre Theile angegeben werden. Alle Reihen-Ausdrücke lassen einen Theil des Ganzen zurück. Man muß deswegen auf gute Annäherungs-Methoden bedacht seyn, um mit dem kleinsten Aufwand an Rechnung die möglichste Verminderung des Fehlers zu erhalten. Es ist auch nöthig, die Gränzen zu kennen, welche der übrig gelassene Fehler nicht übersteigt.

In der angewandten Mathematik sind Fehler unvermeidlich, weil die Größen, die durch Beobachtung gegeben werden, nie vollkommen genau zu erhalten stehen, es sey wegen der Werkzeuge selbst, oder wegen ihrer Anwendung. Man muß daher, wenn man die Gränze des Fehlers in den Datis schätzen kann, die daraus entspringenden Fehler in den Resultaten bestimmen. Dazu thut die Differentialrechnung nützliche Dienste. Der Fehler der Beobachtung oder der Angabe wird als eine Differentialgröße betrachtet, und eben so der Fehler in dem Resultate.

Von Cotes ist eine Abhandlung: aestimatio errorum in mixta Matheſi, bey seiner Harmonia mensurarum, und in den Oper. miscell. Lemgoviae 1768. Es werden darin Formeln zur Bestimmung der Fehler in der Berechnung geradlinichter und sphärischer Dreyecke gegeben, wenn eine Seite oder ein Winkel ein wenig unrichtig angenommen ist. S. Trigonometrische Formeln. In der Astronomie und in der Feldmeßkunst ist es sehr nöthig, Formeln zur Schätzung der Fehler zu haben, die von der Unrichtigkeit der Werkzeuge, ihrer Stellung, und von der Beobachtung selbst herrühren. Viele dergleichen sind in Kästners astron. Sammlungen, und was das Feldmessen betrifft, in Mayers praktischer Geometrie anzutreffen.

Fermats Lehrsätze von den Polygonalzahlen: Jede (ganze) Zahl ist entweder eine Triangularzahl, oder ist aus zwey oder drey Triangularzahlen zusammengesetzt.

Jede Zahl ist entweder ein Quadrat, oder sie ist aus zwey, drey oder vier Quadraten zusammengesetzt. Jede Zahl ist eine Pentagonalzahl, oder ist aus zwey, drey, vier oder fünf Pentagonalzahlen zusammengesetzt. Auf gleichförmige Art verhält es sich mit den Hexagonal- Heptagonal- und allen übrigen Polygonalzahlen, nach Maaßgabe der Anzahl ihrer Winkel.

Fermat hat diese höchst merkwürdige Folge von Sätzen als Anmerkung in Bachets Ausgabe des Diophantus zu der 31sten Aufgabe im IV. B. beygefügt. Der Beweis, sagt er, beruhe auf vielen mannigfaltigen und sehr versteckten Eigenschaften der Zahlen, weswegen er denselben nicht mittheilen könne; er hätte dazu ein eigenes Werk bestimmt, worin er die Arithmetik durch diese Untersuchungen beträchtlich erweitern würde. Dieses Werk ist aber nicht erschienen; und in der nicht starken Sammlung seiner Werke kommt auch nichts darüber vor.

Die Aufgabe des Diophantus, bey welcher jene Sätze angeführt werden, ist folgende: Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe mit der Summe ihrer Wurzeln zusammengenommen eine gegebene Zahl ausmachen. Diophantus fordert hiezu, daß eine gegebene Zahl in vier Quadrate getheilt werde, ohne doch vorher die Art, wie dieses zu bewerkstelligen sey, gezeigt zu haben. Er versteht aber nicht bloß ganze Zahlen, sondern nimmt auch gebrochne Zahlen zu den Theilen, wie in dem Beyspiele seiner Auflösung. Bachet zeigt in der Anmerkung zu der Aufgabe, an den Zahlen von 1 bis 120, daß sie alle in vier oder weniger Quadrate ganzer Zahlen zerlegbar sind, wenn sie nicht selbst ein Quadrat sind.

Euler hat den Satz von der Zerlegung jeder ganzen Zahl in vier oder weniger Quadrate zu beweisen gesucht, in den Comment. novis Acad. Petrop. T. V. Den Beweis hat er aber hernach selbst für nicht genugthuend erkannt. La Grange hat in den Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, T. I. 1770. einen scharfsinnigen Beweis gegeben, der aber schwer und tief geschöpft ist. Hernach hat Euler aufs neue den Satz vorgenom-

men, in den Actis Acad. Petrop. T. I. P. II. a. a. 1777. Er gesteht dabey ein, daß sein Beweis dem Fermatschen nachstehen möge, da dieser auch die andern Zusammensetzungen aus Polygonalzahlen habe begreifen sollen. Diesen Vorzug räumt er auch in einer andern Abhandlung, de usu observationum in Matheſi pura, Commentarii novi Petrop. T. VI. ein. Gauß hat in den Disquisitionibus arithmeticis, §. 291. ff. erstlich erwiesen daß die ganzen Zahlen von der Form $8M + 3$ sich in drey ungerade Quadrate zerlegen lassen: daß daher jede ganze positive Zahl in drey Trigonalzahlen zerlegbar ist, und dann, daß jede ganze positive in vier Quadrate sich zerlegen läßt, wobey die Null und ihr Quadrat mit aufgenommen werden. Beguelin hat sich auch mit den Lehrsätzen über die Zerlegung in Trigonal- und Quadrat-Zahlen beschäftigt. Nouveaux Mem. de l'Acad. de Berlin, pour 1773, 1774. aber seine Erweise sind nicht überzeugend; er nimmt sogar metaphysische Gründe zu Hülfe.

Fermat hat manche scharfsinnige Entdeckungen über die Zusammensetzung und Zerlegung der Zahlen gemacht. Er wird für den größten Meister in dieser höhern Arithmetik anerkannt. Vielleicht hat er manche Sätze durch empirische Bemerkungen gefunden, und dann die Beweise gesucht. Es ist sehr Schade, daß diese alle verloren gegangen sind. Sie zu finden hat den besten neuern Analysten Mühe gemacht, wovon der angeführte Satz ein Beyspiel ist.

Hier folgen noch ein paar Sätze, die man nach Fermat benennt.

I. Es sey p eine Primzahl, und a nicht durch p theilbar, so ist $a^{p-1} - 1$ durch p theilbar.

II. Jede Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe zweyer Quadrate.

Den erstern Satz trägt Fermat nicht ganz so vor, wie er hier nach Euler und Gauß angegeben ist. In der Sammlung seiner Werke, S. 163. lautet der Satz so: In jeder Reihe von Potenzen, a, a^2, a^3, a^4. etc. ist eine derselben a^m, um 1 vermindert, d. i. $a^m - 1$, durch

krummen Linie, eine krummlinichte, wie Kreis und Ellipse, oder von krummen und geraden, eine gemischtlinichte.

Figur bedeutet auch jede Zeichnung, die zum Verständniß eines Beweises und einer Auflösung beygefügt wird. Bloße Linien und Winkel, zusammengesetzte Figuren, Abbildungen von sinnlichen Gegenständen heißen in diesem Verstande Figuren. Es ist sehr nöthig, daß diese gut und deutlich gezeichnet werden. Man muß die Durchschnittspuncte der Linien einander nicht zu nahe, noch weniger zwey verschiedene in einen fallen lassen. Linien, die nicht parallel oder senkrecht auf einander seyn sollen, müssen nicht es zu seyn scheinen. Die sich auf einander beziehenden Puncte hat man mit ähnlichen Buchstaben zu bezeichnen; auch die Linien, die bloß zur Demonstration dienen, durch einen punctirten Zug zu unterscheiden, und die richtigen Verhältnisse der Linien, wo es sich wegen des Raums thun läßt, zu beobachten; kurz in allem für eine deutliche und genaue Darstellung zu sorgen. Insbesondere hat man bey Zeichnungen, worin die Linien in verschiedenen Ebenen liegen, darauf zu sehen, daß keine Verwirrung entstehe. Bey körperlichen Gegenständen wird man durch Schatten der Vorstellung Deutlichkeit geben, nur daß dieser nicht den Buchstabenbezeichnungen hinderlich werde.

Figuren heißen auch zuweilen die Zahlziffern, im Englischen heißen diese gewöhnlich figures.

Figur eines Durchmessers in der Ellipse und Hyperbel heißt das Rechteck von demselben und seinem Parameter.

Allgemeine Bemerkungen über die geradlinichten Figuren

1. Die geradlinichten Figuren werden erstlich nach der Anzahl ihrer Seitenlinien unterschieden: dreyseitige, vierseitige ... vielseitige; oder nach der Anzahl der Winkel, wofür wir im Deutschen die Endung Eck gebrauchen: Dreyeck, Viereck ... Vieleck. Zweytens nach den Verhältnissen der Seiten unter ein-

nithmeticis, sect. III. den zweyten Eulerischen Beweis gebraucht.

Der Satz II. ist von Euler in den Comm. novis Acad. Petrop. T. V. erwiesen. Fermat trägt den Satz mit einer Erweiterung in einer Anmerkung zu Bachets Ausgabe des Diophantus p. 127., folgendergestalt vor: Numerus primus, qui superat unitate quaternarii multiplicem semel tantum est hypotenusa trianguli rectanguli, ejus quadratus bis, cubus 3, quadratoquadratus 4. etc. in infinitum. Es ist aber das Quadrat von 17 oder 289 nur in die Quadrate 225 + 64 zulegbar, der Cubus von 5 oder 125 nur in die Quadrate 121 + 4, und 100 + 25. Man muß also das Quadrat der Null mit zählen.

Fermat ist doch durch die Induction einmahl zum Irrthum verleitet worden. Er sagt in den Opp. mathem. p. 115, daß alle Zahlen von der Form $2^{2^m} + 1$ Primzahlen sind, als 3, 5, 17, 257, 65537, etc. oder, wie er es mit Worten giebt, numeros a binario quadratice in se ductos et unitate auctos esse semper numeros primos. In dem vorher angeführten Schreiben pag. 162. gesteht er, daß er den Satz noch nicht habe beweisen können, aber doch an der Richtigkeit desselben nicht zweifle. Allein schon die Zahl 2^{2^5} oder $2^{32} = 4294967296$ fügt sich, nach Eulers Bemerkung (Comm. Petr. vet. T. VI. p. 104.), nicht in das Gesetz. Diese um 1 vergrößert ist durch 641 theilbar.

Figur ist eine durch Flächen oder durch Linien ganz begränzte Ausdehnung. Die erstere nennt man gewöhnlicher einen Körper oder ein Solidum. Die zweyte, die durch Linien begränzte, ist entweder eine ebene oder unebene (krummflächige) Figur. Die unebene muß die Lage ihrer Theile stetiger Weise ändern, wie ein sphärisches Dreyeck oder Vieleck, sonst ist sie nicht Eine, sondern eine zusammengesetzte Figur. Die ebene ist entweder bloß von geraden Linien eingeschlossen, eine geradlichte, oder von einer stetigen zusammenhangenden

deſſelben über zwey rechte, ſo iſt die Summe der äußern Winkel, die zu ausſpringenden Winkeln gehören, ſo groß als vier rechte mit den äußern Winkeln, die zu den einſpringenden gehören. Denn man ſchneide einen einwärts liegenden Winkel, oder alle die auf einander folgenden dieſer Art, durch eine gerade Linie, wie in (Fig. 31.) die Winkel, C, D, E, zwiſchen den ausſpringenden, ABC, EFG, durch die gerade BF ab, ſo ſind in der Figur BCDEFB alle äußern Winkel vier rechten gleich, und, wenn man die äußern bey B und F beiderſeits wegnimmt, die äußern bey C, D, E gleich den beiden innern, CBF, EFB. Man ſetze nun anſtatt der Figur mit den einſpringenden Winkeln irgend eine andere mit lauter ausſpringenden Winkeln, welche nur mit jener die Seiten AB, FG gemein habe, aber ſtatt der Seiten BC, CD, DE, EF die einzige BF hat. In dieſer iſt die Summe aller äußern Winkel vier rechten gleich; in der erſten Figur ſind die beiden äußern Winkel bey B und F um die beiden, CBF, EFB größer als in der zweyten, das iſt, um die Summe der äußern Winkel neben den einſpringenden der erſtern Figur. — So verhält es ſich bey allen Theilen des Umfanges, wo einſpringende Winkel vorkommen.

6. Setzt man den äußern Winkel bey einem einwärts liegenden negativ, da der Unterſchied des innern von zwey rechten demjenigen bey auswärtsliegenden entgegengeſetzt iſt, ſo bleibt die Summe aller äußern Winkel in allen Fällen vier rechten gleich.

Verwandlung der geradlinichten Figuren.

7. Ein Parallelogramm wird in ein anderes ihm gleiches über derſelben Grundlinie verwandelt, wenn die dieſer Linie gegen überliegende Seite verlängert, und durch die Endpuncte jener bis an dieſe verlängerte Seite Parallelen gezogen werden.

8. Ein Dreyeck wird in ein anderes ihm gleiches über derſelben Grundlinie verwandelt, wenn durch den gegenüberliegenden Winkelpunct einer dieſer Linie parallele, und

an einen Punct dieser letztern von den Endpuncten jener gerade Linien gezogen werden.

9. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 26.) in ein anderes ihm gleiches mit der gegebenen AE als einer Seitenlinie zu verwandeln, trage man auf der verlängerten DA diese AE von A nach E; ziehe durch E die parallele EF mit AB, bis an die nach F verlängerte CB, dann FAG bis an die nach G verlängerte CD; durch G ziehe man mit AD die parallele GHK, welche die verlängerten BA, FE jene in H, diese in K schneide, so ist das Parallelogramm AHKE mit der Seitenlinie HK oder AE dem ABCD gleich. — Denn die Dreyecke GCF, FKG sind gleich, auch die Dreyecke GDA, AHG, und die Dreyecke ABF, FEA. Daher bleibt, gleiches von gleichem abgezogen, gleiches, das Pgrm AC gleich dem Pgrm AK.

10. Wegen der ähnlichen Dreyecke FAE, AGH ist AE : EF = GH : AH, das ist, AK : AB = AD : AH. Die Seiten zweyer gleichwinklichten und gleich großen Parallelogrammen sind wiederkehrend proportional, oder die Seiten des einen sind die mittlern Glieder der Proportion, in welcher die Seiten des andern die äußern Glieder sind.

11. Man ziehe BE und DH, so sind die Dreyecke BAE, HAD einander ähnlich (Dreyeck, 6. Nr 2.; die Winkel ABE, AHD, welche den gleichnamigen Seiten AE, AD gegen über stehen, sind gleich; daher BE parallel mit HD.

12. Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogrammen wiederkehrend proportional sind, so sind diese gleich groß. Diese Parallelogrammen seyn AC, AK, in welchen AE : AB = AD : AH ist. Man stelle sie so zusammen, daß die Seiten AB, AH, so wie AD, AE in gerader Richtung liegen, und vollende die Pgrmme AF, AG, worin die Diagonalen AF, AG gezogen werden. Da AE : AB = AD : AH ist, so ist AE : EF = GH : AH, und die Dreyecke, AEF, GHA, worin die Winkel, E, H, gleich sind, sind sich ähnlich; also ist der

W. AFE = GAH, daher W. BAF = GAH, und die Diagonalen AF, AG liegen in gerader Richtung, so daß GAF die Diagonale des Pgrms GCFK ist. Daraus folgt nach (9.), daß die Pgrmme AC, AK gleich groß sind.

13. Hieraus ergiebt sich eine etwas einfachere Construction der Aufgabe in (9.) Auf der verlängerten Seite AD des gegebenen Pgrms AC nehme man AE der gegebenen Seite des andern gleich, ziehe BE, und mit dieser durch D die parallele DH, welche auf der verlängerten BA die andere Seite des gesuchten Pgrms AK, nämlich AH, abschneidet. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke BAE, HAD, ist AE : AB = AD : AH, und die Pgrmme AC, AK sind nach (12) gleich groß.

14. Ein Dreyeck ABC (Fig. 27.) in ein anderes ihm gleiches ADE zu verwandeln, dessen Seite AD gegeben ist, und worin der W. DAE dem W. BAC gleich ist, ziehe man die Linie CD, und mit dieser die parallele BE, welche die gerade CAE in E treffe; ferner die gerade DE, so ist △ABC = △ADE. — Denn es ist das Dreyeck BCE = BDE (2.), und wenn von beiden das BAE weggenommen wird, so bleibt gleiches, d. i. △BAC = EAD.

15. Es sey ABCDEA (Fig. 28.) eine geradlinichte Figur, oder ein Theil einer größern; diese soll in ein Dreyeck verwandelt werden. Zu dem Ende ziehe man die Diagonalen AC, AD, AE (letztere, wenn die Figur nur ein Theil einer größern ist), darauf ziehe man mit AC die parallele BM bis an die nach M verlängerte DC, und verbinde AM, so ist das Dreyeck AMD = Trapez. ABCD. Ferner werde mit AD die parallele MN bis an die nach N verlängerte ED, und die gerade AN gezogen, so ist △ANE = Trapez. AMDE, also △ANE = Fig. ABCDE.

16. Auf diese Art wird jede geradlinichte Figur in ein Dreyeck verwandelt, dessen eine Seite zugleich eine Seite der Figur ist, welche man also so zu wählen hat, daß das Dreyeck eine dem für die wirkliche Zeichnung gege-

n einen Punct dieser letztern von den Endpuncten jener grade Linien gezogen werden.

9. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 26.) in ein anderes ihm gleiches mit der gegebenen AE als einer Seitenlinie zu verwandeln, trage man auf der verlängerten DA diese AE von A nach E; ziehe durch E die parallele EF mit AB, bis an die nach F verlängerte CB, dann FAG bis an die nach G verlängerte CD; durch G ziehe man mit AD die parallele GHK, welche die verlängerten BA, FE jene in H, diese in K schneide, so ist das Parallelogramm AHKE mit der Seitenlinie HK oder AE dem ABCD gleich. — Denn die Dreyecke GCF, FKG sind gleich, auch die Dreyecke GDA, AHG, und die Dreyecke ABF, FEA. Daher bleibt, gleiches von gleichem abgezogen, gleiches, das Pgrm AC gleich dem Pgrm AK.

10. Wegen der ähnlichen Dreyecke FAE, AGH ist AE : EF = GH : AH, das ist, AE : AB = AD : AH. Die Seiten zweyer gleichwinklichten und gleich großen Parallelogrammen sind wiederkehrend proportional, oder die Seiten des einen sind die mittlern Glieder der Proportion, in welcher die Seiten des andern die äußern Glieder sind.

11. Man ziehe BE und DH, so sind die Dreyecke BAE, HAD einander ähnlich (Dreyeck, 6. Nr 2.; die Winkel ABE, AHD, welche den gleichnamigen Seiten AE, AD gegen über stehen, sind gleich; daher BE parallel mit HD.

12. Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogrammen wiederkehrend proportional sind, so sind diese gleich groß. Diese Parallelogrammen seyn AC, AK, in welchen AE : AB = AD : AH ist. Man stelle sie so zusammen, daß die Seiten AB, AH, so wie AD, AE in gerader Richtung liegen, und vollende die Pgrmme AF, AG, worin die Diagonalen AF, AG gezogen werden. Da AE : AB = AD : AH ist, so ist AE : EF = GH : AH, und die Dreyecke, AEF, GHA, worin die Winkel, E, H, gleich sind, sind sich ähnlich; also ist der

20. Wenn mehrere einwärtsliegende Winkel auf einander folgen, wie in Fig. 31. die Winkel, C, D, E, in dem Stücke ABCDEFG eines geradlinichten Umfanges, so ziehe man durch die Winkelpuncte der beiden nächsten ausspringenden Winkel, B, F, die gerade BF, und verwandle die Figur BCDEF in ein Dreyeck über der Seite BF, wodurch man den Fall eines einspringenden Winkels zwischen zwey ausspringenden erhält.

21. Ein ausspringender Winkel liege zwischen zwey Anspringenden, wie C zwischen den beiden, B, D, in Fig. 32. wo ABCDEF ein Stück des Umfanges einer geradlinichten Figur ist. In diesem Falle verändere man die Lage der Schenkel BC, DC jenes Winkels. Man ziehe BD, und mit dieser die parallele CM, welche die Seite DE, wenn es nöthig die verlängerte, in M schneide. Noch ziehe man BE, und mit dieser die parallele MN, welche die Seite FE, wenn es nöthig die verlängerte, in N treffe. Der veränderte Umfang der Figur von A bis F ist nun ABNF. — Denn $\triangle BCD = \triangle BMD = \triangle BED + \triangle BME = \triangle BED + \triangle BNE =$ Trapez. BDEN.

In dem Falle, daß CM die Seite DE selbst schneidet, ist die Construction dieselbe, nur der Beweis wird etwas geändert.

22. Aufg. Ein Trapezium, worin keine Seite einer andern parallel ist, in ein solches zu verwandeln, worin zwey Seiten einander parallel sind, und die eine dieser Seiten nebst den anliegenden Winkeln dieselbe Größe hat, wie in dem gegebenen Viereck.

Es sey ABCD (Fig. 33.) das gegebene Trapezium. Mit der Seite DC ziehe man die parallele AE bis an BC, und mit AD die parallele BF bis an AE; nehme die mittlere geometrische Proportionale AG zwischen AE und AF, theile die Seite CD nach dem Verhältnisse AE:AG in R, so nämlich, daß AE:AG = CR:DR sey ziehe durch R die parallele PQ mit AB, so ist das Trap. ABPQ = Trap. ABCD.

Aus der Construction folgt erstlich, daß die Dreyecke CRP, EAB ähnlich sind, so wie auch die Dreyecke DRQ und FAB. Dadurch ist AE : AB = RC : RP, und AF : AB = RD : RQ. Aus der stetigen Proportion, AE : AG = AG : AF, folgt zweytens, daß AE : AF = AE² : AG² ist. Da nun AE : AG = RC : RD gesetzt ist, so ist auch AE² : AG² = RC² : RD², folglich AE : AF = RC² : RD².

Hiemit verbinde man die Proportion

AF : AB = RD : RQ,

so ist

AE : AB = RC² : RD × RQ.

Da AE : AB = RC : RP = RC² : RC × RP ist, so ist RC × RP = RD × RQ, oder RC : RD = RQ : RP. Daher sind die beiden Dreyecke, CRP, DRQ, worin die Winkel bey R sich gleich sind, gleich groß (Dreyeck, 30.), und dadurch sind die beiden Trapezien, ABCD, ABPQ, gleich groß. In dem letztern sind die beiden Seiten AB, PQ parallel, wie es verlangt ist.

23. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen, und zwey divergirenden Seiten in ein Parallelogramm über der einen jener ersten Seiten verwandeln.

Es sey (Fig. 34.) das Trapezium ABEF, dessen Seiten AB, EF parallel sind, und das Parallelogramm ABCD sey mit demselben gleich groß. Die verlängerte Seite CD des Pgrms, schneide die verlängerte AF in G, und die Seite EF des Trapezium schneide AD in M. Es ist also das Dreyeck FAH = Pgr. HC. Man halbire DG in K, und ziehe AK, welche FH in L schneide, so ist das Dreyeck FAL = HAL, und △HAL = △HED, dessen Seite DE eine Diagonale des Pgrms HECD ist. Man ziehe die Linie AE, so ist △ALE = △ADE. Daher ist die gerade DL durch D und L parallel mit AE. Dieses giebt nun die Construction des Pgrms. Man ziehe nämlich parallel mit BE die unbestimmte AD, welche EF in H schneide, halbire

FH in L, ziehe durch L eine parallele mit der durch die Puncte A, E, gezogenen oder gedachten Linie. Sie treffe AD in D. Nun ziehe man DC parallel mit AB, so ist das Pgrm ABCD gleich groß mit dem Trapezium ABEF.

24. Wo man sich, wie in praktischen Fällen gewöhnlich, mit einer empirischen Construction begnügen kann, mag man folgendergestalt die umgekehrte Aufgabe auflösen, das gegebene Pgrm ABCD in ein Trapezium ABEF zu verwandeln, dessen Seiten AB und EF parallel sind, und welches mit dem Pgrm die Seite AB und den Winkel B gemein hat. Der andere an AB liegende Winkel A ist willkührlich oder auch bestimmt. Man halbirt nämlich die Verlängerung DG der Seite CD in K, zieht AK, und nimmt darauf einen Punct L, so daß nach dem Augenmaaße die durch L mit AB gezogene parallele FE das Dreyeck FAH dem Pgrm HC gleich mache. Nun sehe man nach, ob AE und DL parallel sind. Trifft dies zu, so ist L richtig angenommen, wo nicht, so muß man einen andern Punct suchen. Eine kleine Verrückung des Punctes L macht die beiden AE, DL merklich von der parallelen Lage abweichen. Das begünstigt dieses empirische Verfahren.

25. Eine geometrische Construction werden wir folgendermaßen erhalten. Es sey geschehen, was verlangt wird, und die FE schneide ein Trapezium ABEF ab, so groß als das gegebene Pgrm ABCD, das mit jenem die Seite AB nebst dem Winkel B gemein hat. Man verlängere CD bis in G auf der verlängerten AF, halbire DG in K, ziehe AK, welche EF in L schneide, so ist $\triangle ALH = \triangle DHE$. Dadurch ist (Dreyeck, 30.) $HL : HE = HD : HA$. Hiermit verbinde man die Proportion $DK : HL = AD : AH$, so entsteht aus beiden diese:

$$DK : HE = AD \times HD : AH^2,$$

oder

$$DK : AB = AD \times HD : AH^2.$$

Die Linie AD muß in H so getheilt werden, daß das Rechteck von der ganzen und dem Segment HD zu dem

Quadrate des andern Segments AH ein gegebenes Verhältniß habe. Die Aufgabe ist ein Fall der allgemeinern, welche Apollonius die Aufgabe von einem bestimmten Schnitt nannte. Er gehört in die zweyte Classe, s. bestimmter Schnitt, Th. I. S. 295. Die Aufgabe in (22.) gehört zu derselben Gattung, in die erste Classe.

Man suche zu DK, AB, AD die vierte Proportionale, welche P heiße, so ist $AD : P = AD \times HD : AH^2$; dadurch auch

$$AD \times HD : P \times HD = AD \times HD : AH^2$$

folglich $$P \times HD = AH^2.$$

Diese Gleichung wird durch den Kreis construirt. Sie verwandelt sich erstlich in folgende,

$$P \times AD = P \times AH + AH^2 \text{ oder diese:}$$

$$P \times AD = (P + AH)\,AH.$$

Man ziehe (Fig. 35.) zwey Linien, MN, PQ, die sich in A unter einem beliebigen Winkel schneiden, trage von A aus auf diese die gegebenen Linien AB, AC, die in dem gegenwärtigen Falle gleich sind, und auf MN der AB entgegengesetzt die gegebene AD, halbire BD in E und AC in F, ziehe durch diese Puncte auf beide die senkrechten EG, FG, welche sich in G schneiden, beschreibe aus G durch die Puncte B, D einen Kreis, der PQ in H, K schneide. Vermöge der Eigenschaft des Kreises ist $AB \times AD = AK \times AH$, das ist, $AB \times AD = (AC + AH)\,AH$, oder, da $AC = AB$ genommen ist, $AB \times AD = (AB + AH)\,AH$.

Nimmt man AB und AC gleich der vorher durch P bezeichneten Linie, welches hier wegen des Raums nicht geschehen konnte, und AD so groß als AD in Fig. 34. so ist AH die gesuchte Seite AH oder BE des Trapezium.

Das andere Segment AK ist hier nicht brauchbar. Die Gleichung für die Linie AH in Fig. 34. hat zwar zwey Wurzeln oder Werthe von AH, aber nur die kleinere und positive thut der Aufgabe, so wie sie hier vorgelegt ist, ein Genüge. Verlängert man die GA, DA, CB über A und B hinaus, so ist in dem Verticalwinkel von FAH

ein Dreyeck, das eben so die Summe des Pgrms ABCD und eines andern über AB auf der andern Seite dieser Linie ist, als das Dreyeck AFH der Unterschied der Pgrme ABCD und ABEH ist. Die in der Richtung von AH liegende Seite desselben ist die zweyte und negative Wurzel der Gleichung für AH, oder das Segment AK, das durch die Construction in Fig. 35. gefunden wird. Die parallele mit AB, die nun anstatt EF gezogen wird, fällt über den Durchschnittspunct der Linien FA EB hinaus.

26. Aufg. Ein Trapezium mit zwey parallelen und zwey convergirenden Seiten in ein Parallelogramm über der größern der parallelen Seiten zu verwandeln.

Es sey (Fig. 36.) ABEF das Trapezium. Man ziehe AH parallel mit BE, und verlängere EF bis an H auf jener Linie, halbire FH in L, ziehe durch L mit der Diagonale AE die parallele LD bis an D auf AH, und durch D die parallele DC mit AB, so ist Pgrm ABCD = Trap. ABEF.

Denn es ist vermöge der Construction △ADE = △ALE. Zieht man beide von dem Dreyeck AHE ab, so bleibt △HDE = △HAL, und daher Pgrm HC = △HAF, die von jenen Dreyecken das doppelte sind. Von beiden das Trapez. HDGF weggenommen, bleibt Trapez. FGCE = △DAG, und beiderseits das Trap. ABCG addirt, Trap. ABEF = Pgrm ABCD.

27. Das Pgrm ABCD wird entweder empirisch in das Trapezium ABEF verwandelt, wie in (24.) gezeigt ist, oder durch eine geometrische Construction. Es sey Pgrm ABCD = Trap. ABEF, so ist △ADG = Trap. GCEF, und △AHF = Pgrm DHEC, also △AHL = △DHE. Dadurch ist nun HL : HE = HD : HA. Die Linie DC schneide AF in G, und AL in K, so ist DK : HL = AD : AH. Aus beiden Proportionen entsteht diese

$$DK : HE = AD \times HD : AH^2.$$

oder $$DK : AB = AD \times HD : AH^2.$$

Man ſuche zu DK, AB, AD die vierte Proportionale P ſo iſt wie oben,

$$P \times HD = AH^2,$$

aber hier iſt AH die Summe von AD und DH, dort iſt AH ihr Unterſchied. Man addire auf beiden Seiten der Gleichung das Rechteck $P \times AD$, ſo iſt

$$P \times AH = AH^2 + P \times AD.$$

Dieſe Gleichung wird ebenfalls mittelſt des Kreiſes conſtruirt. Man lege zwey Linien AM, AN (Fig. 37.) unter irgend einem Winkel an einander, trage auf AN die gegebenen AB, AD, und auf AN die gegebene AC halbire BD in E, und AC in F, errichte in E und F die ſenkrechten EG, FG, welche ſich in G ſchneiden, beſchreibe aus G durch B und D einen Kreis, der auf AN die AH AK abſchneide, ſo iſt $AH \times AK = AB \times AD$. Da AH = KC iſt, ſo iſt, wenn auf beiden Seiten AH addirt wird,

$$AC \times AH = AH^2 + AB \times AD.$$

Nimmt man AC = AB, ſo erhält man eben eine ſolche Gleichung, wie die vorher für AH gefundene, welche alſo auf die jetzt gezeigte Art durch den Kreis conſtruirt wird.

Die Gleichung hat noch einen Werth für AH, nämlich das zweyte Segment von AC, welches aber hier nicht anwendbar iſt, weil die dazu gehörige parallele mit AL über den Durchſchnittspunct der beiden AF, BE hinaus liegt.

Die Aufgabe kann unmöglich werden, nämlich wenn das gegebene Parallelogramm größer iſt als das von AL und den verlängerten AF, BE eingeſchloſſene Dreyeck. In dieſem Falle ſchneidet der Kreis die AN nicht.

28. Die Verwandlung eines Parallelogramms in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten geſchieht leichter auf folgende Art. In Fig. 34. und 36. ſey das Trapezium ABEF = Pgrm ABCD, ſo iſt, wie vorher gefunden ward, HL : HE = HD : HA. Daraus durch die Verbindung der Verhältnißglieder

$$EL : EH = AD : AH.$$

Da $AD : AH = DK : HL$ ist, so ist

$$EL : EH = DK : HL$$

oder $$EL : CD = DK : HL.$$

Diese Proportion wird durch den Kreis construirt; in dem Falle, da die zwey nicht parallelen Seiten divergiren, wie in Fig. 35.; in dem Falle, da sie convergiren, wie in Fig. 37. In beiden Fällen sind in Fig. 35; 37. die Linien AB, AD, AC, H, AK diejenigen, welche in Fig. 34. 36. die Linien CD, DK, CD, HL, EL sind, und man kann in Fig. 34. die Linie PQ aus Fig. 35. sogleich auf AD fallen lassen, wenn MN auf GC genommen, und der Durchschnittspunct der beiden Linien in D gelegt wird. In Fig. 36. werde AM aus Fig 37. auf DC, AN auf AD gelegt, so daß der Punct A (Fig. 7) auf D in Fig 36. falle.

Verwandelt man die obige Proportion in eine Gleichung, worin entweder EL oder HL zur unbekannten Größe genommen, und die andere durch jene und die gegebene EH ausgedruckt wird, so sind hier beide Wurzeln brauchbar. Die eine ist EL, die andere HL, welche die Construction beide giebt.

Nachdem EL oder HL gefunden sind, ist es leicht die verlangte Linie EF zu ziehen. Man trage von A auf AB eine Linie so groß als LH seyn soll, ziehe durch den Endpunct eine parallele mit AK, so schneidet diese die AD in dem Puncte H, durch welchen EF geht. Auf ähnliche Art macht man es mit der EL.

Aus diesem Beyspiele sieht man, daß viel auf die Wahl der Größe ankommt, wodurch eine Aufgabe aufgelöset wird.

29. Aufg. Eine Figur, die in Trapezien mit parallelen Seiten getheilt ist, in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Figur AacC (Tab. XI. Fig. 38.) bestehe aus zwey Trapezien, ABba, BCcb, deren Seitenlinien, Aa, Bb, Cc, senkrecht auf ABC sind. Die gegebene Seite des Rechtecks, in welches die Figur zu verwandeln

ist, sey PQ, auf der verlängerten AC. Man halbire die Grundlinien, AB, BC, in G, H, ziehe parallel mit den Seitenlinien die, Gg, Hh, bis an die schief laufenden, ab, bc, in g, h. Durch g, h ziehe man die mit AC oder PQ parallelen, g 1, h 2, bis an die durch Q auf PQ senkrechte Qq. Dann ziehe man P 1, P 2. Ferner durch A mit P 1 die parallele Aα bis an Bb, durch α die parallele αβ mit P 2, bis an Cc. Endlich ziehe man durch β die parallele RS mit PQ, und die auf PQ senkrechten, PR, QS, so ist das Rechteck PS gleich der vorgegebenen Figur ACca.

Das Trap. ABba ist gleich dem Rechteck von den Seiten, AB, Gg (s. Trapezium), oder AB und Q 1. Da Aα parallel mit P 1 ist, so ist AB : Bα = PQ : Q 1. Daher sind die Rechtecke, AB × Q 1 und PQ × Bα, gleich groß (12.). Ferner ist das Trap. BCcb gleich dem Rechteck mit den Seiten, BC, Hh, oder BC, Q 2. Durch α ziehe man noch αm parallel mit PQ. Da αβ parallel mit P 2 ist, so ist αm : mβ = PQ : Q 2, und das Rechteck αm × Q 2 oder BC × Q 2 = PQ × mβ. Die beiden Trapezien, Ab, Bc, zusammen sind also den beiden Rechtecken, PQ × Bα + PQ × mβ, oder dem PQ × Cβ, oder dem PQSR gleich.

Auf diese Art verfährt man weiter, für alle Trapezia, welche die Figur enthält. Die senkrechte Qq mag in oder neben der Figur liegen. Zu der Seite PQ wird bequem die Höhe der ganzen Figur genommen, und zu Qq die darauf senkrechte Grundlinie oder eine der mittlern Theilungslinien.

30. Dieses Verfahren ist das bequemste zur Verwandlung der Figuren, besonders wenn sie viele kleine Seitenlinien, und einwärts liegende Winkel hat, selbst bey krummlinichten Begränzungen. Lambert hat ein ähnliches gelehrt, in den Beyträgen zum Gebrauch der Mathem. 2 Th. IV. Abh. Das hier gewiesene ist etwas leichter, so wie es Mayer in seiner praktischen Geometrie, Th. III. §. 303. vorgetragen hat.

31. Aufg. Zwey Parallelogramme in ein einziges mit einer gegebenen Seite zu verwandeln, wenn diese kleiner ist als die Summe der Grundlinien jener.

Mit den beiden Grundlinien, AB, AC, der gegebenen Pgrmme und derjenigen des gesuchten, BC, zeichne man (Fig. 39.) das Dreyeck ABC. Über den beiden Seiten, AB, AC, zeichne man die zugehörigen Pgrmme, ABDE, ACFG, und verlängere die Seiten, DE, FG, bis zu ihrem Durchschnitt in H, ziehe HA und verlängere sie bis an BC in K. Mit HK ziehe man die Parallelen, BL, CM, bis an HD und HF, und verbinde die Durchschnittspuncte L, M durch die gerade LM, so ist die Figur BCML ein Parallelogramm, das den beiden BE, CG zusammengenommen gleich ist.

Denn BL und CM sind derselben Linie AH parallel, also einander parallel; da sie derselben gleich sind, so sind sie selbst einander gleich; daher ist BLMC ein Parallelogramm, und zwar über der gegebenen BC. Ferner ist das Pgrm BE = Pgrm BH, und dieses = Pgrm BLNK, das durch die mit LB parallele HNK von dem Pgrm BM abgeschnitten wird. Eben so ist Pgrm CG = Pgrm CH, und dieses = Pgrm CMNK. Folglich sind die beiden Pgrmme BE und CG so groß als die beiden BN, CN, oder als das Pgrm BCML.

Der Satz steht in den Sammlungen des Pappus B. IV. S. 1.

Eintheilung geradlinichter Figuren.

32. Wenn eine Seitenlinie eines Parallelogramms in irgend welche Theile getheilt wird, und durch die Theilungspuncte paralleln mit den anliegenden Seitenlinien gezogen werden, so wird das Parallelogramm durch diese nach denselben Verhältnissen getheilt, wie jene Grundlinie getheilt ist.

33. Wird eine Seite eines Dreyecks in irgend welche Theile getheilt, und werden durch die Theilungspuncte nach dem gegen über liegenden Winkelpuncte gerade Linien gezo-

gen, so theilen diese das Dreyeck gleichmäßig, wie die Seite getheilt ist, ein.

34. Aufg. Ein Dreyeck nach gegebenen Verhältnissen einzutheilen, so daß die Theilungslinien mit einer der Seiten parallel gehen.

Das Dreyeck sey ABC (Fig. 40.), und die Theilungslinien sollen mit der Seite BC parallel seyn. Man ziehe durch A unter einem beliebigen Winkel eine gerade AD, und nehme AD = AB. Diese AD theile man nach den gegebenen Verhältnissen ein, als hier in die Theile, AM, MN, ND, errichte in M, N die auf AD senkrechten, ME, NF, bis an den Umfang des über AD beschriebenen Halbkreises, ziehe AE, AF, und trage diese auf AB nach AE, AF. Durch die Puncte E, F ziehe man mit BC die parallelen EE, FF, so theilen diese das Dreyeck ABC in drey Theile, die sich wie AM, MN, ND, verhalten. So verfährt man auch, wenn mehr als drey Theile zu machen sind.

Die ähnlichen Dreyecke AEE, AFF, ABC verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten (Euklides VI. 19.). In dem Kreise ist $AE^2 = AM \times AD$, und $AF^2 = AN \times AD$, also verhalten sich $AE^2 : AF^2 : AD^2 = AM : AN : AD$, folglich die Dreyecke AEE : AFF : ABC = AM : AN : AD, daher auch △AEE : Trap. EF : Trap. FC = AM : MN : ND.

35. Aufg. Ein Dreyeck nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen, so daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct gehe.

Das Dreyeck (Fig. 41.) sey ABC, der gegebene Punct D. Man theile eine der Seiten, AC, nach dem gegebenen Verhältnisse in E, und ziehe BE, so ist das Dreyeck BAE (oder auch das BCE) in ein anderes ihm gleiches, MAN, zu verwandeln, dessen dem W. A (oder dem W. C) gegen über liegende Seite durch den Punct D gehe. Es sey geschehen, was verlangt wird, und das Dreyeck MAN dem BAE gleich. Man ziehe DF parallel mit AB, so ist, wegen der gegebenen Lage des

EL × LH, und daher KM × KG = EL × LH, oder KM × KD = EL × LH.

Diese Gleichung wird wie die in (25.) construirt. Man nehme auf der verlängerten AK von K aus KN = AB (= EH), halbire DM in P und KN in Q, errichte in P und Q, auf DM und KN, die senkrechten PO, QO. welche sich in O schneiden, beschreibe aus O durch die Puncte D, M einen Kreis, welcher AN in R und S schneidet, so ist KR = EL, und KS = LH. Nun nehme man auf AB von A aus den Theil AT = KS, ziehe parallel mit AK die TH, welche AG in H schneide, und ziehe durch H mit AB die parallele EHF, so ist diese die verlangte Theilungslinie.

Denn es ist KM × KD = KR × KS, also ist KR × KS = EL × LH. Der Unterschied der beiden KR und KS (oder KR und RN) ist KN oder EH. Dieses ist auch der Unterschied der beiden EL und LH; daher ist KR = EL, und KS = LH. Denn auf jeder andern durch K gelegten Chorde des Kreises ist der Unterschied der Segmente größer oder kleiner als der Unterschied von KR und KS, oder als der von EL und LH.

37. Aufg. Von einer vielseitigen Figur ein Stück abzuschneiden, das einen gegebenen Inhalt hat, und innerhalb der ganzen Figur durch zwey gerade Linien begränzt wird, die durch einen gegebenen Punct gehen, und deren eine der Lage nach bestimmt ist.

Die Aufgabe ist die umgekehrte von der, eine geradlinichte Figur in ein Dreyeck zu verwandeln. An einem Beyspiele läßt sich das Verfahren hinreichend zeigen. Es sey (Fig. 43.) ABCDEFG ein Theil von dem Umfange einer Figur, in welcher P der Punct ist, durch welchen die beiden begränzenden Theillinien gehen sollen, und PA sey die gegebene derselben. Über der PA in dem Winkel PAB errichte man das Dreyeck PAa, das dem abzuschneidenden Stücke gleich groß ist. Durch a ziehe man mit PB die parallele ab, welche der verlängerten Seite der Figur BC in b begegne; durch b die parallele bc mit PC, welche die verlängerte Seite CD in c treffe;

durch c mit PD die parallele cd, welche die Seite DE selbst in d schneide. Durch diesen Punct d und P ziehe man die Pd, so ist PABCdP dem Dreyeck PAa gleich groß, und ist also das Stück, welches von P aus abgeschnitten werden soll.

Es wird kaum nöthig seyn zu bemerken, daß ΔPbB = PaB; ferner ΔPcC = ΔPbC; dann ΔPdD = ΔPcD. Dadurch ist nach und nach das Dreyeck PAa in die Figur PABCDdP verwandelt worden.

38. Auf diese Art kann man eine geradlinichte Figur aus einem Puncte innerhalb derselben, oder auf ihrem Umfange, in irgend eine Anzahl Theile nach gegebenen Verhältnissen eintheilen. Es sey (Fig. 43.) ABCDEGA ein Abschnitt der ganzen Figur, worin P der Theilpunct, und PA die erste Theilungslinie ist. Über PA in dem Winkel A errichte man das Dreyeck PAa, so groß als der Theil, der an PA liegen soll, und reducire dasselbe auf die Figur in PABCDdP. Nun ist Pd die zweyte Theilungslinie. Auf dieser in dem Winkel PdE errichte man ein Dreyeck so groß als der zweyte abzuschneidende Theil, und reducire es auf die Figur. So fahre man fort, bis der letzte Theil übrig bleibt.

39. In der Ausübung wird gewöhnlich erfordert, daß die Theilungslinien eines Feldes parallel oder nahe es seyn. Auch müssen sie sich oft an einer langen Seite des ganzen Feldes endigen. Hier ist ein Beyspiel, wie dieses bewerkstelligt werden mag.

40. Es ist (Fig. 44.) die Figur ABCDEFA in drey Theile, deren Verhältniß gegeben wird, zu theilen, so daß die Theilungslinien an der Seite AF sich endigen. Die Figur werde zuerst in ein Dreyeck FAP verwandelt. Die Seite AF theile man nach den gegebenen Verhältnissen ein, der Folge der Theile übereinstimmig, nämlich in die Theile AG, GH, HF, und ziehe GP, HP. Durch diese wird das Dreyeck APF nach den gegebenen Verhältnissen eingetheilt. Nun verwandle man das Dreyeck GAP in das Trapezium ABKG. Die mit BG parallele PK trifft hier die Seite der Figur BC in K.

Man ziehe GK, so ist GK die erste Theilungslinie. Diese verlängere man bis an die durch P mit AF gezogene Parallele PV in Q, und ziehe HQ, so ist $\Delta GQH = \Delta GPH$. Jenes Dreyeck werde nun in das Fünfeck GKCLH verwandelt, auf die in (37.) gewiesene Art. Nämlich mit HK wird Qc parallel bis an die verlängerte BC gezogen, und mit HC die parallele cL, welche die Seite CD in L schneidet. So ist HL die zweyte Theilungslinie. Der übrige Theil der Figur, nämlich HLDEF ist nun dem Dreyeck HPF gleich. Auch hier werde die Theilungslinie HL bis an die mit AF parallele PV verlängert, und FR gezogen, so ist $\Delta HPF = \Delta HRF$. Mit RL ziehe man parallel die Rd bis an die verlängerte CD; dann mit FD die parallele dE, welche die Seite ED in dem Endpuncte E trifft, wo die Seite FE sich anschließt. Also ist das Fünfeck HLDEF gleich dem Dreyeck FRH, d. i. dem HPF. Die ganze Figur ist nun in die verlangten drey Theile auf die verlangte Art getheilt.

Jede gefundene Theilungslinie wird bis an die mit der Grundlinie der Figur gezogene parallele PV verlängert, und an den Durchschnitt mit derselben von dem nächsten Theilungspuncte der Grundlinie (vorher der AF) eine gerade Linie gezogen; das Dreyeck, das zwischen diesen beiden an PV gezogenen, und der Theillinie der Basis enthalten ist, wird in eine vier- oder mehrseitige Figur über der Theillinie der Basis verwandelt. Solchergestalt ist jede Theilungslinie die erste Seitenlinie einer neuen Figur, bey welcher dasselbe Verfahren, wie im Anfange, wiederholt wird.

41. Die Theilungslinien einer Figur in der Lage zu ziehen, wie in der vorhergehenden Aufgabe verlangt ward, lehrt C. H. Wilke in der neuen und erleichterten Methode, den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, und dieselben ohne Rechnung einzutheilen. Halle, 1757. Aber sein Verfahren ist nicht so einfach als das hier gewiesene. Das Neue in seiner Schrift gehört dem Göttingischen Astronomen, Tobias Mayer, der sein Lehrer in der praktischen Geometrie gewesen war, welches der Verfasser

er nur andeutet, nicht bestimmt angiebt. Er ward bessen einer literarischen Entwendung in den Göttingischen Anzeigen beschuldigt, wogegen er sich in dem Anhange zu einer andern Schrift, neue Grundsätze der praktischen Geometrie, Halle, 1758. vertheidigt. Mayer hat über die Verwandlung und Eintheilung geradlinichter Figuren der Göttingischen Societät der Wissenschaften eine Abhandlung vorgelegt, die aber in ihren Sammlungen nicht erschienen ist.

42. Die Linie AF kann auch eine gerade Linie seyn, die innerhalb einer Figur so gezogen ist, daß diese zwischen ein paar durch ihre Endpuncte gezogenen parallelen ganz enthalten ist. Theilt man die beiden Theile der ganzen Figur, welche an beiden Seiten von AF liegen, nach denselben Verhältnissen in einerley Ordnung ein, so stoßen, die gleichnamigen Theilungslinien auf AF zusammen. Statt zweyer solcher kann man leicht eine einfache ziehen, die eben den Theil abschneidet, wie jene.

43. Nachdem eine Figur so getheilt ist, daß die Theilungslinien sich außer der Figur schneiden, so kann man diese mittelst der Auflösung der Aufgabe (22.) in parallele Linien verwandeln. Z. B. in (Fig. 44.) wird nach der Vorschrift daselbst das Viereck ABKG in ein Trapezium verwandelt, worin die veränderte Seite der AB parallel ist, ohne den Inhalt zu verändern. In dem Fünfeck GKCLH gedenke man sich durch C eine parallele mit AB, so giebt diese mit CL, LH und dem auf HG abgeschnittenen Stück ein Viereck, worin die Lage der Seite LH mit einer der AB parallelen vertauscht werden mag.

44. Ein anderes Verfahren ist folgendes. Man habe die vorgegebene Figur durch parallelen aus jedem Winkelpuncte mit einer schicklichen Seitenlinie in Trapezia getheilt. Diese sind nach der Reihe in Rechtecke über einer gegebenen Grundlinie verwandelt, nach (29.). Die abzuschneidenden Theile seyn auch durch Rechtecke über derselben Grundlinie gegeben. Soll nun die Figur in gewisse Theile getheilt werden, so nehme man zu dem ersten derselben so

viele auf einander folgende Trapezien von der dazu bestimmten Gränze an, daß der Unterschied von dem abzuschneidenden Theile kleiner sey als das nächste Trapezium. In diesem errichte man über der gemeinschaftlichen Scheidungslinie desselben und des nächsten jener erstern ein Rechteck so groß als der Überschuß des ersten Theils der Figur über jene Trapezien ist. Da dieser Überschuß durch ein Rechteck über einer andern Grundlinie gegeben wird, so muß dieses in jenes verwandelt werden, entweder nach (9. oder 13.) oder durch Rechnung. Die Höhen verhalten sich umgekehrt wie die Grundlinien (10.). Das Rechteck wird in ein Parallelogramm verwandelt, das mit dem Trapezium einen Winkel an der Grundlinie gemein hat, und darauf nach (25. oder 27.) in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, wenn man sich nicht der empirischen Construction in (24.) bedienen will.

Von der ersten gefundenen Theilungslinie an schneidet man nun den zweyten Theil auf dieselbe Art ab; von der zweyten Theilungslinie an den dritten Theil u. s. f. bis zu dem letzten.

Soll eine Theilungslinie durch einen gegebenen Punct gehen, so wird dieses durch die in (35*.) gewiesene Construction bewerkstelligt.

49. Noch ein bequemes Mittel, ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, das einen gegebenen Inhalt hat, zu zeichnen, ist folgendes, die Verwandlung eines Dreyecks in ein solches Trapezium.

Es sey ABC (Fig. 45.) das gegebene Dreyeck, und das Trapezium ABDE, worin ED parallel der AB, demselben gleich. Die Seite AB mit den beiden anliegenden Winkeln desselben sind gegeben. Die Seite ED schneide BC in F, so ist, da $\triangle CEF = BDF$ gesetzt wird, $FB : FC = FE : FD$. Man ziehe CG parallel mit AB bis an die verlängerte BD in G. Aus jener Proportion ist durch Verbindung der Glieder,

$$BC : BF = DE : FE$$

und $$BC : FC = DE : DF,$$

Da nun auch, wegen der parallelen AB, ED, CG, ist

$$BC : BF = CG : FD$$

und $$BC : FC = AB : FE$$

so ist

$$AB : FE = DE : DF$$
$$FE : DE = DF : CG$$

und daraus

$$AB : DE = DE : CG,$$

oder DE ist die mittlere proportionale zwischen AB und CG. Nachdem diese gefunden ist, trage man sie auf AB von A nach H, ziehe HD parallel mit AC bis an BG in D, und durch D die parallele DE mit AB, so ist das Trap. ABDE dem Dreyeck ABC gleich.

46. Ausführlichen Unterricht von der Verwandlung und Theilung der Figuren findet man in J. T. Mayers Unterricht zur praktischen Geometrie, III. Th. 27. u. 29. Kap. Des ältern Mayers Methoden sind, wie schon vorher bemerkt, in Wilkens Schrift: Methode den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, enthalten. Diese Schrift hat auch Böhm benutzt in der Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, V. Cap. S. 120—188. wo das Verfahren durch Beyspiele durchgehends erläutert wird. Zur praktischen Anwendung für wenig Geübte ist dienliche Anweisung zu Felder- und Landtheilungen, von Vollmshauß. Hannover und Leipzig 1773. 134 S. in 8. mit 6 K. Schulze hat in seinem Taschenbuche zu Anwendungen der Meßkunst (Berlin 1782.), Th. I. §. 425—451. die Verwandlung und Theilung der Figuren umständlich vorgetragen, verschiedenes auf eigenthümliche Art.

Lambert hat gezeigt, wie Figuren in gleich große Rechtecke zu verwandeln sind. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik, III. Th. 4te Abh. Auch hat Alb. Euler in dem V. Bande der Abhandl. der Bayerischen Akademie einen Aufsatz über die Theilung der Figuren geliefert.

In den Fundamentis arithmeticis et geometricis authore Ludolpho a Ceulen, Lugd. Bat. 1615.

Man ziehe GK, so ist GK die erste Theilungslinie. Diese verlängere man bis an die durch P mit AF gezogene Parallele PV in Q, und ziehe HQ, so ist ΔGQH = ΔGPH. Jenes Dreyeck werde nun in das Fünfeck GKCLH verwandelt, auf die in (37.) gewiesene Art. Nämlich mit HK wird Qc parallel bis an die verlängerte BC gezogen, und mit HC die parallele cL, welche die Seite CD in L schneidet, So ist HL die zweyte Theilungslinie. Der übrige Theil der Figur, nämlich HLDEF ist nun dem Dreyeck HPF gleich. Auch hier werde die Theilungslinie HL bis an die mit AF parallele PV verlängert, und FR gezogen, so ist ΔHPF = ΔHRF. Mit FL ziehe man parallel die Rd bis an die verlängerte CD; dann mit FD die parallele dE, welche die Seite ED in dem Endpuncte E trifft, wo die Seite FE sich anschließt. Also ist das Fünfeck HLDEF gleich dem Dreyeck FRH, d. i. dem HPF. Die ganze Figur ist nun in die verlangten drey Theile auf die verlangte Art getheilt.

Jede gefundene Theilungslinie wird bis an die mit der Grundlinie der Figur gezogene parallele PV verlängert, und an den Durchschnitt mit derselben von dem nächsten Theilungspuncte der Grundlinie (vorher der AF) eine gerade Linie gezogen; das Dreyeck, das zwischen diesen beiden an PV gezogenen, und der Theillinie der Basis enthalten ist, wird in eine vier- oder mehrseitige Figur über der Theillinie der Basis verwandelt. Solchergestalt ist jede Theilungslinie die erste Seitenlinie einer neuen Figur, bey welcher dasselbe Verfahren, wie im Anfange, wiederholt wird.

41. Die Theilungslinien einer Figur in der Lage zu ziehen, wie in der vorhergehenden Aufgabe verlangt ward, lehrt C. H. Wilke in der neuen und erleichterten Methode, den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden, und dieselben ohne Rechnung einzutheilen. Halle, 1757. Aber sein Verfahren ist nicht so einfach als das hier gewiesene. Das Neue in seiner Schrift gehört dem Göttingischen Astronomen, Tobias Mayer, der sein Lehrer in der praktischen Geometrie gewesen war, welches der Verfasser

aber nur andeutet, nicht bestimmt angiebt. Er ward deswegen einer literarischen Entwendung in den Göttingischen Anzeigen beschuldigt, wogegen er sich in dem Anhange zu einer andern Schrift, neue Grundsätze der praktischen Geometrie, Halle, 1758. vertheidigt. Mayer hat über die Verwandlung und Eintheilung geradlinichter Figuren der Göttingischen Societät der Wissenschaften eine Abhandlung vorgelegt, die aber in ihren Sammlungen nicht erschienen ist.

42. Die Linie AF kann auch eine gerade Linie seyn, die innerhalb einer Figur so gezogen ist, daß diese zwischen ein paar durch ihre Endpuncte gezogenen parallelen ganz enthalten ist. Theilt man die beiden Theile der ganzen Figur, welche an beiden Seiten von AF liegen, nach denselben Verhältnissen in einerley Ordnung ein, so stoßen, die gleichnamigen Theilungslinien auf AF zusammen. Statt zweyer solcher kann man leicht eine einfache ziehen, die eben den Theil abschneidet, wie jene.

43. Nachdem eine Figur so getheilt ist, daß die Theilungslinien sich außer der Figur schneiden, so kann man diese mittelst der Auflösung der Aufgabe (32.) in parallele Linien verwandeln. Z. B. in (Fig. 44.) wird nach der Vorschrift daselbst das Viereck ABKG in ein Trapezium verwandelt, worin die veränderte Seite der AB parallel ist, ohne den Inhalt zu verändern. In dem Fünfeck GKCLH gedenke man sich durch C eine parallele mit AB, so giebt diese mit CL, LH und dem auf HG abgeschnittenen Stück ein Viereck, worin die Lage der Seite LH mit einer der AB parallelen vertauscht werden mag.

44. Ein anderes Verfahren ist folgendes. Man habe die vorgegebene Figur durch parallelen aus jedem Winkelpuncte mit einer schicklichen Seitenlinie in Trapezia getheilt. Diese sind nach der Reihe in Rechtecke über einer gegebenen Grundlinie verwandelt, nach (29.). Die abzuschneidenden Theile seyn auch durch Rechtecke über derselben Grundlinie gegeben. Soll nun die Figur in gewisse Theile getheilt werden, so nehme man zu dem ersten derselben so

sind schon mancherley Aufgaben über die Verwandlung und Theilung der Figuren enthalten.

Anweisung, die geradlinichten Figuren nach einen gegebenen Verhältniß ohne Rechnung zu theilen, Frf. u. Leipzig 1776. ist eine Übersetzung eines Abschnittes aus Ozanam Cours de Mathématique, T. III.

Eine Schrift von le Clerc, traité de Géométrie sur le terrain, die dessen Géométrie pratique, Amsterd. 1694. beygefügt ist, enthält die Lehre von der Eintheilung und Verwandlung der Figuren sehr gut vorgetragen, nach d'Alemberts Zeugniß in dem Dictionn. encyclop. Article, Géodésie.

Der gegenwärtige Artikel wird zur bessern Übersicht der Methoden und zur Ergänzung dienen. Die hier in (22 — 28.) gegebenen brauchbaren Auflösungen fehlen bey den angeführten Schriftstellern.

Verwandlung und Theilung der Figuren durch Rechnung.

47. Geradlinichte Figuren durch Rechnung auszumessen, zerlegt man sie in Dreyecke. Der Inhalt eines Dreyecks wird durch das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe ausgedrückt, wobey das Quadrat der Längen-Einheit die Flächen-Einheit ist. Oder man bedient sich der Formel aus den drey Seiten den Inhalt zu finden. (Dreyeck, 34.). Zwey Dreyecke mit einer gemeinschaftlichen Seite geben ein Trapezium. Dieses wird ausgedruckt durch das halbe Product aus der einen Diagonale in die Summe der darauf gefällten Perpendikel.

48. Am bequemsten ist es, die Figur in Trapezien mit parallelen Seiten zu zerlegen, wie die in Fig. 46. gezeichnete, worin durch alle Winkelpuncte parallelen mit der einen Seite AA gezogen sind. Die äußerste Seite FF ist hier auch der AA parallel, statt dessen auch ein Winkelpunct vorhanden seyn mag.

Der Inhalt eines Trapezium mit zwey parallelen Seiten ist das halbe Product aus der Summe derselben in ihren Abstand von einander. In der gezeichneten Figur ziehe man auf AA eine senkrechte in a, welche die parallelen in b, c, d, e, f schneide. Der Inhalt dieser Figur ist =

$$\tfrac{1}{2}(AA \cdot ab + BB \cdot ac + CC \cdot bd + DD \cdot ce + EE \cdot df + FF \cdot af).$$

49. Wenn die Abstände der Parallelen alle von der ersten AA angenommen werden, so ist der Inhalt der Figur =

$$\tfrac{1}{2}((AA - CC)\,ab + (BB - DD)\,ac + (CC - EE)\,ad + (DD - FF)\,ae + EE \cdot af + FF \cdot af).$$

Es ist nämlich $bd = ad - ab$; $ce = ae - ac$; $df = af - ad$; $ef = af - ae$.

Wo die größern der parallelen von der kleinern abzuziehen ist, da wird das Product des Unterschiedes in den Abstand von der ersten subtractiv.

50. Hat die Figur irgendwo mehrere kleine Seiten nach einander, so schneide man diese durch eine gerade Linie zwischen den Endpuncten der äußersten unter ihnen ab, und berechne die Fläche zwischen ihnen und dieser Linie besonders, durch Zerlegung in kleine Trapezien, die wegen der kleinern parallelen und Abstände leicht berechnet werden können.

Auf diese Art werden selbst die durch krumme Linien begränzten Abschnitte der Figur nahe genug berechnet werden können.

51. Die Eintheilung der Figuren wird am bequemsten bewerkstelligt, wenn sie in Trapezien mit zwey parallelen Seiten bey der Berechnung des Inhalts zerlegt worden sind, wie dies schon oben (44.) gezeigt ist. Es ist nur hier noch anzugeben, wie die Lage einer Theilungslinie, die mit der gegebenen Seite, so wie die andern durch die Winkelpuncte gezogenen, auch parallel seyn soll, durch

$$\begin{aligned} l\ 1879200 &= 6,2739730 \\ l\ a,385613 &= 9,5861517 \\ \mathfrak{S}.l\ 5365 &= 3,7295697 \\ \log x &= 2,1305550. \end{aligned}$$

Das Exempel ist in Mayers prakt. Geom. III. §. 308. nach einer andern Formel berechnet. Das Resultat ist vollkommen dasselbe.

53. Soll die Theilungslinie durch einen gewissen Punct des Umfangs gehen, so ziehe man durch diesen Punct eine parallele mit der Grundlinie der Figur, berechne den durch diese parallele und eine der nächsten parallelen erhaltenen Abschnitt, und lege auf der einen Seite jener Linie noch ein Dreyeck zu, oder ziehe auf der andern ein solches ab, das mit jenem Trapezio den verlangten Inhalt gebe. Die Höhe dieses Dreyecks wird durch die gezogene parallele und den Inhalt des Dreyecks gegeben.

54. Von der Berechnung des Inhalts einer vier- oder mehrseitigen Figur aus den gegebenen Seiten und Winkeln, oder der unbekannten Seiten und Winkel s. den Artikel, Polygonometrie.

Ähnlichkeit geradlinichter Figuren.

55. Ebene und geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern, in der Ordnung wie sie auf einander folgen, gleich, und die Verhältnisse der zwischen diesen gleichen Winkeln liegenden Seiten dieselben sind. Z. B. in den Fünfecken Fig. 47. a und 47. b, sind die Winkel $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, $E=e$, und es ist $AB : BC = ab : bc$; $BC : CD = bc : cd$; $CD : DE = cd : de$; $DE : EA = de : ea$. Dadurch sind diese beiden Figuren einander ähnlich.

Die zwischen den gleich geordneten Winkeln liegenden Seiten der ähnlichen Figuren heißen gleichnamige (latera homologa).

56. Einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen, zerlege man jene in Dreyecke, und zeichne diesen ähnliche

und ähnlich gelegte Dreyecke, wobey eine Seite der Figur willkührlich angenommen wird, wenn sie nicht gegeben ist, wie in Fig. 47., a, b, wo die mit gleichnamigen Buchstaben bezeichneten Dreyecke sich ähnlich, und die so bezeichneten Winkel sich gleich sind. Durch diese Construction sind die Winkel der zweyten Figur denen der ersten nach ihrer Ordnung gleich. Es ist ferner

AB : AC = ab : ac
AC : CD = ac : cd
also AB : CD = ab : cd.
Eben so ist CD : DE = cd : de
Daher AB : DE = ab : de.

So erhellt, daß in jedem Falle die zwischen den übereinstimmigen Winkeln beider Figuren liegenden Seiten einerley Verhältniß haben, daher die Figuren ähnlich sind.

57. Die Seiten AE, BC seyn in M, N gleichmäßig getheilt, wie die gleichnamigen Seiten ae, bc der ähnlichen in m, n, so daß AM : AE = am : ae, und BN : BC = bn : bc ist. Dadurch sind die geraden MN, mn, in beiden Figuren ähnlich liegende, und theilen beide gleichmäßige in, so daß die Figuren MABN, mabn ähnlich, und MEDCN, medcn es gleichfalls sind.

Denn die Verhältnisse AM : AE : AB : BC : BN sind denen am : ae : ab : bc : bn nach ihrer Ordnung gleich, daher sind die daraus zusammengesetzten Verhältnisse AM : AB : BN denen am : ab : bn folgeweise gleich. Es werden MB und mb gezogen, so sind die Dreyecke MAB, mab ähnlich, und die Winkel ABM, abm sind gleich, daher die Winkel MBN, mbn. Nun sind MB : AB : BN wie mb : ab : bn, folglich sind die Dreyecke MBN, mbn ähnlich; die W. BNM, bnm sind sich gleich, und es ist MN : NB = mn : nb. Da NB : AB = nb : ab, so ist MN : AB = mn : ab. Die Figuren MABN, mabn, die aus den ähnlichen Dreyecken gleichmäßig zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

58. Wenn die abgeschnittene Figur mehr als zwey Dreyecke enthält, so ist der Beweis derselbe. In dem

andern Theile der Figur ziehe man die Diagonalen MD, MC; md, mc. Es sind ME:AE:ED:DC:CB:CN nach der Ordnung wie me : ae : ed : dc : cb : cn; also ME : ED : DC : CN wie me : ed : dc : cn. Daher sind erstlich die Dreyecke MED und med ähnlich, und die Winkel EDM, edm, sich gleich, also auch die Winkel MDC, mdc. Da MD : DE : DC wie md : de : dc sind, so ist MD : DC = md : dc, und die Dreyecke MDC, mdc sind ähnlich. Also ist MC : CD = mc : cd. Da CD : CN = cd : cn ist, so ist MC : CN = mc : cn; dadurch, und durch die gleichen Winkel MCN, mcn, sind die Dreyecke MCN, mcn ähnlich.

59. Man sieht hieraus, daß die Ähnlichkeit zweyer Figuren dargethan ist, wenn erwiesen ist, daß die gleichgeordneten Winkel bis auf zwey in beiden sich gleich, und die zwischen jenen liegenden Seiten, bis auf die zwischen diesen beiden liegende, gleiche Verhältnisse haben, so wie Figuren gleich sind, wenn die Winkel beider nach ihrer Folge bis auf zwey, und die Seiten auch nach ihrer Folge bis auf die zwischen jenen Winkeln liegende als gleich erkannt sind.

60. Figuren sind ähnlich, wenn erwiesen ist, daß die gleichgeordneten Winkel in beiden sich gleich, und daß die Verhältnisse der zwischen ihnen liegenden Seiten, bis auf zwey an einander stoßende, dieselben sind.

61. Auch sind Figuren ähnlich, von welchen erwiesen ist, daß die gleich geordneten Winkel, bis auf drey nach einander folgende, sich gleich, und daß alle gleich geordnete Seiten einerley Verhältnisse haben.

62. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 48. a. b.) haben die Puncte M, m, ähnliche Lagen, wenn die Linien, welche von denselben nach den Winkelpuncten gezogen werden, nach ihrer Folge einerley Verhältnisse haben, und die Winkel derselben in beiden übereinstimmig sind. Ist der Punct M in der einen Figur gegeben, so mache man in der andern das Dreyeck amb dem AMB ähnlich, und es hat m eine ähnliche Lage mit M.

Denn es ist, wegen der Ähnlichkeit der Figuren, AB : BC = ab : bc. Die beiden ähnlichen Dreyecke AMB, amb geben die Proportion MB : AB = mb : ab, woraus und aus jener folget MB : BC = mb : bc. Da die Winkel ABC, abc, und auch ABM, abm gleich sind, so sind die Winkel MBC, mbc gleich, und die Dreyecke BMC, bmc sind ähnlich. Folglich ist MB : MC = mb : mc, und die Winkel bey M, m sind sich gleich. Dasselbe wird von allen um M und m gelegten Dreyecken erwiesen, so viele Seiten auch die Figur haben mag.

63. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 49. a. b.) seyn M und m, N und n ähnlich liegende Puncte, so sind die Dreyecke über den Linien MN, mn, deren Spitzen in die gleichnamigen Winkelpuncte der Figur fallen, ähnlich, und es ist MN zu einer der Seiten, als AB, wie mn zu der gleichnamigen Seite ab in der andern Figur.

Denn wegen der ähnlichen Lage der Puncte sind die Dreyecke AMB und amb, ANB und anb ähnlich. Dadurch ist AM : AB = am : ab, und AB : AN = ab : an also AM : AN = am : an. Wegen der gleichen Winkel MAB und mab, NAB und nab ist W. MAN = man. Folglich sind die Dreyecke MAN, man ähnlich, und so sind auch die übrigen über MN und mn construirten Dreyecke, deren der MN und mn gegen über liegende Spitzen in die Winkelpuncte der Figuren fallen, ähnlich, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, genommen. Nun ist MN : AM = mn : am, und AM : AB = am : ab. Daraus entsteht die Proportion MN : AB = mn : ab. So ist auch MN : BC = mn : bc, und auf gleiche Art für die übrigen Seiten.

64. Umgekehrt, wenn die Dreyecke man, mbn, mcn, u. s. f. den Dreyecken MAN, MBN, MCN, u. s. f. in einer gegebenen Figur ähnlich gemacht werden, so geben die Spitzen der Dreyecke, a, b, c, etc. eine Figur, die jener ähnlich ist. Denn es sind erstlich die Winkel AMN und amn, BMN und bmn gleich, also

W. AMB = amb. Ferner sind AM : MN : MB wie am : mn : mb, daher AM : MB = am : mb, und die Dreyecke AMB und amb ähnlich. Eben dieses wird von den andern um M und m gelegten Dreyecken erwiesen, daher beide Figuren aus ähnlichen Dreyecken gleichmäßig zusammen gesetzt werden, und ähnlich sind.

Bey Feldvermessungen ist dieses Verfahren das bequemste, und erfordert nur bey sehr spitzigen Winkeln Vorsicht.

65. Die Flächenräume ähnlicher geradlinichter Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten, weil die Dreyecke, worein sie zerlegt werden, sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten verhalten. Es verhalten sich in (Fig. 47. a. b.) die Dreyecke, ABC : ACD : ADE zu den Dreyecken, abc : acd : ade wie $BC^2 : CD^2 : DE^2$ zu $bc^2 : cd^2 : de^2$ in der hier gesetzten Ordnung. Da die Linien BC : CD : DE sich wie bc : cd : de verhalten, so verhalten sich auch $BC^2 : CD^2 : DE^2$ wie $bc^2 : cd^2 : de^2$, und die Verhältnisse der Dreyecke ABC : abc; ACD : acd; ADE : ade sind dem von $BC^2 : bc^2$ oder dem duplicirten zweyer andern gleichnamigen Seiten, als $AB^2 : ab^2$, gleich; daher sind auch die Summen der Dreyecke, oder die Flächen der ähnlichen Figuren in diesem Verhältnisse.

66. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen P ähnlich, und einer andern gegebenen Q gleich sey. — Über einer der Seiten AB der Figur P (Tab. XII. Fig. 50.) beschreibe man ein Rechteck ABCD so groß als die Figur P, und errichte auf AC ein Rechteck AEFC so groß als die Figur Q (nach 29. oder auf andere Art). Dann suche man die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und AE, so ist diese die mit AB gleichnamige Seite der gesuchten Figur. Sie sey GH. Über dieser beschreibe man die Figur R, welche der P ähnlich ist, so ist R so groß als die Figur Q.

Denn da AB : GH = GH : AE ist, so ist $AB^2 : GH^2 = AB : AE$, und da $P : R = AB^2 : GH^2$ ist, so ist P : R = AB : AE. Es ist aber P : Q =

AB : AE, da ABCD = P, und AEFC = Q, gemacht sind. Also ist P : R = P : Q, folglich R = Q.

67. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die zwey gegebenen ähnlichen Figuren zusammen genommen gleich, und ihnen ähnlich sey. — Zwey gleichnamige Seiten jener beiden Figuren setze man unter einem rechten Winkel zusammen, und ziehe durch ihre beiden andern Endpuncte eine gerade Linie, so ist diese eine Seite der gesuchten Figur, und zwar die denen aus jenen Figuren genommenen gleichnamige.

Denn es seyn die beiden gegebenen Figuren P, Q, die gesuchte R, die gleichnamigen Seiten derselben seyn p, q, r, so sind P : Q : R wie pp : qq : rr, und P + Q : P = pp + qq : pp. Da P : R = pp : rr, so ist P + Q : R = pp + qq : rr. Nun ist nach dem pythagorischen Lehrsatze pp + qq = rr, also ist P + Q = R.

Figurirte Zahlen sind die Glieder arithmetischer Reihen aller Ordnungen, deren erstes Glied die Einheit ist. Der Grund der Benennung wird unten angegeben. Hier wollen wir nur diejenigen betrachten, deren letzte Differenzreihe zu Gliedern die Einheit hat. Mit Hinzufügung dieser letztern Reihe sind die Reihen solcher figurirten Zahlen:

0.	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, etc.
I.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9, etc.
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45, etc.
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165, etc.
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495, etc.
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287, etc.

u. s. f.

Das allgemeine Glied jeder dieser Reihen wird nach der Formel, in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen (7.), mittelst der Anfangsglieder der Differenzreihen gefunden. Um diese Formel hier anzuwenden, muß o als Anfangsglied in den Reihen vorgesetzt werden,

weil dort bey den Anfangsgliedern der Differenzreihen, a, b, c, d, etc. ein Glied in der Stelle o angenommen ist, dagegen hier die Glieder der ersten Reihe I. am einfachsten zu Stellenzahlen für die Glieder der folgenden gebraucht werden.

Die Stelle eines Gliedes in einer Reihe sey x, das Glied = y, so ist in I. $y = x$.

Für die Reihe II. sind die Anfangsglieder der Differenzreihen, 1 : 1. Also ist

$$y = x \cdot 1 + \frac{x \cdot x-1 \cdot}{1 \cdot 2} \cdot 1, \text{ und } y = \frac{x \cdot x+1 \cdot}{1 \cdot 2}.$$

Für die Reihe III. sind die Anfangsglieder der drey Differenzreihen, 1; 2; 1, also ist

$$y = x \cdot 1 + \frac{x \cdot x-1 \cdot}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{x \cdot x-1 \cdot x-2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1.$$

Durch die Entwickelung der Producte wird erhalten $y = \frac{1}{6} x (x^2 + 3x + 2)$, oder $y = \frac{x \cdot x+1 \cdot x+2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Für die Reihe IV. sind die Anfangsglieder der vier Differenzreihen, 1; 3; 3; 1, also ist

$$y = x \cdot 1 + \frac{x \cdot x-1 \cdot}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{x \cdot x-1 \cdot x-2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 + \frac{x \ldots x-3 \cdot}{1 \ldots 4} \cdot 1.$$

Durch die Entwickelung der Producte ergiebt sich $y = \frac{x}{24} (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$ oder $y = \frac{x \cdot x+1 \cdot x+2 \cdot x+3 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. (Von der Verwandlung eines Aggregats in ein Product s. Artikel, Factor.)

Für die folgenden Reihen wird die Rechnung immer beschwerlicher. Die gefundenen allgemeinen Glieder zeigen die Fortschreitung derselben hinlänglich. Denn da alle Reihen auf eine gleichförmige Art gebildet werden, so muß

das Gesetz, welches sich ganz unzweydeutig aus den wirklich berechneten Gliedern ergiebt, allgemein seyn. Zur Bestätigung dient folgendes. In der nten Reihe sey $y = \frac{x.x+1...x+n-1.}{1.2.....n}$, und gleichmäßig in der $(n+1)$ten Reihe das Glied in der Stelle x, welches $= z$ heiße, $z = \frac{x.x+1...x+n.}{1.2....n+1.}$, und in derselben das in der Stelle $x-1$, welches z^1 sey, $z^1 = \frac{x-1.x...x+n-1.}{1.2....n+1.}$. Der Unterschied dieser beiden Glieder muß der Werth von y seyn, wie er es auch wirklich ist.

Die Zahl x, die Stellenzahl einer figurirten Zahl, heißt ihre Seite (latus), oder ihre Wurzel.

Jedes Glied einer Verticalreihe in der Tafel der figurirten Zahlen ist die Summe aller Glieder der nächst vorhergehenden Verticalreihe von 1 in der letzten Differenzreihe, oder der mit O bezeichneten, bis mit zu dem Gliede der Horizontalreihe, worin jenes Glied befindlich ist. Denn das xte Glied einer Horizontalreihe ist die Summe des $(x-1)$ten Gliedes derselben Reihe und des xten in der nächst obern. Dieses ist wieder die Summe des $(x-1)$ten Gliedes seiner Horizontalreihe und des xten in der Verticalreihe zunächst über ihm befindlichen. So fortfahrend erhält man durch Zerlegung der Glieder der xten Verticalreihe die Summe der Glieder in der $(x-1)$ten.

Auf diese Art werden auch die Binomialcoefficienten in einer Stelle summirt, s. Binom. Coeff. 6. In der Tafel daselbst (4.) sind dieselben Zahlen wie hier, nur daß die Querreihen nicht übereintreffen. Die Querreihen in der Tafel der figurirten Zahlen sind dort herablaufende, so wie die Querreihen dort hier hinauflaufende sind.

Hieraus läßt sich nun auch die Form der Zahlen jeder Reihe der figurirten Zahlen herleiten. Das erste Glied der nten Reihe gehört in der Tafel der Binomialcoefficien-

ten auch zu der nten; das zweyte jener in dieser zu der (n+1)ten Reihe; das dritte jener in dieser zu der (n+2)ten Reihe, und so das xte jener zu der (n+x−1)ten Reihe der Binomialcoefficienten. Nun ist, für den Exponenten n+x−1, der xte Binomialcoefficient, wenn 1 mit gezählt wird, $= \frac{n+x-1 \,.\, n+x-2 \,\ldots\, n+1.}{1 \,.\, 2 \,\ldots\, x-1}$.

Ist x größer als n, so heben sich die Factoren x−1 ... n+1 im Zähler gegen die Factoren n+1 ... x−1. im Nenner auf, und es ist dieser Binomialcoefficient, oder das xte Glied in der nten Reihe der figurirten Zahlen $= \frac{n+x-1 \,.\, .\, x+1 \,.\, x}{1 \ldots n-1 \,.\, n}$, wie vorher gefunden ist. Ist x kleiner als n, so setze man in dem Binomial-Coefficienten im Zähler die Factoren, n.n−1 ... x, und im Nenner dieselben, in der Ordnung x.x+1 ... n zu, so erhält man ebenfalls den oben gefundenen Werth für das xte Glied der nten Reihe.

Die nte Reihe der figurirten Zahlen, wenn die mit 0 bezeichnete als erste mit gezählt wird, besteht aus den Coefficienten der entwickelten Potenz $(1-z)^{-n}$. Es ist nämlich (binomischer Lehrsatz, 11.)

$$(1-z)^{-n} = 1 + nz + \frac{n.n+1}{1.2}z^2 + \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}z^3$$

$$+ \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4}z^4 + \frac{n \ldots n+4.}{1 \ldots 5}z^5 + \text{etc.}$$

Aus dieser Formel läßt sich umgekehrt die Form der figurirten Zahlen herleiten. Man bezeichne die Coefficienten, außer 1, durch A, B, C, etc. so daß

$(1-z)^{-n} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$

Nun ist $(1-z)^{-n-1} = (1-z)^{-n}(1-z)^{-1} = (1-z)^{-n}(1+z+z^2+z^3+z^4+\text{etc.})$. Also ist

$(1-z)^{-n-1} = 1 + (1+A)z + (1+A+B)z^2 + (1+A+B+C)z^3 + (1+A+B+C+D)z^4$

$+ (1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E}) z^6 +$ etc. Dieſe Coefficienten ſind aber auch, $1 + \mathfrak{A} = \frac{n+1}{1}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; $1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = \frac{n+1 \ldots n+4}{1 \ldots 4}$; $1 + \ldots + \mathfrak{E} = \frac{n+1 \ldots n+5}{1 \ldots 5}$, u. ſ. w. ſo daß der rte Coefficient in der Potenz $(1-z)^{-n-1}$ die Summe der r Coefficienten in der Potenz $(1-z)^{-n}$ iſt, beiderſeits die Einheit mit gezählt. Auf gleiche Art iſt auch das rte Glied in einer Querreihe der figurirten Zahlen die Summe von r Gliedern der nächſt vorhergehenden Reihe, zufolge der Natur arithmetiſcher Reihen. Gilt nun die Form der Binomial-Coefficienten für eine Reihe der figurirten Zahlen, ſo gilt ſie auch für die folgende, alſo auch für jede der übrigen. Sie gilt aber offenbar für $n = 1$, alſo auch für $n = 2$; $n = 3$, u. ſ. f.

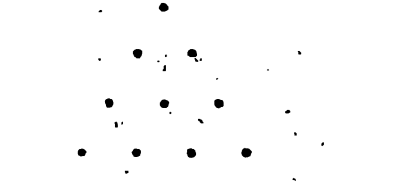
Demnach iſt für die nte Reihe, diejenige der gleich großen Differenzen mitgezählt, das rte Glied (mit Einſchluß der 1) $= \frac{n \cdot n+1 \ldots n+r-2}{1 \cdot 2 \ldots r-1}$.

Hieraus wird die zuerſt gefundene Form auf die ſchon angewandte Art hergeleitet. Iſt n kleiner als $r-1$, ſo verwandelt ſich der Bruch, $\frac{n \ldots . r \ldots n+r-2}{1 \ldots n \ldots r-1}$, durchs Aufheben der im Zähler und Nenner gemeinſchaftlichen Factoren in dieſen, $\frac{r \ldots . n+r-2}{1 \ldots . n-1}$. Iſt aber n größer als r, ſo ſetze man im Zähler die Factoren $r \cdot r+1 \ldots n-1$. vor, und eben dieſelben im Nenner nach, ſo wird

erhalten $\frac{r.r+1\ldots n+r-2.}{1.2\ldots n-1.}$. Dieſes iſt die zuerſt gefundene Form. Es bedeutet hier nur n eine um 1 größere Zahl als dort, weil hier die Reihe der gleich großen Differenzen mitgezählt wird.

Jede Querreihe in der Tafel der figurirten Zahlen kommt auch als Verticalreihe vor, in einerley Abſtand von der äußerſten, die oberſte Reihe O mitgezählt. Die Glieder einer Verticalreihe ſind eben ſo ſummirende Glieder von der nächſt vorhergehenden, als es die Glieder einer Querreihe ſind. Daher iſt jede figurirte Zahl zweymahl vorhanden, außer diejenige, welche in dem Durchſchnitte beider gleichen Reihen enthalten iſt. Dieſes erhellt auch aus der Form der Glieder. Wenn n die Zahl der Querreihe iſt, die Reihe O mitgerechnet, ſo iſt das rte Glied $= \frac{n.n+1\ldots n+r-2.}{1.2..r-1}$. Eben dieſen Werth giebt aber auch der Bruch $\frac{r.r+1\ldots n+r-2.}{r.2\ldots n-1.}$. Jene Form giebt für ein gegebenes r und veränderliches n ein Glied der rten Verticalreihe; die andere das nte Glied der rten Querreihe.

Die Benennung, figurirte Zahlen, hat ihren Urſprung von der geometriſchen Erzeugung der drey erſten Reihen. Die Einheit werde durch einen Punct dargeſtellt, ſo bildet eine Reihe von Puncten ein Glied der arithmetiſchen Reihe I. ab. Dieſe Zahlen heißen daher auch numeri lineares. Man ſetze ferner 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. m. Puncte in gleichen Abſtänden von einander, auf parallelen, gleich weit von einander abſtehenden geraden Linien, die mit ihren Endpuncten in die Schenkel eines gleichſeitigen Dreyecks fallen, ſo iſt die



Anzahl der Puncte in einem der gleichseitigen Dreyecke ein Glied der Reihe II. Die Zahlen dieser Reihe heißen daher Triangular- oder Trigonalzahlen. Man stelle sich die Puncte als Mittelpuncte von Kugeln vor. Auf das Dreyeck, das in der Seite n Kugeln enthält, werde ein anderes geschichtet, das n−1 Kugeln in der Seite enthält, über je drey Kugeln immer eine. Auf dieses Dreyeck lege man gleichmäßig eine Schicht von n−2 Kugeln, und fahre fort, bis zuletzt nur noch eine Kugel aufzulegen ist. Die Anzahl aller Kugeln in der dadurch entstandenen Pyramide ist die Summe von n Triangularzahlen, also ein Glied der Reihe III. Diese heißt daher die Reihe der Pyramidalzahlen. Die Zahlen der folgenden Reihen kann man zwar nicht geometrisch construiren, doch nennt man sie analogisch auch Pyramidalzahlen, mit dem Zusatze die zweyten, die dritten, die vierten, da jene die ersten heißen. Auch fügt man noch, um sie von andern verwandten Zahlen zu unterscheiden, den Zusatz, Dreyeckige (triangulares) hinzu.

Unter den drey Arten, wie Kugeln in Zeughäusern regelmäßig auf einander gelegt werden, ist eine, nach welcher die Schichten gleichseitige Dreyecke bilden. Der Hause macht eine Pyramide mit drey gleichen Seitenflächen. Aus der Anzahl der Kugeln in einer der Seiten des untersten Dreyecks ergiebt sich sogleich die Anzahl der Kugeln in der Pyramide. Ist jene $= n$, so ist diese

$\frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}$. Z. B. für $n = 9$, ist die Anzahl der Kugeln $= 165$.

Man kann die Puncte auch in Quadrate und andere regelmäßige Vielecke vertheilen, die zusammen ein Vieleck derselben Art bilden. Die Anzahl der Puncte in einer solchen Figur ist eine Polygonalzahl, woraus auf ähnliche Art Pyramidalzahlen gebildet werden.

Figurirte Zahlen hießen in ältern Zeiten Producte aus zwey oder mehr Factoren, welche die Seiten der Zahl genannt wurden. So erklärt sie Lazarus Schoner in

einer Abhandlung de numeris figuratis, die er seiner Ausgabe von Petri Rami Arithmetica et Algebra, Francof. 1586. beygefügt hat. Ein Product aus zwey Factoren läßt sich durch Puncte, die innerhalb eines Rechtecks gleichmäßig vertheilt sind, darstellen; ein Product aus drey Factoren durch Puncte in einem Parallelepipedum. Schoner nennt eine solche Zahl solidus. Weiter geht die geometrische Darstellung nicht, aber nach einer erdichteten Modification, wie Schoner sich ausdruckt, heißt ein Product von vier Factoren ein Biquadrat, von fünf wieder solidus, besser nach andern sursolidus, von sechs quadrati cubus, von sieben bisolidus, von acht triquadratus, von neun cubicubus. In neuern Zeiten ist die Benennung, figurirte Zahlen, für die Glieder arithmetischer Reihen aller Ordnungen, in welchen das erste Glied die Einheit ist, eingeführt. Einige, als Lambert, und d'Alembert in dem Dictionn. encyclopédique, schränken diese Benennung auf diejenigen Reihen ein, die in diesem Artikel betrachtet sind. Allein der Grund der Benennung findet auch bey denen Reihen Statt, welche aus den beständigen Unterschieden, 2, 3, 4, 5, etc. gebildet werden. Die Summen von den Gliedern der Reihe, 1, 3, 5, 7, etc. lassen sich durch Vertheilung auf Quadraten darstellen; die Summen von den Gliedern der Reihe 1, 4, 7, 10, etc. durch Vertheilung auf Fünfecken, u. s. f. die Formeln für dergleichen Reihen werden in dem Artikel, Polygonalzahlen, vorkommen. Sie fließen aus den hier entwickelten unmittelbar.

In der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts hat man sich viel mit den figurirten Zahlen beschäftigt. Faulhaber, Remmelin u. a. suchten in den Zahlen, die in der Bibel vorkommen, algebraische Zusammensetzungen, da sie glaubten, Gott habe einen geheimen Sinn, einen Fingerzeig hineingelegt, um die späte Nachwelt noch darauf aufmerksam zu machen. Die berüchtigte Zahl 666 in der Apokalypse ist, wie Remmelin fand, eine Trigonalzahl, deren Radix 36. Diese ist eine Tetragonalzahl, deren Radix 6; diese eine Pronikzahl (von der Form $nn + n$),

deren Radix 2, welche auch eine Pronikzahl ist. In den Schriften Daniels finden sich drey Zahlen, deren Zusammensetzung sonderbar genug ist, daß sie, bey der Voraussetzung eines geheimen, der Nachwelt zu enthüllenden Sinnes, als prophetische Zahlen erscheinen mußten. Kästners Gesch der Mathem. III. S. 114. ff.

Jakob Bernoulli kam bey seiner Untersuchung über die Combinationen für die Lehre von der Wahrscheinlichkeit auf die Betrachtung der figurirten Zahlen, derer, wovon in diesem Artikel gehandelt ist, und erwies das Gesetz derselben allgemein, welches er zuerst geleistet zu haben scheint. Ars conjectandi P. II. cap. 3. Sein Bruder gab ihm noch einige Abkürzungen des Beweises an. Io. Bernoulli Opera, T. III. 521. IV. 14. Hausen hat den Bernoullischen Beweis in seinen Elementis Matheseos, pag. 61. aufgenommen.

Wallis hat in der Arithmetica Infinitorum weitläuftige Rechnungen über die figurirten Zahlen angestellt, Propos. 176. seqq. Operum Vol. I. p. 445 — 451. Er gründet sie auf die Sätze von der Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen, die er nur durch Induction dargethan hatte, so wie er auch die Formen der figurirten Zahlen nur auf solche Art erweiset.

L'Huilier hat einen ihm eigenthümlichen Beweis der Formen der figurirten Zahlen in seiner Algebra, Th. II. Kap. 8. gegeben. Die Methoden in diesem Artikel sind nicht entlehnt.

Fläche, ist die Oberfläche eines Körpers (seine Begränzung) abgesondert von dem Körper gedacht. Sie ist eine ebene (s. Ebene) oder krumme Fläche. Die krummen Flächen sind entweder solche, worin sich gerade Linien, die ganz in sie fallen, ziehen lassen, wie cylindrische und konische; oder solche, worauf zwischen keinen zwey Puncten eine gerade Linie gezogen werden kann, wie die Oberflächen von Kugeln und Sphäroiden.

Die Natur der Flächen wird durch eine Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen, nebst gegebenen, die

auch fehlen können, ausgedrückt. Man setze drey Ebenen auf einander senkrecht, so ist jeder Punct der Fläche durch die Abstände von diesen drey Ebenen bestimmt. Die drey Abstände sind die drey veränderlichen Größen in jener Gleichung. Zur Deutlichkeit des Verfahrens wird es nöthig seyn, dieses bis nach dem Artikel, krumme Linien zu versparen.

Flächen-Maaß, die Einheit zur Berechnung eines Flächenraumes oder zur Vergleichung desselben mit andern Flächenräumen, z. B. Quadratfuß, Quadratmeile, Morgen, Hufe.

Flächenraum, ein durch Linien begränzter Theil einer Fläche.

Flächenzahl, numerus planus, eine Zahl, die aus der Multiplication zweyer Zahlen entsteht.

Flächen-Körperzahl, numerus planosolidus, eine Zahl, die aus der Multiplication von fünf Zahlen entsteht.

Florentinische Aufgabe (Aenigma Florentinum) ist die von **Viviani** zu Florenz den Analysten im J. 1692. vorgelegte geometrische Aufgabe, woran er sie ihre Geschicklichkeit in der damahls neuen Analysis versuchen lassen wollte. Er betitelte sie: Aenigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis hemisphaericae, autore D. Pio Lisci Posillo Geometra. Der angenommene Name bedeutet Postremo Galilaei Discipulo. Die Einkleidung, welche er der Aufgabe ertheilte, zeugt von dem Vergnügen, welches ihm ihre Erfindung gemacht hat. Sein Programm fängt folgendergestalt an.

Unter den ehrwürdigen Denkmählern des alten Griechenlands ist noch ein unzerstörbarer herrlicher Tempel vorhanden, welcher der Geometrie gewidmet ist, von kreisrunder Form, mit einem Gewölbe bedeckt, das inwendig eine vollkommene Halbkugel ist. Dieses ist mit vier gleich großen Öffnungen, rings an der Grundfläche herum, durchbrochen, die mit großer Kunst so gestaltet und so groß

gemacht ſind, daß die übrige, mit koſtbarer Moſaik gezierte Oberfläche geometriſch genau quadrirbar iſt.

1. Die Aufgabe war für die neue Analyſis leichter als Viviani vielleicht geglaubt haben mochte, wenn er gleich in ſeinem Programm ſagt, daß er nicht zweifele, ſie würde dadurch ohne Schwierigkeit aufgelöſet werden, und daß er nur die verſchiedenen Auflöſungsarten durch dieſelbe zu erhalten wünſche. Leibnitz fand die Auflöſung an demſelben Tage, an welchem er die Aufgabe erhielt, und theilte ſie in den Actis Erud. 1692. mit. Jakob Bernoulli löſete ſie nicht allein auf, ſondern zeigte auch, daß ihr auch auf unendlich viele Arten Genüge geſchehen könne. (Acta Erud. 1692. Operum, Nr. 52.). Wallis handelt in dem letzten Capitel ſeiner Algebra von dieſer Aufgabe, hat ſie aber nicht recht gefaßt. Viviani ſelbſt machte ſeine ſehr ſcharfſinnige geometriſche Auflöſung, mittelſt der Durchſchnitte der Oberflächen zweyer Cylinder mit der Halbkugelfläche, in einer kleinen, italieniſch geſchriebenen, Schrift, Florenz 1692, aber ohne Beweiſe, bekannt. Dieſe ſuchte der P. Grandi, ein Camaldulenſer Mönch, auf, und trug ſie vor in der Schrift, Geometrica divinatio Vivianeorum problematum, Florent. 1699. Er zeigt unter andern auch, daß auf der Oberfläche eines ſenkrechten Kegels ein Stück abgeſchnitten werden kann, das vollkommen quadrirbar iſt. Die dadurch entſtandene Figur nennt er Velum Camaldulenſe. Allein Joh. Bernoulli hatte ſchon früher (Act. Er. Jun. 1696.) dieſes angezeigt. Der Satz iſt: Wenn auf der Grundfläche eines ſenkrechten Kegels ein ſenkrechtes Prisma über irgend einer Grundfläche, gerad- oder krummlinichter, errichtet wird, ſo ſchneidet dieſes Prisma auf der Kegelfläche ein Stück ab, welches ſich zu der Grundfläche des Prisma verhält, wie die Seite des Kegels zu dem Halbmeſſer ſeiner Grundfläche.

2. Die Aufgabe betrifft zwar nur eine geometriſche Curioſität, allein ſie iſt ein ſehr dienliches Beyſpiel zu der Lehre von krummen Flächen, und krummen darauf gezogenen Linien. Das Intereſſe bey einer geometriſchen Unterſuchung beruht nicht auf der praktiſchen Brauchbarkeit,

sondern auf der Künstlichkeit und Nettigkeit der Auflösung, und auf der Eurythmie der gefundenen Verhältnisse.

3. Es stelle ABCDA (Tab. XII. Fig. 51.) die Hälfte einer Halbkugel vor, worin der Halbkreis BAD senkrecht auf den Halbkreis BCD steht. Auf ihrer Oberfläche sollen die sich gleichen Curven BEC, DFC gezogen werden, von solcher Beschaffenheit, daß der Flächenraum zwischen ihnen beiden und dem halben Kreisumfange BAD quadrirbar sey, oder zu dem Quadrate des Halbmessers ein rationales Verhältniß habe.

Zu der Auflösung dieser Aufgabe ist es nöthig, den Inhalt eines Sectors der Kugelfläche zwischen zwey gleichen Bogen größter Kreise und einem Bogen eines kleinern angeben zu können, das ist, ihn mit dem Inhalte der Kugelfläche zu vergleichen.

4. Es sey (Fig. 52.) O der Mittelpunct einer Kugel, ihr Halbmesser OP. Auf ihrer Oberfläche sind zwey Quadranten, PNM, gezogen, welche den Winkel MPM, oder deren Ebenen den Winkel MOM, mit einander machen. Mit den Halbmessern OM seyn die geraden QN in der Ebene der beiden Quadranten parallel, so ist NN der Bogen eines zu MM gehörigen Parallelkreises. Wenn der Quadrant PM eine volle Drehung um PO macht, so beschreibt PM die halbe Kugelfläche, und PN ein Segment derselben. Jene ist $= 2\pi . PO^2$, dieses $= 2\pi . PO \times PQ$, (Complanation, Th. I. S. 513.). Der Umfang eines größten Kreises der Kugel ist $= 2\pi . PO$, und der Sector MPM verhält sich zu der halben Kugelfläche wie MM zu $2\pi . PO$; also ist der Sector MPM $=$ MM $\times$ PO, und der kleinere NPN $=$ MM $\times$ PQ. Auch ist der Abschnitt MNNM $=$ MM $\times$ OQ $=$ MM $\times$ OP $\times$ sin MON.

5. Man lege (Fig. 51.) durch C, und durch zwey Puncte, M, m, der Curve BEC zwey größte Kreise, welche den Quadranten AB in P, p treffen. Da C der Pol von AB ist, so stehen CP, Cp senkrecht darauf, und PCp ist ein Sector der Halbkugel. Der Halbmesser der Kugel sey $= a$, der zu BP gehörige Winkel am Mittel-

puncte $= \omega$, der zu PM gehörige $= \varphi$, ſo iſt der Bogen $PB = a\omega$, $PM = a\varphi$. Der zu Pp gehörige Winkel ſey $\Delta\omega$, der zu pm $= \varphi + \Delta\varphi$, ſo iſt $Pp = a\Delta\omega$, und $pm = a(\varphi + \Delta\varphi)$. Die ſphäriſche Fläche PBM ſey $= Z$, die PMmp $= \Delta Z$, ſo iſt $\Delta Z >$ Pp $\times$ a. ſin PM, und $\Delta Z <$ Pp $\times$ a. ſin pm, das iſt

$$\Delta Z > aa \sin\varphi . \Delta\omega$$

$$\Delta Z < aa \sin(\varphi + \Delta\varphi) . \Delta\omega.$$

Es iſt $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi . \cos.\Delta\varphi + \cos\varphi . \sin\Delta\varphi$, (Goniometrie, II), und $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{6}\Delta\varphi^3 +$ etc.; $\cos\Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 +$ etc. (Cyklometrie, 5, 6.), alſo der von der Größe der Differenzen $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ unabhängige Theil des Differenzquotienten $\frac{\Delta Z}{\Delta\omega}$, das iſt der Differentialquotient $\frac{\partial Z}{\partial\omega} = aa \sin\varphi$, oder es iſt $\partial Z = aa \sin\varphi . \partial\omega$.

6. Die Relation zwiſchen ω und φ hängt von der Natur der Curve BMC ab, ſo wie dieſe von jener Relation. Damit Z einen geometriſch beſtimmbaren Werth erhalte, unabhängig von der Quadratur des Kreiſes oder einer andern Curve, muß $\sin\varphi$ eine ſolche trigonometriſche Function von ω ſeyn, die keine conſtante Größe enthält. Dieſes kann auf mancherley Art geſchehen. Z. B. es ſey $\varphi = \omega$, oder $\varphi = m\omega$, oder $\sin\varphi = m \sin\omega$, u. dgl. Die einfachſte Annahme iſt $\varphi = \omega$.

7. Man ſetze $\varphi = \omega$, oder nehme den Abſtand jedes Punctes M der Curve auf CP von dem Quadranten AB gleich dem Bogen BP, ſo iſt $\partial Z = aa \sin\omega . \partial\omega$, alſo $Z =$ Conſt $- aa \cos\omega$. In dem Anfange der Curve iſt $Z = 0$, und $\cos\omega = 1$, alſo Conſt $= aa$, und daher $Z = aa(1 - \cos\omega)$. Für $\omega = 90°$, da P in A fällt, iſt $\cos\omega = 0$, und $Z = aa$, oder die ſphäriſche Fläche BACEB $= aa$. Wird nun auf jedem Quadranten der Halbkugel eine Curve wie BEC gezogen, ſo ſchneiden dieſe

auf ihrer Fläche um A herum einen Flächenraum ab, ſo groß als 4aa oder als das Quadrat des Durchmeſſers. Das Halbkugelgewölbe wird von vier Öffnungen durchbrochen, die jede einen Quadranten des Umfanges der Grundfläche beſpannen, ſo daß zwiſchen zwey neben einander liegenden ein Pfeiler bleibt, der freylich nur auf einen Puncte ruhet.

8. Auf einer künſtlichen Erdkugel kann man die Curve BEC leicht zeichnen. Sie geht durch die Puncte, deren Breite ihrer Länge bis zu einem Quadranten, gleich iſt.

9. Man ziehe durch A und M einen größten Kreisbogen AM, ſo iſt in dem bey P rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck APM für AM die Gleichung, $\text{cof}AM = \text{cof}AP \times \text{cof}PM = \text{ſin}\,\omega \cdot \text{cof}\,\omega = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,2\omega$. Alſo iſt cofAM am größten wenn $2\omega = 90°$, oder $\omega = 45°$ iſt, das iſt, AM am kleinſten, für $\omega = 45°$. Es ſey $\text{cof}AE = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\,90° = \frac{1}{2}$, ſo iſt $AE = 60°$, der kleinſte Abſtand der Curve von A.

10. Es ſey BGC (Fig. 53.) ein Quadrant, deſſen Halbmeſſer demjenigen der Kugel gleich iſt. In demſelben ſey BmC die orthographiſche Projection der Curve BMC auf der Kugelfläche, und GB, GC von den Bogen AB, AC, auch GmQ von AMQ, dem durch M gelegten Quadranten AQ. Der Winkel BGQ, welchen der Durchſchnitt der Ebene des Kreisbogens AMQ und der Grundfläche mit GB macht, iſt dem ſphäriſchen Winkel BAQ oder PAM (Fig. 51.) gleich, wie daſelbſt der Winkel BGQ auf der Ebene des Halbkreiſes BCD an dem Mittelpuncte deſſelben G. In dem ſphäriſchen Dreyeck PAM iſt.

I. $\text{cof}AM = \text{cof}AP \cdot \text{cof}PM$.

II. $\text{ſin}\,AM \cdot \text{ſin}\,PAM = \text{ſin}\,PM$.

III. $\text{tang}\,AM \cdot \text{cof}PAM = \text{tang}\,AP$.

IV. $\text{ſin}\,AM \cdot \text{cof}PAM = \text{ſin}\,AP \cdot \text{cof}PM$.

von welchen IV. aus der Verbindung von I. und III. entſteht.

Durch den Punct m ziehe man mX ſenkrecht auf GB, und mY ſenkrecht auf GC. Noch beſchreibe man

über GQ den Quadranten AMQ, und ziehe darin auf GQ die senkrechte mM, so ist Mm die Höhe des Punctes M auf der Kugel über der Grundfläche BCD. Die Linien, GX, GY, mM, sind drey Coordinaten für die Curve BMC. Da sie nicht in einer und derselben Ebene liegt, so sind zu ihrer Gleichung drey Coordinaten nöthig.

Man setze $GX = x$; $GY = y$, $mM = z$. Da $Gm = a \sin AM$ ist, so ist $x = a. \sin AM. \cos mGB = a. \sin AM. \cos PAM = a \sin AP. \cos PM = a \cos\omega^2$. Ferner ist $y = a. \sin AM. \sin mGB = a. \sin AM. \sin PAM = a. \sin PM = a \sin\omega$. Drittens ist $Mm = a. \cos AM = a. \cos AP. \cos PM = a \sin\omega. \cos\omega$. Also

$x = a. \cos\omega^2$; $y = a \sin\omega$; $z = a \sin\omega. \cos\omega$.

Da M ein Punct auf der Kugelfläche ist, so ist $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Dieses geben auch die drey gefundenen Werthe der Coordinaten. Es ist nämlich

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (\cos\omega^4 + \sin\omega^2 + \sin\omega^2. \cos\omega^2)$
$= a^2 (\cos\omega^2 (\cos\omega^2 + \sin\omega^2) + \sin\omega^2) =$
$= a^2 (\cos\omega^2 + \sin\omega^2) = a^2$.

11. Man beschreibe (Fig. 54.) über dem Durchmesser GB, der dem Halbmesser der Kugel, a, gleich ist, einen Halbkreis, und nehme auf demselben die Abscisse $GX = a \cos\omega^2$, errichte auf GB in X die senkrechte MX, so ist $MX^2 = aa(1 - \cos\omega^2) \cos\omega^2 = aa \sin\omega^2. \cos\omega^2$; und $MX = a \sin\omega. \cos\omega$; also $MX = z$, der auf die Grundfläche der Halbkugel senkrechten Ordinate zu dem Puncte M der Curve BMC.

12. Über dem Halbkreise GMB errichte man einen halben, darauf senkrechten Cylinder von der Höhe GB oder a. In dem Abstande, $y = a \sin\omega$, von der Grundfläche führe man einen Schnitt derselben parallel. Dieser ist dem Halbkreise GMB gleich. Man nehme auf dem Durchmesser GB den Theil $GB = x = a \cos\omega^2$, so ist wie eben gefunden ward, die senkrechte $MX = z = a \sin\omega. \cos\omega$, und alle Puncte der cylindrischen Oberfläche, die wie dieser Punct M bestimmt werden, haben

mit den correſpondirenden Puncten der Curve CEB auf der Kugel für einerley Werthe von ω, dieſelben Ordinaten ſo daß die Curve auf der cylindriſchen Oberfläche der auf der Kugel gleich iſt.

13. Wenn nun auf der Fläche des Halbkreiſes BAD (Fig. 51.) über dem Durchmeſſer BD zwey Halbkreiſe, wie GMB (Fig. 54.) beſchrieben, und über dieſen auf beiden Seiten zwey ſenkrechte Halbcylinder errichtet werden, welche die Oberfläche der Halbkugel auf der einen und der andern Seite von BAD in Curven, wie BEC, CFD, ſchneiden, ſo iſt die ſphäriſche Oberfläche, welche von den vier Curven um A herum abgeſchnitten wird, dem Quadrat des Durchmeſſers gleich.

14. Dieſes iſt die Conſtruction, welche Viviani ſelbſt zur Auflöſung ſeiner Aufgabe giebt. Vermuthlich hat er die Geſtalt des Durchſchnitts einer ſphäriſchen und cylindriſchen Fläche geſucht, und iſt dabey, gewiß nicht ohne Schwierigkeit, auf das merkwürdige Reſultat gekommen, daß die von den durchſchneidenden Cylindern übrig gelaſſene Fläche der Halbkugel dem Quadrat des Durchmeſſers gleich iſt. Montücla ſagt in ſeiner Geſch. d. Mathem. Th. II. S. 94. daß dieſer Flächenraum dem doppelten Quadrat des Halbmeſſers gleich ſey, welches unrichtig iſt.

15. Der Flächenraum zwiſchen der nach der vorher angegebenen Conſtruction auf der Oberfläche eines Halbcylinders beſchriebenen Curve, dem Umfange des Halbkreiſes auf deſſen Grundfläche, und einer Seite des Cylinders, iſt dem Quadrat des Durchmeſſers deſſelben, oder dem des Halbmeſſers der Kugel gleich. — Denn wenn man einen Bogen des Halbkreiſes als Abſciſſe, die darauf in der Oberfläche bis an den Punct M der Curve gezogene als Ordinate betrachtet, ſo iſt das Differential des Flächenraums gleich dem Product aus der Ordinate in das Differential der Abſciſſe, wie bey ebenen Figuren. Der Kreisbogen ſey BM (Fig. 54.), deſſen linearischer Sinus in dem Halbkreiſe MX $= z$, ſo iſt der dazu gehörige Winkel $=$

Ang ſin $\frac{2z}{a}$, weil der Halbmeſſer des Kreiſes $= \frac{1}{2}a$ iſt, und der Bogen $BM = \frac{1}{2}a \cdot \text{Ang ſin}\frac{2z}{a}$. Das Differential iſt $= \frac{a\partial z}{\sqrt{(aa-4zz)}}$ (Differentialformeln, 29.). Die Ordinate an der Curve auf der cylindriſchen Fläche iſt der Abſtand des Schnittes, worin M befindlich iſt, von der Grundfläche, alſo $= y$. Der cylindriſche Flächenraum ſey $= Z$, ſo iſt $\partial Z = \frac{ay\partial z}{\sqrt{(aa-4zz)}}$. Nun iſt $z = a \text{ ſin } \omega \cdot \text{coſ}\omega = \frac{1}{2}a \text{ ſin } 2\omega$, alſo $\partial z = a \text{ coſ } 2\omega \cdot \partial\omega$. Ferner iſt $\sqrt{(aa-4zz)} = a \text{ coſ } 2\omega$, und $y = a \text{ ſin } \omega$. Demnach iſt $\partial Z = a^2 \text{ ſin } \omega \cdot \partial\omega$, und daraus $Z = C - a^2 \text{ coſ } \omega$. Für $BM = o$ iſt $\omega = o$, und $\text{coſ}\omega = 1$, daher $C = aa$, ſo daß $Z = aa(1 - \text{coſ}\omega)$. Das iſt derſelbe Werth, der vorher für die ſphäriſche Fläche BPM gefunden iſt. Dieſe und die cylindriſchen ſind für zuſammengehörige Puncte M einander gleich, ſo daß die cylindriſche zwiſchen der Curve, dem Halbkreiſe der Grundfläche und der Seite a dem Quadrat des Halbmeſſers der Kugel gleich iſt. Der Theil der Oberfläche von dem durch die Kugel auf die vorher angegebene Art ganz durchgeſteckten Halbcylinder, innerhalb der Kugel iſt daher zweymahl jenem Quadrate gleich, und die von beiden Halbcylindern ſo groß als das Quadrat des Durchmeſſers der Kugel. Montucla macht a. a. O. dieſe Bemerkung.

16. Boſſut hat dem Vivianiſchen Problem noch eine merkwürdige Erweiterung gegeben. Er findet, daß der körperliche Raum in der Kugel, welchen zwey Cylinder, deren Durchmeſſer halb ſo groß als derjenige der Kugel iſt, übrig laſſen, wenn ſie neben einander auf einen großen Kreis der Kugel ſenkrecht geſtellt werden, zwey Neuntel von dem Würfel des Durchmeſſers der Kugel iſt. Traités du calcul différentiel et intégral, T. II. p. 546. ff.

Der zweyte Beweis, den er daselbst giebt, ist noch leicht genug, um hier mitgetheilt werden zu können. Ich werde ihn etwas verändern, indem ich ihn an die hier schon erwiesenen Sätze knüpfe.

17. Es ist (Fig. 55.) AGB der Quadrant eines Kreises; auf diesem stehen die Quadranten CGB, CGA senkrecht, die es auch auf einander seyn, so daß die Figur GABC den Octanten einer Kugel abbildet. Über GB als Durchmesser werde der Halbkreis BNG beschrieben, und auf diesem ein halber senkrechter Cylinder errichtet. Dieser schneidet die Kugelfläche mit seiner krummen Oberfläche in der gedoppelt krummen Linie CMB, da die ebene, den ganzen Cylinder halbirende Fläche GCHB von jener in dem Quadranten CB geschnitten wird. Die innerhalb der Kugel enthaltene Portion des halben Cylinders wird theils von zwey ebenen Figuren, dem Halbkreise GNB und dem Quadranten CGB, theils von der cylindrischen Fläche CGNBMC und der sphärischen CMBC begränzt. Die krumme Linie CMB ist die zur Auflösung der Vivianischen Aufgabe gefundene (12.).

18. Man setze durch CG und einen Punct M dieser Curve eine Ebene, welche den Quadranten AGB in GP, den Halbkreis GNB in GN schneidet. Ihr Durchschnitt mit der sphärischen Fläche CMBC ist der Bogen CM eines großen Kreises, mit der cylindrischen die gerade, auf die Grundfläche senkrechte MN. (Denn eine durch M und die Axe des Cylinders gelegte Ebene schneidet die cylindrische Fläche in einer geraden, auf die Grundfläche senkrechten Linie. Der Durchschnitt der Ebenen durch CG und die Axe, und den Punct M, ist auch eine solche senkrechte, also mit jener dieselbe). Durch die gesetzte Ebene erhalten wir nun einen Abschnitt des Cylinderstücks zwischen dem Quadranten CGB und dem gemischtlinichten Viereck CGNMC. Man setze noch eine Ebene durch CG, welche die sphärische Fläche des Cylinderstücks in Cm, die cylindrische in mn, die Grundfläche in Gn schneide. Der Inhalt des zwischen beiden durch CG gelegten Ebenen enthaltenen Cylinderstücks ist die Differenz zweyer, von

CGB an genommenen Cylinderſtücke. Dieſe Differenz findet man durch den zugehörigen Unterſchied der Winkel BGN, BGn aus, ohne auf die Veränderungen von CM und MN zu achten, ſo hat man das Differential von dem Cylinderſtück zwiſchen CGB und CGNMC, woraus ſich dieſes Cylinderſtück wird finden laſſen. Zur Vergleichung mit Fig. 51. ſind zu denſelben Puncten, auch dieſelben Buchſtaben geſetzt. Jene Figur kehre man um, ſo erhalten die Linien daſelbſt dieſelbe Lage wie hier in Fig. 55.

19. Man ſetze GB = a; den Winkel BGP = ω. Der Bogen BP und der Punct M gehören hier eben ſo zuſammen, wie in Fig. 51. der Bogen BP und der Punct M. Nun iſt dort der Abſtand des Punctes M von der Ebene BAD oder BAG = a ſin ω, nämlich der in (10.) durch y bezeichnete. Alſo iſt MN = a ſin ω. Die Verlängerung von Gn treffe BA in p, ſo iſt der Bogen Nn = Pp, auch wenn ſie endlich ſind. Denn der Bogen BN gehört zu einem Winkel am Mittelpuncte, der doppelt ſo groß iſt, als der Winkel BGP am Mittelpuncte des Bogens BP, dagegen aber der zu jenem gehörige Halbmeſſer halb ſo groß iſt als der Halbmeſſer zu BP. Daher iſt BP = BN; Bp = Bn, und Pp = Nn. Man ziehe die in N berührende NH, und auf dieſe die ſenkrechte GH. Der Winkel GNH iſt gleich dem Winkel am Umfange, GBN, der auf dem Bogen GN ſteht. Alſo iſt GH = GN. ſin GBN = GB. coſ ω² = a. coſ ω².

Das Cylinderſtück zwiſchen den beiden durch CG gelegten Ebenen beſteht aus zwey pyramidenartigen Körpern, mit der gemeinſchaftlichen Spitze G. Der eine derſelben hat zur Grundfläche das Stück MNnm der Cylinderfläche und zur Höhe GH, als die ſenkrechte auf die den Cylinder in MN berührende Ebene. Da eine Pyramide der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe iſt, ſo iſt die Pyramide über MNnm = ⅓ . MN . Nn . GH, in dem bey der elementariſchen Differenz zweyer Cylinderſtücke weder die Krümmung der Grundfläche noch der Unterſchied der beiden MN, man in Betracht kommen darf.

Nun iſt $MN = a \sin\omega$; $pn = PN = a\partial\omega$; $GM = a\cos\omega^2$, alſo die Pyramide über $MNnm = \frac{1}{3}a^3 \sin\omega . \cos\omega^2 . \partial\omega$.

Die Fläche CMm iſt $= a(1 - \cos CM) . Pp$, (4.). Man verlängere den Bogen CM bis an AB in P, ſo iſt für unſere Curve $PM = PB$, (7.), alſo $\cos CM = \sin PM = \sin\omega$, und die Fläche $CMm = a(1 - \sin\omega) . a\partial\omega = a^2(1 - \sin\omega)\,\partial\omega$. Dieſe mit $\frac{1}{3}a$ multiplicirt giebt die elementariſche Pyramide über $CMm = \frac{1}{3}a^3(1 - \sin\omega)\partial\omega$.

Alſo iſt das elementariſche Cylinderſtück,

$\partial Z = \frac{1}{3}a^3(1 - \sin\omega + \cos\omega^2 . \sin\omega)\,\partial\omega$.

Es iſt $\sin\omega . \partial\omega = -\partial\cos\omega$ (Differentialrechnung, 38.); dadurch

$\partial Z = \frac{1}{3}a^3(\partial\omega + \partial\cos\omega - \cos\omega^2 . \partial\cos\omega)$.

Daher durch die Integration

$Z = \frac{1}{3}a^3(\omega + \cos\omega - \frac{1}{3}\cos\omega^3) + C$.

Für $Z = 0$ iſt $\omega = 0$, und $\cos\omega = 1$, alſo $Conſt = -\frac{2}{3}a^3$, und

$Z = \frac{1}{3}a^3(\omega + \cos\omega - \frac{1}{3}\cos\omega^3 - \frac{2}{3})$.

Das ganze Cylinderſtück, für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ (oder 90°) iſt $= \frac{1}{3}a^3(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$.

Die ganze Kugel iſt $= \frac{4}{3}\pi a^3$, alſo der Octant $GABC = \frac{1}{6}\pi a^3$. Daher iſt der Raum, welchen das Cylinderſtück in dem Octanten übrig läßt $= \frac{2}{9}a^3$.

19. Nimmt man in dem anliegenden Octanten die andere Hälfte des Cylinders, ſo läßt dieſe darin denſelben Raum übrig. Verlängert man den ganzen Cylinder nach der entgegengeſetzten Seite, ſo läßt er in der Halbkugel den Raum $4 . \frac{2}{9}a^3$ übrig. Wird durch die andere Halbkugel eben ein ſolcher Cylinder geſteckt, ſo laſſen beide in der ganzen Kugel den Raum $8 . \frac{2}{9}a^3$ übrig, das iſt $\frac{2}{3}$ von dem Würfel des Durchmeſſers.

20. Euler hat die von Viviani vorgelegte Aufgabe ganz allgemein und nach einer andern Methode behandelt, als Beyſpiel in einer Abhandlung de formulis integrali-

bus duplicatis. Comm. novi Acad. Petrop. T. XIV. a. a. 1759. Er ſucht die Gleichung für eine krumme Linie, die innerhalb des Quadranten eines Kreiſes beſchrieben wird, von ſolcher Beſchaffenheit, daß die ſphäriſche Oberfläche, wovon ein Sector der Curve, von dem Mittelpuncte aus genommen, die orthographiſche Projection iſt, algebraiſch ſich angeben laſſe, oder quadrirbar ſey. In der Formel zwiſchen dem Radius der Curve und dem zugehörigen Winkel mit dem einen Halbmeſſer (als zwiſchen Gm und BGm in Fig. 53.) ſind zwey unbeſtimmte Functionen der Tangente dieſes Winkels vorhanden. Die hier gefundene beſondere Auflöſung bringt Euler ebenfalls bey. Auch löſet Euler noch die Aufgabe auf, eine Curve auf dem Quadranten eines Kreiſes zu finden, von der Beſchaffenheit, daß das über ihrer Area ſenkrecht geſetzte und von einer Portion der Kugelfläche begränzte Solidum einen algebraiſch beſtimmbaren Inhalt habe. Den Fall, den Boſſut betrachtet, daß der übrige Theil des Octanten der Kugel ſich cubiren laſſe, hat Euler nicht unterſucht.

Man ſehe auch Lacroix Calcul différential et intégral, T. II. §. 538—542.

29. Pappus beweiſet, daß der ſphäriſche Raum auf einer Halbkugel zwiſchen ihrem Grundkreiſe und einer Spirale, die von einem beweglichen Puncte auf einem Quadranten während einer Umdrehung beſchrieben wird, dem Quadrat des Durchmeſſers gleich iſt. Collect. mathem. IV. 30.

Fluens, die fließende (Größe) iſt in der Newtoniſchen Analyſis des Unendlichen, was in der Leibnitziſchen die veränderliche heißt. Newton ſtellte ſich die Größen alle als geometriſche vor, die durch Bewegung erzeugt würden, ſ. Differentialrechnung, Th. I. S. 833. ff. Das Wort Fluens, doch als Beywort, gebraucht Cavaleri in der Geometria indiviſibilibus continuorum, L. II. p. 8. 9. Er läßt daſelbſt ebene und körperliche Figuren jene durch Bewegung einer geraden Linie, dieſe durch die einer Ebene entſtehen.

Fluxio wird von Newton die Geschwindigkeit genannt, womit eine Fluente durch die erzeugende Bewegung zunimmt. Da Geschwindigkeit ein Verhältnißbegriff ist, so ist es genauer, wie auch Newton (Methodus fluxionum, art. II.) es thut, im Plural zu sagen, Fluxionen sind die Geschwindigkeiten, womit die verschiedenen Fluenten durch die erzeugende Bewegung zunehmen. Das Verhältniß der Fluxionen ist ganz dasselbe, was nach Leibnitz Verhältniß der Differentiale genannt wird. Der Unterschied zwischen Differentialen und Fluxionen liegt bloß in der Art, wie man sich die Zunahme (oder Abnahme) einer veränderlichen Größe vorstellt. Bey dem Gebrauch der Fluxionen vermeidet man zwar die Vorstellung unendlich kleiner Größen, allein in der That nur den Ausdruck. Denn um den Begriff der Geschwindigkeit, welcher der Lehre von der Bewegung besonders angehört, hier anzuwenden, muß man unendlich kleine Räume vergleichen, wenn die Geschwindigkeiten veränderlich sind. Man kommt also doch auf den Begriff von Gränze eines Verhältnisses, oder eines solchen, welches von der Quantität der Veränderungen unabhängig ist. Geht man gleich von dieser Vorstellung aus, so ist Differential, als eine unendlich kleine Veränderung betrachtet, nur eine Abkürzung der Rede, und Fluxion ist ein bildlicher Ausdruck, um das Verhältniß der unendlich kleinen Veränderungen stetig veränderlicher Größen faßlich zu machen. Newtons Momente der Fluenten sind nichts als Leibnitzens Differentiale veränderlicher Größen.

Zwey zusammengehörige veränderliche Größen, x, y, stelle man sich als Coordinaten einer Curve vor, die jede durch die Bewegung eines Punctes beschrieben werden. Die Geschwindigkeiten der beschreibenden Puncte sind die Fluxionen der Coordinaten. Die Curve selbst, als die dritte, zu jenen beiden gehörige, Fluente betrachtet, werde auch durch einen Punct beschrieben, der immer mit dem Endpuncte der Ordinate zusammentrifft, so ist die Geschwindigkeit dieses Punctes die Fluxion der Curve.

z. B. an dem Kreise ist die Gleichung für die Coordinaten $2ax - xx = yy$, wenn die Abscissen von einem Endpuncte des Durchmessers an genommen, und die Ordinaten senkrecht darauf gesetzt werden. Bezeichnet man nach Newton die Fluxionen durch die Symbole der Fluenten mit einem Puncte darüber, so ist $\dot{x} : \dot{y} = y : a - x$. Der zu x und y gehörige Kreisbogen sey $= s$, so ist $\dot{x} : \dot{s} = y : a$, und $\dot{y} : \dot{s} = a - x : a$.

Die Fluxion einer Fläche ist nicht die Geschwindigkeit der beschreibenden oder erzeugenden Linie, wie die Fluxion einer Linie die Geschwindigkeit des beschreibenden Punctes ist. Denn die Zunahme der Fläche kommt auf die Größe der beschreibenden Linie an, und hängt bloß von derselben ab, wenn man für die verschiedenen Positionen der Fläche die Geschwindigkeit der beschreibenden Linie gleich groß setzt. Man muß sich statt der Fläche eine ihr proportionale Linie vorstellen. Z. B. für die Parabel ist die Gleichung zwischen den Coordinaten, $ax = yy$. Die zu x und y gehörige Area sey Z. Diese vergleiche man mit dem Rechteck ax, und die Fluxion $\dot{Z}$ mit der Fluxion $a\dot{x}$. Allgemein ist $\dot{Z} : a\dot{x} = y : a$ (nach der Notation in der Differentialrechnung $\partial Z = y\partial x$). Da an der Parabel ist $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, so ist $\dot{Z} : 2y\dot{y} = y : a$, oder $\dot{Z} : a\dot{y} = 2yy : 2a$.

Auf ähnliche Art werden die Fluxionen der körperlichen Räume und der Oberflächen, so wie aller Arten von Größen auf Fluxionen von Linien gebracht. Dieß macht aber Weitläuftigkeit, die man auch in der Fluxionenrechnung sich erspart. Alsdann ist aber diese von der Differentialrechnung nur in der Notation unterschieden.

Die Notation in der Fluxionenrechnung ist offenbar lange nicht so bequem als die in der Differentialrechnung eingeführte. Die Engländer sind die einzigen, welche jene noch immer beybehalten, aus Ehrerbietung für ihren großen Landsmann, und aus Vorliebe für Nationalsitten.

In dem Artikel, Fluxion, des Dictionn. encyclop. par ordre des matieres, sagt d'Alembert: Man hat keinen recht hellen Begriff von Geschwindigkeit, wenn sie veränderlich ist. Geschwindigkeit ist nichts wirkliches, es ist das Verhältniß des Raumes zu der Zeit, wenn die Geschwindigkeit gleichförmig ist. Bey der ungleichförmigen Bewegung aber ist sie das Verhältniß der Differentiale des Raums und der Zeit, ein Verhältniß, wovon man eine deutliche Erklärung nicht anders geben kann als vermittelst der Gränzen. Auf diese muß man also doch zurück kommen, wenn man von Fluxionen einen befriedigenden Begriff geben will. — Daß d'Alembert zwischen zwey ungleichartigen Größen, Zeit und Raum, ein Verhältniß Statt finden läßt, ist nicht nachzuahmen.

Focus, s. Brennpunct.

Folium, foliata curva, ist eine krumme Linie, deren Gleichung ist $x^3 + y^3 = axy$. Sie hat zwey Zweige mit einer geradlinichten Asymptote, an welcher diese auf derselben Seite sich erstrecken. Die beiden Zweige schneiden sich, und bilden eine blattähnliche Figur, fast auf die Art, wie die zum ersten Theile Tab. III. Fig. 37. gezeichnete Curve, deren Zweige aber nicht auf derselben Seite der Asymptote liegen. In Newtons Verzeichniß der Linien der dritten Ordnung ist sie die 41ste. Viele Linien haben einen blattähnlichen Theil, weswegen man nicht eine einzelne daher benennen sollte. Sie heißt auch das Folium von Descartes, weil dieser Geometer sie zuerst angegeben hat. Er führt sie in der Sammlung seiner Briefe, P. III. epist. 48., als Beyspiel an, daß Fermats Methode berührende zu ziehen sich bey ihr nicht anwenden lasse. In dem 57sten Briefe zeigt er, wie die berührende gezogen werden kann, welche mit der Axe der x oder der y einen halben rechten Winkel macht. Dieses hatte Roberval nicht finden können, dem sie merkwürdig genug war, daß er ihr den Namen Galand oder Fleur de Jasmin gab. Descartes sagt, er könne ihm noch unendlich viele Linien mittheilen, die nicht zusammengesetzter

als jene wären, und doch noch weitere Figuren bildeten. Die Sache sey aber eine solche Kleinigkeit, daß er sich schäme darüber zu schreiben. Descartes bleibt bey dem in sich zurücklaufenden Theil der Curve stehen, und beachtet die beyden ins Unendliche fortlaufenden Zweige nicht, die doch mit ihr stetig zusammenhängen. Die Linie ist quadrirbar. Als Exempel wird sie in dem Artikel, Quadratur, benennt.

Form einer Größe ist die Art, wie sie aus andern Größen zusammengesetzt wird. So sind Formen ganzer Zahlen, $2n$; $2n+1$, jene für gerade, diese für ungerade; allgemeiner $ma+b$, wo b eine kleinere ganze Zahl als a, und m ebenfalls eine ganze Zahl ist. Alle Primzahlen sind unter den Formen $6a+1$ und $6a+5$ begriffen; statt der letztern kann man auch die Form $6a-1$ setzen. Nur sind nicht alle Zahlen von jener Form Primzahlen. Potenzen und Wurzeln sind Formen von Zahlen, so wie Producte und Quotienten. Der binomische Lehrsatz enthält die Form der Potenzen zweytheiliger Größen, der polynomische die Form der Potenzen vieltheiliger Größen. Die Formen der Coefficienten in einer algebraischen Gleichung sind die Zusammensetzungen aus den Combinationen der Wurzeln. Die Formen der Größen sind das, was in der reinen Mathematik durchgehends an den Größen betrachtet wird.

Form einer Reihe ist das Gesetz, welches die Exponenten der unbestimmten Größe, nach welcher die Glieder der Reihe geordnet sind, beobachten, z. B. daß diese Exponenten die Reihe der natürlichen Zahlen, oder der geraden allein, oder der ungeraden sind, zugleich mit Angabe des Vorzeichens + oder − der Exponenten, von welchen das erstere zu nehmen ist, wenn nichts darüber bestimmt wird.

Formel ist der in allgemeinen Zeichen gefaßte Ausdruck des Werthes einer Größe mittelst derjenigen Größen, durch welche sie bestimmt wird. In einer solchen Formel braucht man nur in jedem Falle die Werthe der gegebenen

Größen zu setzen, um die gesuchte herauszufinden. Sie ist das Resultat einer analytischen Rechnung, die alle darunter gehörige Fälle begreift. Die Formeln dienen auch durch die Combinationen derselben wieder neue herauszubringen. Denn sie sind zugleich Lehrsätze über die Verbindungen zusammengehöriger Größen.

Die Algebra liefert Formeln für die Wurzeln der Gleichungen vom ersten, zweyten und dritten Grade, der letztern doch nur mit einer Einschränkung; ferner für jede der unbekannten Größen in mehreren Gleichungen durch die Elimination der übrigen. Die Analysis liefert Formeln für die Entwickelung vielerley Größen aus ihren Bestandtheilen, als der Potenzen von Binomien und Polynomien; für die Summen der Potenzen, deren Wurzeln in arithmetischer Progreßion sind, und mancher andern Reihenglieder; für die Interpolation zwischen den Gliedern einer Reihe u. m. Die Trigonometrie mit der Goniometrie ist in ihrer gegenwärtigen Gestalt ganz formularisch, und dadurch zu allgemeinen Rechnungen desto geschickter. Die Differential- und Integralrechnung enthalten eine Menge Vorschriften der Operationen in Formeln ausgedruckt. Auch in der angewandten Mathematik sucht man alles auf bequem ausgedruckte Formeln zu bringen.

Allgemeinere Formeln sind solche, welche mehrere Größen unbestimmt lassen, da speciellere Formeln diesen einen gewissen Werth beylegen. Die letztern werden dadurch oft viel einfacher, und ersparen die Mühe der Reduction des Allgemeinen auf das Besondere, weswegen es bequem ist, dergleichen neben den allgemeinen zur Hand zu haben.

Fragezahl ist in der praktischen Arithmetik diejenige Zahl, von welcher etwas gefragt wird. Sie ist mit der gesuchten zusammengehörig, das ist mit ihr durch die Frage, wie viel? wie groß? oder eine ähnliche verbunden, und kommt eigentlich in der Regel de tri, der einfachen und zusammen gesetzten, vor. In der einfachen ordentlichen Regel de tri wird sie von den Rechenmeistern in die

dritte Stelle geſetzt, in der umgekehrten aber in die erſte. Z. B. in dem erſtern Falle

7 Pf. — 9 Thlr. — 28 Pf.?

wo 28 Pf. die Frageʒahl iſt, von welcher der Preis gefragt oder geſucht wird.

Für den zweyten Fall ſey das Beyſpiel: 6 Arbeiter liefern eine Arbeit in 10 Tagen, wie viele werden erfordert, ſie in 5 Tagen fertig zu ſchaffen. Hier iſt die Frageʒahl 5 Tage, und

5 Tage? — 6 Arb. — 10 Tage.

In der Regel Quinque kommen zwey Frageʒahlen vor, ſo wie hier zwey Paare gleichartiger Größen gegeben werden. In mehr zuſammen geſetzten Fällen kommen noch mehrere vor, nach der Anzahl der Paare gleichartiger Größen, die gegeben werden. Z. B. 100 Thlr. bringen in 12 Monathen 5 Rthlr Zinſen wie viel bringen 480 Thlr. in 8 Monathen? Die Rechenmeiſter machen folgenden Anſatz.

100 Thlr. — 5 Rthlr. — 480 Rthlr.?
in 12 Mon. — 8 Mon.?

Weil hier die geſuchte Größe ſo viel mahl größer oder kleiner iſt, als die ihr gleichnamige gegebene, ſo viel mahl die Frageʒahlen größer oder kleiner ſind, als die ihnen gleichnamigen, ſo ſtehen die Frageʒahlen in der dritten Stelle.

Wäre die Frage, in wie viel Monathen bringen 480 Thlr. 16 Thlr. Zinſe, ſo wäre der Anſatz folgender.

480 Thlr? — 12 Mon. — 100 Thlr.
5 Thlr. — 16 Thlr.?

Je mehr Intereſſe, deſto länger iſt die Zeit, allein je größer das Capital, deſto kürzer iſt die Zeit.

Die Aufgabe ſey: 480 Thlr. bringen in 8 Monaten 16 Thlr. zu 5 Procent belegt, wie groß iſt das Capital, das eben die Intereſſe bey 4 Procent in 6 Monathen bringt, ſo kommen beide Frageʒahlen in die erſte Stelle.

6 Mon.? — 480 Rthlr. — 8 Mon.
4 P. C.? — 5 P. C.

Bey einerley Intereſſe verhalten ſich die Capitalien umgekehrt wie die Zeiten und die Procente.

Auf gleiche Art verfährt man bey mehreren Fragezahlen. Man muß nur die Vergleichungsformel, je größer die Fragezahl, desto größer die gesuchte, oder je größer jene, desto kleiner diese, nicht unrichtig anwenden, wo sie nicht Statt findet. Doch in den Fällen, die im gemeinen Leben vorkommen, läßt sich das leicht beurtheilen. In dem Artikel, Proportion, wird ein Ansatz der zusammengesetzten Regel de tri gezeigt werden, welcher der Zusammensetzung der Verhältnisse gemäßer, und auch deutlicher ist.

Function einer veränderlichen Größe ist der analytische Ausdruck der Zusammensetzung einer Größe aus dieser veränderlichen Größe, und einer oder mehrern unveränderlichen. Eine Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen ist eben so die analytische Darstellung aus dieser und aus unveränderlichen. Z. B.

$a+bx+cx^2$; oder $\frac{aa+xx}{b-x}$; oder $b\sqrt{(aa+xx)}$;

oder $a \sin x$; oder a^x; oder $a \log x$, sind Functionen der veränderlichen Größe x. Ferner ist $xx+axy+bx+cy+d$ eine Function zweyer veränderlichen Größen x und y; so auch $\frac{ax}{\sqrt{(bx+yy)}}$ oder $ax+y \sin x$.

1. Der Ausdruck, Function, ist zuerst von Joh. Bernoulli in dem erklärten Verstande gebraucht, bey Gelegenheit des isoperimetrischen Problems (Mem. de l'Acad. des Scienc. 1718. Opp. T. II. p. 241.). Leibnitz bezeigt ihm darüber seinen Beyfall (Commerc. epist. T. I. p. 386.). Früher hatte Leibnitz selbst auch den Ausdruck, Function, in einer ähnlichen aber eingeschränktern Bedeutung gebraucht, den Theil einer geraden Linie zu bezeichnen, der in der Verbindung mit krummen Linien auf irgend eine Art bestimmt wird, als Ordinate, Abscisse, Subtangente, Normale, Subnormale, Krümmungshalbmesser. Man sehe auch Jac. Bernoulli Opp. T. II. p. 788.

2. Wenn die Function eine unveränderliche Art der Zusammensetzung ist, und als Glied einer Gleichung, oder als Factor eines Gliedes darin vorkommt, so gebraucht man die Capitalbuchstaben, M, N, P, u. dgl. oder X, Y, Z, die letztern insbesondere, um Functionen von x, y, z, zu bezeichnen. Ist aber die Function selbst noch unbekannt, wie das in den sehr allgemeinen Untersuchungen der neuern Analysis häufig der Fall ist, oder wenn Entwicklungen und Verwandlungen damit vorgenommen werden sollen, so gebraucht man die Notation, fx, Fx, φx, ψx, um Functionen einer veränderlichen x dadurch anzuzeigen. Wenn mehrere Functionen derselben Größe vorkommen, so werden sie durch die vorgesetzten Buchstaben, als f, F, φ, ψ, unterschieden. Daß diese Functionszeichen nicht multiplicirende Größen sind, ergiebt sich in jedem Falle von selbst. Euler gebraucht das Kolon nach dem Functionszeichen, um einer solchen Verwechslung, die inzwischen nicht leicht möglich ist, vorzubeugen, wie f : y. (Institt. Calc. integr. T. III. p. 40.). Ist die Functionalgröße eine zusammengesetzte, so schließt man sie in Klammern ein, als f (xx), oder f (a + bx), welches Functionen von xx, von a + bx, anzeigt. Eine Function zweyer von einander unabhängigen Größen, x, y, wird folgendergestalt, f (x, y), bezeichnet, dagegen f (xy) die Function des Products zweyer veränderlichen Größen, als einer einzigen, angiebt. Die Function wird bloß aus diesen so verbundenen, nicht aus den getrennten, zusammengesetzt. Die Bezeichnung scheint Clairaut zuerst gebraucht zu haben. In einer Abhandlung in den Mem. de l'Acad. des Sc. 1733., p. 269., édit. d'Amst. gebraucht er nicht allein den Ausdruck, Function, sondern sagt auch, daß er sich der Bezeichnungen, Πx, Φx, Δx, etc. bedienen wolle, um verschiedene Functionen im Allgemeinen zu bezeichnen. D'Alembert in der Abhandlung, sur la cause générale des vents, Berlin 1747. gebraucht pag. 111. die Bezeichnungen, Δu, s und Γu, s für Functionen von u und s.

3. Das Differential einer Function von x, die durch Fx bezeichnet ist, wird durch $\partial x F'x$, oder $\partial x fx$, oder $\partial x \varphi x$ angedeutet, wo $F'x$ oder fx oder φx diejenige Function von x anzeigt, welche aus Fx durch die Differentiation hergeleitet ist. Das Buchstabenzeichen F', f oder φ ist willkührlich, wenn nur dasselbe Zeichen und dieselbe Function zusammenbleiben.

Enthält die Function zwey veränderliche Größen, wie $F(x, y)$, so ist ihr Differential $= \partial x\, F'(x, y) + \partial y\, F''(x, y)$, wo wiederum $F'(x, y)$ die aus $F(x, y)$ durch die partielle Differentiation nach x, und $F''(x, y)$ die eben daher durch die partielle Differentiation nach y hergeleitete Function ist.

Z. B. Es sey $Fx = xx + ax$, so ist $\partial . Fx = \partial x\, F'x = 2x\partial x + a\partial x$, und $F' = 2x + a$.

Es sey $F(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma x$, so ist $\partial . F(x+y) = (2\alpha x + \beta y + \gamma)\partial x + \beta x \partial y$, so daß $F' = 2\alpha x + \beta y + \gamma$, und $F'' = \beta x$ ist.

4. Eine Function von x ist entweder eine *unmittelbare*, wenn sie schlechthin durch x gegeben wird, oder eine *mittelbare*, wenn sie durch eine veränderliche z gegeben wird, die eine Function von x ist. So ist $xx + ax + b$ eine unmittelbare Function von x; aber $F(xx + ax + b)$ ist eine mittelbare Function von x, weil hier $xx + ax + b$ als eine einzige veränderliche Größe zu betrachten ist. Eine Function des $\sin\varphi$ ist eine mittelbare des Winkels φ. Eine Function von $xx + yy$ ist eine mittelbare der beiden x und y.

5. Die Functionen werden eingetheilt in *algebraische* und *transscendente*. Die erstern sind solche, in welchen die Zusammensetzung bloß durch algebraische Operationen geschieht, nämlich durch die vier Rechnungsspecies, wie auch durch Erhebung auf Potenzen und Ausziehung der Wurzeln. Auch gehören hieher diejenigen Functionen, worin die Function der veränderlichen Größe mit dieser selbst noch algebraisch verbunden ist, und nicht unmittelbar durch sie gegeben wird. Transscendente Functionen sind solche, worin die Functionalgröße von dem

Verhältniſſe der Winkel zu ihren trigonometriſchen Begleitern, der Logarithmen zu den Zahlen, und von Integrationen, die algebraiſch nicht angegeben werden können, abhängt, z. B. $a\varphi + b \sin \varphi$ iſt eine transſcendente Function des Winkels φ. Einige unterſcheiden noch Functionen, worin Potenzen der veränderlichen Größe mit irrationalen Exponenten vorkommen, z. B. $x^{\sqrt{2}}$, und nennen dieſe Art, functiones interſcendentes. Die Unterſcheidung iſt unnöthig.

6. Die algebraiſchen Functionen ſind theils rationale, theils irrationale. In jenen kommen nur Potenzen der veränderlichen Größe mit ganzen Exponenten vor; z. B. $ax^2 + bx$; oder $\frac{a^2 + x^2}{b + x}$. In den irrationalen ſind gebrochne Potenzen der veränderlichen Größe, oder einer Function derſelben enthalten, z. B. in $x^{\frac{3}{2}} + ax^{\frac{1}{2}} + b$; oder in $x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{(a^2 + x^2)}$, oder $\sqrt[3]{(a + x + x^2)}$.

7. Die irrationalen algebraiſchen Functionen ſind entweder geſonderte oder ungeſonderte (explicitae vel implicitae). Jene ſind ſolche, dergleichen zum Beyſpiele vorher angeführt ſind. Die ungeſonderten ſind, worin die Function einer Größe mit derſelben verbunden iſt, ſo daß ſie nicht durch dieſe rein und abgeſondert in einem endlichen Ausdrucke dargeſtellt werden kann, z. B. in der Gleichung, $y^5 = axy^2 + bx^4$. Hier iſt y eine Function von x, weil ſie auf eine beſtimmte Art durch x gegeben wird; aber man hat kein Mittel, y durch x anders als durch eine unendliche Reihe auszudrucken, außer in dem Falle, daß y nur bis zu der zweyten Potenz ſteigt. Dieſe Art Functionen kommt bey allen geometriſchen krummen Linien vor, da deren Ordinaten im Allgemeinen ungeſonderte Functionen der Abſciſſen ſind. In beſondern Gattungen, oder bey gewiſſen Lagen der Coordinaten können die Ordinaten geſonderte Functionen der Abſciſſen ſeyn.

8. Die rationalen Functionen werden eingetheilt in ganze und gebrochne. Jene sind solche, in welchen die veränderliche Größe x nirgends einen negativen Exponenten hat, noch sonst ein Bruch vorkommt, dessen Nenner x enthält. Ihre allgemeine Form ist, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$ Die gebrochnen rationalen Functionen können alle auf die Form,

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}},$$

durch die Vereinigung der einzelnen Brüche unter einem gemeinsamen Nenner gebracht werden.

9. Ein wichtiger Unterschied der Functionen beruht auf der Anzahl der Werthe, welche die Function für irgend einen Werth der veränderlichen Größe x haben kann. Hat sie für jeden Werth von x nur einen Werth, so ist sie eine einförmige Function; kann sie zwey und nicht mehr mögliche Werthe erhalten, so ist sie eine zweyförmige Function; bey drey und nicht mehrern möglichen Werthen eine dreyförmige, u. s. f. überhaupt eine vielförmige, wenn sie für irgend einen Werth von x mehr als einen möglichen Werth bekommen kann. Alle rationale gesonderte Functionen, sie mögen ganze oder gebrochne seyn, sind einförmige Functionen. Hingegen die ungesonderten algebraischen Functionen sind vielförmige. Es sey y eine solche Function von x, und erstlich $y^2 - Py + Q = 0$, wo P und Q irgend welche einförmige Functionen von x bezeichnen, ganze oder gebrochne, so hat y für jedes x entweder zwey mögliche oder zwey unmögliche Werthe (Gleichung, II.), und ist also eine zweyförmige Function von x. An den Kegelschnitten sind die Ordinaten zweyförmige Functionen der Abscissen, einen besondern Fall ausgenommen. In gewissen Gattungen höherer krummen Linien sind die Ordinaten auch solche Functionen.

Es seyn P, Q, R, einförmige Functionen von x, und $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, so ist y eine dreyförmige Function von x, weil eine cubische Gleichung drey mögliche Wurzeln haben kann. Da nur zwey Wurzeln

derſelben zugleich unmöglich ſeyn können, ſo hat die Function y immer entweder drey mögliche Werthe oder einen. In einigen Gattungen der Linien der dritten Ordnung ſind die Ordinaten dreyförmige Functionen ihrer Abſciſſen. Dergleichen kommen auch bey höhern krummen Linien vor.

Sind P, Q, R, S, einförmige Functionen von x, und es iſt $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$, ſo iſt y eine vierförmige Function von x. Für manche Werthe von x mag y nur zwey mögliche Werthe oder gar keinen möglichen Werth erhalten. Es wird hier nur auf die möglich größte Anzahl der möglichen Werthe geſehen.

10. Wenn in einer Function von x bloß die geraden Potenzen dieſer Größe vorkommen, ſo heißt die Function eine gerade (functio par). Die Werthe der Function, einfache oder vielfache, ſind für gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe von x gleich groß und gleichnamig, das iſt, beyderſeits poſitiv oder negativ. Stellt die Function Ordinaten einer krummen Linie vor, ſo wird dieſe von einer mit den Ordinaten durch den Anfang der Abſciſſen gezogenen Parallele in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt. Dieſes entſteht daher, daß die Werthe gerader Potenzen, x^2, x^4, etc. das Vorzeichen nicht ändern, man mag x poſitiv oder negativ nehmen.

11. Wenn in einer Function von x bloß die ungeraden Potenzen von x vorkommen, ſo iſt die Function eine ungerade (functio impar.). Für gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe von x erhält ſie gleiche, aber entgegengeſetzte Werthe, weil die ungeraden Potenzen von x ihr Vorzeichen ändern, wenn x entgegengeſetzt genommen wird. Bedeutet die Function Ordinaten einer krummen Linie, ſo iſt dieſe in den entgegengeſetzten, oder den Verticalwinkeln der Axen der Coordinaten ſich gleich und ähnlich.

12. Eine gleichartige Function (functio homogenea) zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, x, y, etc. iſt eine ſolche, worin die Summe der Exponenten derſelben in allen Gliedern gleich groß iſt, z. B. $ax^2y + bx^3 + cxy^2 + dy^3$ iſt eine gleichartige Function

von x und y. So auch $ax^2 + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^4}{x^2+y^2}$.

Die Dimensionen der veränderlichen Größen werden hier allein gezählt. Bey Divisoren sind sie subtractiv zu nehmen. Daher ist die Anzahl der Dimensionen eines Bruches der Unterschied der Dimensionen im Zähler und Nenner, wenn beide gleichartige Functionen sind. Die Anzahl der Dimensionen von einer Wurzelgröße ist diejenige von ihrer Potenz dividirt durch den Grad der Wurzel.

13. Ähnliche Functionen sind solche, worin die veränderlichen und unveränderlichen Größen auf eine und dieselbe Art mit einander verbunden sind. Sie kommen in der Form überein, wenn gleich nicht in der Quantität. Z. B. $a + bx + cx^2$, und $A + By + Cy^2$, sind ähnliche Functionen von x und y. Ähnliche Functionen erhalten dasselbe Functionszeichen, als φx, φy.

14. Eine functio inexplicabilis ist eine solche, die weder durch bestimmte Ausdrücke, noch durch Wurzeln von Gleichungen dargestellt werden kann, so daß sie nicht allein keine algebraische ist, sondern daß es auch in den meisten Fällen sich nicht bestimmen läßt, zu welcher Gattung von transscendenten Functionen sie zu rechnen sey. Eine solche Function ist die Summe, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{x}$, oder das Product, $1.2.3.4 \ldots x$. Euler hat über diese Art von Functionen Untersuchungen angestellt, in den Institt. Calc. diff. P. II. Cap. 16. 17. In dem Artikel, Facultät, numerische, sind die Functionen dieser Art, $a(a+b)(a+2b) \ldots (a+nb)$, und $\frac{a(a+b)(a+2b).\text{etc.}}{c(c+b)(c+2b).\text{etc.}}$, ausführlich erörtert worden.

15. Wenn y eine Function von x ist, so ist auch x eine Function von y. Es ist eine wichtige Aufgabe in der Analysis, eine Function umzukehren, das ist, aus einer gesonderten Function y von x, die Functionalgröße x durch y auszudrücken. Dieses wird in dem Artikel,

Umkehrung einer Reihe, gelehrt, wo auch gezeigt wird, wie eine Potenz von x durch eine nach y geordnete Reihe dargestellt werden kann. Wie eine ungesonderte Function entwickelt wird, soll in diesem Artikel gezeigt werden. Wie von zwey verschiedenen Functionen einer und derselben veränderlichen Größe die eine durch die andere ausgedruckt wird, lehrt la Grange's Lehrsatz, s. denselben.

Verwandlungen der Functionen.

16. Eine Function läßt sich oft auf verschiedene Arten darstellen, z. B. als Product, oder als Potenz, und als Aggregat von Theilen, die aus der Entwickelung des Products entstehen; als Wurzelgröße und als entwickelte Wurzel; als Bruch und als Reihe, je nachdem es zu den Absichten der Rechnung am bequemsten ist.

17. Es sey y eine ganze gesonderte Function von x, z. B. $y = x^3 - ax^2 + bx - c$, so läßt sich diese in ein Product aus so vielen Factoren von der Form $x - p$ verwandeln, als die bestimmte Gleichung für x, welche der Werth $y = 0$ giebt, Wurzeln hat, wenn diese alle möglich sind, und p ist eine der Wurzeln. Hat die Gleichung für x unmögliche Wurzeln, so enthält die Function y als Product so viele quadratische Factoren, $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$, als Paare unmöglicher Wurzeln in der Gleichung vorhanden sind. Z. B. wenn $y = x^3 - ax^2 + bx - c$ gesetzt wird, und wenn die Wurzeln der Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, sind p, q, r, so ist $y = (x-p)(x-q)(x-r)$. Hat die Gleichung aber zwey unmögliche Wurzeln, $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$, nebst der möglichen r, so ist $y =$

$$(x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})(x-r).$$

Dieses ist dasselbe, was in dem Artikel, Gleichung, VI. erwiesen wird. Die Function y ist der Werth einer Gleichung, in welcher statt einer unbekannten Größe x eine veränderliche, auf jede beliebige Art bestimmbare, gesetzt wird.

18. Die Sätze von dem Verhalten der Wurzeln einer Gleichung zu den Coefficienten derselben (Gleichung, VI.) lassen sich alle auf die ganzen Funktionen anwenden. In den gesonderten Functionen von x ist das gegebene Glied, vermindert um y, das gegebene Glied der Gleichung. In den ungesonderten Gleichungen wird die eine der veränderlichen Größen als eine gegebene behandelt.

19 Rationale gebrochne Functionen werden mittelst der Division des Zählers durch den Nenner in eine Reihe verwandelt, deren Progressionalgröße dieselbe mit der in dem Zähler und Nenner ist. Die Reihe ist eine rücklaufende, s. den Artikel, rücklaufende Reihe.

20. Wenn der Nenner einer rationalen gebrochnen Function ein Product aus einfachen Factoren von der Form $x + p$ ist, so läßt sich der Bruch in partielle Brüche, jeden mit einem der Factoren zum Nenner, zerlegen, wenn die Factoren alle verschieden sind. Enthält der Zähler eine höhere Potenz der Größe x als der Nenner, so sondere man durch die Division eine rationale ganze Function der Größe x ab, bis daß in einem Reste der Division die höchste Potenz von x niedriger ist, als die höchste im Divisor, ganz auf dieselbe Art, wie man bey der Absonderung der ganzen Zahl von einem uneigentlichen Bruche verfährt.

21. Der Bruch sey, $\frac{ax + b}{xx + (p+q)x + pq}$ $= \frac{ax+b}{(x+p)(x+q)}$. Dieser wird zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q}$. Um die Zähler, A, B, zu bestimmen, bringe man die beiden Brüche auf denselben Nenner $x^2 + (p+q)x + pq$ oder $(x+p)(x+q)$. Alsdann wird der Zähler $= (A+B)x + Aq + Bp$. Hier erhellt, daß A und B unveränderliche Größen seyn müssen, da derselbe dem $ax + b$ gleich ist. Damit jener für jeden Werth von x diesem gleich seyn könne, müssen beide identisch gleich seyn, das ist, es ist

Z. B. an dem Kreise ist die Gleichung für die Coordinaten $2ax - xx = yy$, wenn die Abscissen von einem Endpuncte des Durchmessers an genommen, und die Ordinaten senkrecht darauf gesetzt werden. Bezeichnet man nach Newton die Fluxionen durch die Symbole der Fluenten mit einem Puncte darüber, so ist $\dot{x} : \dot{y} = y : a - x$. Der zu x und y gehörige Kreisbogen sey $= s$, so ist $\dot{x} : \dot{s} = y : a$, und $\dot{y} : \dot{s} = a - x : a$.

Die Fluxion einer Fläche ist nicht die Geschwindigkeit der beschreibenden oder erzeugenden Linie, wie die Fluxion einer Linie die Geschwindigkeit des beschreibenden Puncts ist. Denn die Zunahme der Fläche kommt auf die Größe der beschreibenden Linie an, und hängt bloß von derselben ab, wenn man für die verschiedenen Portionen der Fläche die Geschwindigkeit der beschreibenden Linie gleich groß setzt. Man muß sich statt der Fläche eine ihr proportionale Linie vorstellen. Z. B. für die Parabel ist die Gleichung zwischen den Coordinaten, $ax = yy$. Die zu x und y gehörige Area sey Z. Diese vergleiche man mit dem Rechteck ax, und die Fluxion $\dot{Z}$ mit der Fluxion $a\dot{x}$. Allgemein ist $Z : ax = y : a$ (nach der Notation in der Differentialrechnung $\partial Z = y\partial x$). Da an der Parabel ist $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, so ist $\dot{Z} : 2y\dot{y} = y : a$, oder

$\dot{Z} : a\dot{y} = 2yy : aa$.

Auf ähnliche Art werden die Fluxionen der körperlichen Räume und der Oberflächen, so wie aller Arten von Größen auf Fluxionen von Linien gebracht. Dieses macht aber Weitläuftigkeit, die man auch in der Fluxionenrechnung sich erspart. Alsdann ist aber diese von der Differentialrechnung nur in der Notation unterschieden.

Die Notation in der Fluxionenrechnung ist offenbar lange nicht so bequem als die in der Differentialrechnung eingeführte. Die Engländer sind die einzigen, welche jene noch immer beybehalten, aus Ehrerbietung für ihren großen Landsmann, und aus Vorliebe für Nationalsitten.

Auf ähnliche Art wird gefunden

$$B = \frac{aq^2 - bq + c}{(q-p)(q-r)}; \quad C = \frac{ar^2 - br + c}{(r-p)(r-q)}.$$

Wenn einer dieser Werthe als A, gefunden ist, so sind die andern auch dadurch bekannt, weil man nur p mit q oder r vertauschen darf, da die Zähler A, B, C alle auf gleiche Art in den Gleichungen durch p, q, r, bestimmt werden.

Die Zähler der Brüche A, B, C, entstehen aus dem Zähler des vorgegebenen Bruchs, wenn darin für x die entgegengesetzten von p, q, r gesetzt werden. In (21.) wird durch eine solche Substitution das entgegengesetzte der Zähler von A und B erhalten.

23. Der gegebene Bruch sey

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)}.$$

Dieser werde in die Brüche,

$$\frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q} + \frac{C}{x+r} + \frac{D}{x+s},$$

zerlegt. Bringt man diese auf den gemeinsamen Nenner $(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)$, und setzt den Zähler des dadurch entstehenden Bruchs identisch gleich dem Zähler des gegebenen, so ist

I. $A + B + C + D = a.$

II. $A(q+r+s) + B(p+r+s) + C(p+q+s) + D(p+q+r) = b.$

III. $A(qr+qs+rs) + B(pr+ps+rs) + C(pq+ps+qs) + D(pq+pr+qr) = c.$

IV. $Aqrs + Bprs + Cpqs + Dpqr = d.$

Die Glieder dieser Gleichungen multiplicire man in I. mit p^3; in II. mit p^2; in III. mit p, in IV. mit 1, und ziehe dann von der Summe der ersten und dritten dieser neuen Gleichungen die zweyte und vierte derselben ab, so gehen B, C, D aus dem Aggregat heraus, und es bleibt

$$Ap^3 - A(q+r+s)p^2 + A(qr+qs+rs)p - Aqrs = ap^3 - bp^2 + cp - d,$$

das ist

$$A(p-q)(p-r)(p-s) = ap^3 - bp^2 + cp - d,$$

und $$A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}.$$

Aus dem Werthe von A werden nun die von B, C, D durch die Vertauschung von p mit q, r, s erhalten.

Der Zähler von A entsteht, wie in (21.) aus dem Zähler des gegebenen Bruchs, wenn darin $-p$ für x gesetzt, und das entgegengesetzte des Aggregats genommen wird.

24. Der Factor von B in dem Aggregat (23) ist $= p^3 - (p+r+s)p^2 + (pr+ps+rs)p - prs$. Hier ist der Coefficient von p^2 die Summe dreyer Unionen; der von p die Summe ihrer Binionen; das letzte Glied die Ternion von denselben. Nun ist in einer cubischen Gleichung, $p^3 - Pp^2 + Qp - R = 0$, worin p^3 wie in jener die Einheit zum Coefficienten hat, P das Aggregat der Wurzeln, Q das ihrer Binionen, R die Ternion derselben. Daher ist jener Factor eben so $= 0$, wie das Aggregat von den Gliedern dieser Gleichung, indem p eines der Elemente der Combinationen ist. Eben so ist

$$r^3 - (p+r+s)r^2 + (pr+ps+rs)r - psr = 0,$$

und auch

$$s^3 - (p+r+s)s^2 + (pr+ps+rs)s - prs = 0.$$

Daraus folgt, daß wenn p mit r oder s vertauscht wird, um C oder D, auf dieselbe Art, wie vorher A gefunden ist, zu erhalten, B in dem Aggregat der Gleichungen, die dadurch entstehen, ebenfalls einen Factor, der $= 0$ ist, bekommt.

Hingegen ist der Factor von A nicht $= 0$, weil p keine der Unionen in den Coefficienten von p^3, p^1 und p^0, oder dem Producte qrs, ist. Da eben dieser Factor, wenn er $= 0$ gesetzt wird, eine Gleichung mit den Wurzeln, q, r, s giebt, so ist derselbe das Product $(p-q)(p-r) \times (p-s)$, s. Gleichung III. 10.

Was von dem Factor zu B bemerkt ist, gilt auch, mutatis mutandis, von den Factoren zu A, C, D.

25. Es sey die Summe von $m-1$ Unionen, $r+s+t+$ etc. $=\alpha$; die Summe ihrer Binionen $=\beta$; ihrer Ternionen $=\gamma$; ihrer Quaternionen $=\delta$, u. s. f. das Product aller $=\pi$, so ist (Gleichung VI. 1.)

$$p^m - (p+\alpha)p^{m-1} + (p\alpha+\beta)p^{m-2} - (p\beta+\gamma)p^{m-3} + (p\gamma+\delta)p^{m-4} \ldots \pm\pi = 0.$$

Hieraus erhellt, daß nach der vorher angewandten Combination der Gleichungen bey Zerlegung eines Bruches von der Art, wie die behandelten sind, wenn die Gleichungen nach der Reihe mit p^m, p^{m-1}, u. s. f. multiplicirt werden, die Factoren von B, C, D etc. immer $= 0$ werden, dagegen der vom A nicht $= 0$ wird, und daß derselbe sich in das Product $(p-q)(p-r)(p-s)$. etc. verwandeln lassen wird.

26. Eine andere Methode, die Zähler der einfachen Brüche zu finden ist folgende, nach Euler in der Introd. in Anal. Infin. §. 41.

Der Bruch sey $\frac{M}{N}$, und $N = (x+p)S$, so daß S das Product der übrigen Factoren von N nach Absonderung eines derselben, $x+p$, sey. Es sey nun $\frac{M}{N} = \frac{A}{x+p} + \frac{P}{S}$, wo A kein x enthält, P aber eine Function von x ist. Es ist $AS + P(x+p) = M$, und $\frac{M-AS}{x+p} = P$. Da P eine ganze Function von x ist, so ist $M - AS$ durch $x+p$ theilbar, und es wird $M - AS = 0$, wenn der Factor $x+p = 0$, oder $x = -p$ gesetzt wird. Folglich ist $A = \frac{M}{S}$, wenn im Zähler und Nenner dieses Bruches $-p$ für x gesetzt wird.

In der gebrochnen Function (23.) ist

$$M = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$
$$S = (x+q)(x+r)(x+s).$$

Setzt man hier $x = -p$, so ist $\frac{M}{S} =$

$$\frac{-ap^3 + bp^2 - cp + d}{(-p+q)(-p+r)(-p+s)},$$

oder $\frac{M}{S} = A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$, wie daselbst für A gefunden ist.

27. Wenn unter den Factoren des Nenners der gebrochnen Function zwey oder mehrere gleiche sind; so muß das obige Verfahren abgeändert werden, weil in den Nennern einiger einfachen Brüche ein Factor Null wird. Wie man hier zu verfahren hat, zeigt folgendes Beyspiel.

28. Es sey der gegebene Bruch $\frac{axx + bx + c}{(x+p)^2(x+r)} = \frac{M}{N}$. Er werde zerlegt in die Brüche $\frac{A}{(x+p)^2} + \frac{B}{x+p} + \frac{C}{x+r}$. Hier müssen drey Brüche genommen werden, weil bey der Vergleichung des Zählers des reducirten Bruchs mit dem Zähler des gegebenen drey Gleichungen da sind. Die drey Brüche werden, wie vorher, auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, welcher der Nenner N ist. Der Zähler ist

$$A(x+r) + B(x+p)(x+r) + C(x+p)^2.$$

Die Vergleichung desselben mit M giebt

I. $B + C = a$; II. $A + B(p+r) + 2Cp = b$;
III. $Ar + Bpr + Cp^2 = c$.

Multiplicirt man II. mit p, und zieht sie darauf von III. ab, so wird erhalten,

$$A(r-p)-(B+C)p^2=c-bp,$$

das ist, wegen I.

$$A(r-p)-ap^2=c-bp,$$

$$A=\frac{ap^2-bp+c}{r-p}.$$

Wird I. mit r^2; II. mit r multiplicirt, und von dem Aggregat des Products aus I. in r^2 und III. abgezogen, so wird

$$Cp^2-2Cpr+Cr^2=ar^2-br+c$$

$$C=\frac{ar^2-br+c}{(p-r)^2}.$$

Endlich ist $B=a-C=\frac{ap^2-2apr+br-c}{(p-r)^2}$.

Der Werth von C ist hier derselbe, wie er aus der Rechnung in (22.) folgt, wenn daselbst $q=p$ gesetzt wird.

29. Man kann hier auch auf eine ähnliche Art wie in (26.) verfahren. Es sey $\frac{ax^2+bx+c}{(x+p)^2(x+r)}=$

$$=\frac{M}{N}=\frac{A}{(x+p)^2}+\frac{B}{x+p}+\frac{C}{x+r}.$$

Nun ist $M=A(x+r)+B(x+p)(x+r)$
$+C(x+p)^2$, und

$$M-A(x+r)-B(x+p)(x+r)=C(x+p)^2.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist durch $(x+p)^2$ theilbar, also auch durch $x+p$. Da das Glied, $B(x+p)(x+r)$ durch $x+p$ theilbar ist, so ist $M-A(x+r)$ auch dadurch theilbar. Diese Function wird also $=0$, wenn $x=-p$ gesetzt wird, und es ist folglich $A=\frac{M}{x+r}$, für $x=-p$. Dieses giebt sogleich $A=\frac{ap^2-bp+c}{-p+r}$. Man setze zur Abkür-

zung, $\frac{M-A(x+r)}{x+p} = T$, so ist $T-B(x+r) = C(x+p)$. Da C kein x enthält, so ist der erste Theil dieser Gleichung durch $x+p$ theilbar, oder enthält den Factor $(x+p)$. Er wird also $=o$, wenn $x=-p$ gesetzt wird. Demnach ist $B = \frac{T}{x+r}$, für $x=-p$.

Es ist

$$T = \frac{a(p-r)x + apr - br + c}{p-r}.$$

Für $x=-p$ ist

$$T = \frac{-app + 2apr - br + c}{p-r},$$

und daher $B = \frac{app - 2apr + br - c}{(p-r)^2}$,

wie vorher gefunden ist.

Den Zähler C des partiellen Bruches, dessen Nenner nur einmahl als Factor in N vorhanden ist, findet man eben so, wie in dem Falle, da alle Factoren in dem Nenner des vorgegebenen Bruches einander ungleich sind. Es sey nämlich $N=(x+r)S$, und $\frac{M}{N} = \frac{C}{x+r} + \frac{P}{S}$, so ist $M = CS + P(x+r)$, und $\frac{M-CS}{x+r} = P$. Da P eine ganze Function von x ist, so ist $M-CS$ durch $x+r$ theilbar, und wird $=o$, für $x=-r$. Folglich ist $C = \frac{M}{S}$ für diesen Werth von x, und dadurch

$$C = \frac{arr - br + c}{(p-r)^2}.$$

Auf diese Art findet man die Zähler aller partiellen Brüche, deren Nenner in dem Nenner N des vorgegebe-

nen Bruches nur einmahl vorkommen, wenn dieser mehrere solche einzelne enthält.

30. Die Function $\frac{M}{N}$, wo M und N ganze Functionen von x sind, und M von einem niedrigern Grade als N ist, habe im Nenner drey gleiche Factoren, so daß $N = (x+p)^3 S$ ist. Nun ist der Bruch zu zerlegen in die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^3} + \frac{B}{(x+p)^2} + \frac{C}{x+p} + \frac{P}{S}$, wo A, B, C unveränderliche Größen sind, und P eine ganze Function von x ist, wenn S kein einfacher Factor von der Form $x+q$ ist. Es ist nun $M = AS + BS(x+p) + CS(x+p)^2 + P(x+p)^3$, folglich $M - AS$ theilbar durch $x+p$. Da also diese Function $= 0$ wird, für $x = -p$, so ist $A = \frac{M}{S}$, wenn in den Functionen M und S jener Werth für x gesetzt wird.

Man setze $\frac{M-AS}{x+p} = T$, so ist $T = BS + CS(x+p) + P(x+p)^2$, und $T - BS$ theilbar durch $x+p$. Daher ist $B = \frac{T}{S}$, wenn in den Functionen T und S gesetzt wird $x = -p$.

Noch setze man $\frac{T-BS}{x+p} = V$, so ist $V - CS = P(x+p)$, und $V - CS$ theilbar durch $x+p$. Dadurch wird $C = \frac{V}{S}$, wenn in V und S gesetzt wird $x = -p$.

31. Exempel. Es sey $\frac{M}{N} = \frac{xx}{(x-1)^3(xx+1)}$.

Hier ist $M = xx$; $p = -1$; $S = xx+1$. Daß der Factor $xx+1$ sich nicht in zwey einfache Factoren zerlegen läßt, hat auf die Auflösung des Exempels keinen Einfluß.

Es ist $A = \frac{1}{2}$; $T = \frac{x+1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$; $V = -\frac{x}{2}$;

$C = -\frac{1}{4}$. Dadurch ist $\frac{xx}{(x-1)^3(xx+1)} = \frac{1}{2(x-1)^3}$

$+\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{P}{xx+1}$.

Um P zu erhalten vereinige man die drey ersten Brüche des zweyten Theils in einen einzigen, und ziehe denselben von dem vorgegebenen Bruche ab, so wird dadurch gefunden

$P = \frac{1}{4}(x-1)$.

32. Wenn der Nenner des vorgegebenen Bruches nur *einen* quadratischen nicht zerlegbaren Factor hat, so kann man so verfahren, wie in dem Beyspiele (31.). Sind mehrere solche Factoren in dem Nenner vorhanden, so bediene man sich der zuerst gelehrten Methode. Ein solcher quadratischer oder trinomischer Factor hat die Form $xx + 2px + pp + qq$, wofür man auch die Form, $xx + 2px\cos\alpha + pp$ setzen kann, und der Zähler des partiellen Bruchs mit diesem Nenner hat die Form $Ax + B$.

Man suche in diesem Falle zuerst die Brüche, deren Nenner die Form $x + p$ haben, und ziehe die Summe derselben von dem vorgegebenen Bruche ab, so ist der Rest ein Bruch mit einem Nenner, der bloß quadratische, nicht zerlegbare Factoren enthält. Jene partiellen Brüche werden auf gleiche Art gefunden, als wenn bloß einfache Factoren vorhanden wären. Es seyn z. B. in dem Nenner eines Bruches, $(x+p)(x+q)(x+r)(x+s)$, die Größen r und s unmögliche, so aber doch, daß

$x^2 + (r+s)x + rs$ eine mögliche Größe ist, indem $r+s$ und rs wahre Größen sind. Nun ist der Zähler des partiellen Bruchs $\frac{A}{x+p}$, wenn r und s mögliche Größen sind, $A = \frac{ap^3 - bp^2 + cp - d}{(p-q)(p-r)(p-s)}$. Hier ist der Nenner $= (p-q)(pp - (r+s)p + rs)$, wo es einerley ist, ob r und s wahre Größen sind oder nicht.

33. Es sey

$$\frac{M}{N} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(xx + 2px + pp + qq)(xx + 2rx + rr + ss)},$$

und zur Abkürzung $pp + qq = mm$; $rr + ss = nn$. Der Bruch werde zerlegt in die Brüche

$$\frac{Ax + B}{xx + 2px + mm} + \frac{Cx + D}{xx + 2rx + nn},$$

Wenn diese beiden Brüche in einen einzigen zusammengezogen werden, so giebt der Zähler durch die Vergleichung mit M vier einfache Gleichungen für A, B, C, D, und es ist

$$A((mm-nn)^2 - 4(p-r)(m^2r - n^2p) = a(m^2(mm-nn) - 4p(m^2r - n^2p) + 2b(m^2r - n^2p) - c(mm-nn) + 2d(p-r).$$

Ferner ist

$$B((mm-nn)^2 - 4(p-r)(m^2r - n^2p) = 2am^2(n^2p - m^2r) + bm^2(mm-nn) - 2cm^2(p-r) - d(mm - nn - 4pp + 4pr).$$

Aus der ersten Formel wird C durch die Vertauschung von m und p mit n und r gefunden, und eben so D aus der zweyten.

Dieses Verfahren wird für mehr als zwey quadratische Factoren zu beschwerlich. Euler hat ein allgemeineres

und künſtlicheres gewieſen in der Introd. in Anal. Infin. Cap. XII.

34 Die Zerlegung einer gebrochnen Function in einfache Brüche hat Leibnitz zuerſt gelehrt, und davon Anwendungen zu Summirungen und Integrationen gemacht. Acta Erud. 1702 et 1703. Opp. T. III. nr. 65 et 66. Commerc. epiſt. T. II. p. 161. Euler hat die Ausführung dieſer zu Integrationen oft erforderlichen Operation ſehr lichtvoll und ſcharfſinnig gewieſen, für einfache und mögliche Factoren des Nenners eines Bruches, in der Introd. in Anal. Inf. Cap. II. für quadratiſche nicht zerlegbare daſ. Cap. XII. durch Hülfe trigonometriſcher Formeln; und für beide Fälle mit Zuziehung der Differentialrechnung in den Inſtitt. Calc. differ. P. II. Cap. XVIII. wovon noch am Ende dieſes Artikels einiges angeführt werden wird. Man vergleiche noch Lacroix, traité du calcul différentiel et integral, T. II. nr. 364—375. Die in dieſem Artikel von mir völlig entwickelten Formeln werden zur deutlichen Einſicht in die Zerlegung der Brüche beförderlich ſeyn.

Verwandlung der Functionen durch Subſtitution.

35. Eine brauchbare Verwandlungsart iſt die Einführung einer dritten veränderlichen Größe, die ſowohl mit der Größe x, als derjenigen y, die von x eine Function iſt, verbunden wird. Dieſes iſt beſonders nützlich, wenn y als Function von x durch eine nicht geſonderte Gleichung gegeben wird, oder eine irrationale Function von x iſt. Auch erhält oft durch die Subſtitution einer Größe für die Functionalgröße die Function ſelbſt eine einfachere Geſtalt, wovon in dem Artikel, Reihe, Beyſpiele vorkommen.

36. Die Gleichung zwiſchen x und y ſey eine ungeſonderte, wie dieſe, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = 0$. Man ſetze $y = xz$, ſo iſt nach geſchehener Diviſion durch x,

$$axz^2 + bxz + cx + dz + e = 0,$$

also $x = \frac{-dz-e}{az^2+bz+e}$,

und $y = \frac{-dz^2-ez}{az^2+bz+e}$.

Setzt man für z eine Reihe von Werthen, so erhält man zwey für x und y zusammengehörige Reihen ihrer Werthe, woraus für jedes x das zugehörige y, oder umgekehrt, entweder unmittelbar, oder durch Interpolation näherungsweise erhalten werden kann.

37. Die Gleichung sey $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 = o$. Man setze $y = xz$, so ist die neue Gleichung durch xx theilbar, so daß

$$axz^3 + bxz^2 + cxz + dx + ez^2 + fz + g = o.$$

Daraus ist $x = \frac{-ez^2-fz-g}{az^3+bz^2+cz+d}$,

und $y = \frac{-ez^3-fz^2-gz}{az^3+bz^2+cz+d}$.

38. Es sey $y = \sqrt{(a+bx)}$. Man setze $a+bx = b^2z^2$, so ist $x = bz^2 - \frac{a}{b}$, und $y = bz$.

Es sey $y = \sqrt{(a+bx)(c+dx)}$. Man setze $c+dx = (a+bx)z^2$, so ist $x = \frac{az^2-c}{d-bz^2}$, und $y = \frac{(ad-bc)z}{d-bz^2}$.

39. Es sey $y = \sqrt{(aa+bx+cxx)}$, man soll für x eine solche Function von z setzen, daß y einen rationalen Werth erhalte.

Zu dem Ende sey $\sqrt{(aa+bx+cxx)} = a+xz$, so ist, auf beiden Seiten quadrirt,

$$b+cx = 2az+xz^2,$$

also $x = \frac{2az-b}{c-z^2}$, und $y = \frac{az^2-bz+ac}{c-z^2}$.

Es ist nicht nöthig, daß a rational sey; nur muß die gegebene Größe aa positiv seyn.

40. Es sey $y = \sqrt{(a + bx + c^2x^2)}$, man soll eben dasselbe, was in (39.) leisten.

Zu dem Ende setze man $\sqrt{(a + bx + c^2x^2)} = z + cx$, so ist $a + bx = zz + 2czx$,

also $x = \frac{zz - a}{b - 2cz}$, und $y = \frac{bz - czz - ac}{b - 2cz}$.

Entwickelung ungesonderter Functionen.

41. Die Function y von x sey eine ungesonderte, wie die in der Gleichung $ayy + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$ enthaltene. Um y durch x auszudrucken, nimmt man für y eine nach Potenzen von x geordnete Reihe an, deren Form man aber vorher gehörig bestimmen muß, das ist, die Fortschreitung der Exponenten von x.

42. Die Reihe der Exponenten kann allemahl eine arithmetische m, $m + \delta$, $m + 2\delta$ + etc. seyn. Denn wenn sie auch eine andere wäre, nämlich, α; β; γ; δ; etc. so ist es doch immer möglich, eine arithmetische Reihe zu finden, in welcher die Glieder α, β, γ, δ, etc. vorkommen. Die Coefficienten der Potenzen, deren Exponenten nicht unter denen, α, β, γ, δ, etc. befindlich sind, müssen durch die Rechnung gleich Null gefunden werden.

43. Die Reihe $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} = + Cx^{m+2\delta} + Dx^{m+3\delta}$ + etc. ist eine steigende, wenn δ positiv ist, eine fallende, wenn δ negativ ist. In jenem Falle giebt sie für x, die kleiner sind als die zur Einheit angenommene oder anzunehmende Größe, die dazu gehörigen Werthe von y, mit schnellerer oder langsamerer Annäherung zu dem völligen Werthe, nachdem die Coefficienten mehr oder weniger abnehmen. Ist die Reihe der Coefficienten eine wachsende, so mag die Reihe für y nicht dienlich seyn, die Quantität von y zu finden, ob die Reihe gleich die Form dieser veränderlichen Größe angiebt. —

Ist δ negativ, so dient die Reihe für y den Werth oder auch nur die Form für solche x anzugeben, die gröſser als die numerische Einheit, oder als die zur Einheit dienende Gröſse sind.

44. Die Potenzen von y geben Reihen, in welchen die Exponenten der Potenzen von x ebenfalls eine arithmetische Reihe mit dem Unterschiede ± δ ausmachen. Setzt man nun in der zwischen x und y gegebenen Gleichung für die Potenzen von y ihre Werthe zufolge der für y angenommenen Reihe, so entsteht aus jedem Gliede, das y enthält, eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe. Diejenigen Glieder aus allen diesen Reihen, welche einerley Potenz von x enthalten, und das Glied der Gleichung, welches dieselbe Potenz von x ohne y enthält, nehme man zusammen als ein einziges Glied einer Reihe, die aus allen Particular-Reihen (mit Einschluß der Glieder ohne y) zusammengesetzt ist. Der Werth dieser Totalreihe ist Null, wie das Aggregat aller Glieder der Gleichung zwischen x und y. Die Coefficienten von x in dieser Totalreihe sind jeder = o, damit für jedes x der Werth der Reihe Null seyn möge.

45. Wenn die Gleichung zwischen x und y vom zweyten Grade ist, wie die in (41.) angeführte, so läßt sich für y eben ein solcher Werth finden, wie für die Wurzel einer quadratischen Gleichung, durch einen theils rationalen, theils irrationalen Ausdruck, der die veränderliche, beliebig zu bestimmende, und die unveränderlichen Gröſsen enthält. Es kann daher, durch Entwickelung der Wurzel aus der Gröſse unter dem Wurzelzeichen, y durch eine nach x geordnete Reihe dargestellt werden.

46. Die allgemeine Gleichung vom dritten Grade zwischen x und y ist

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = o.$$

Um die Rechnung für ein Beyspiel der Methode nicht zu weitläuftig zu machen, nehme man die Gleichung,

$$y^3 + ax^2y + by^2 + cy + dx + e = o.$$

I. Zuerſt ſuche man eine fallende Reihe für y, die den Werth für große x angiebt, und ſetze $y = Ax^m + Bx^{m-\delta} + Cx^{m-2\delta} + Dx^{m-3\delta} + \text{etc.}$ ſo entſtehen aus den Gliedern der Gleichung nach ihrer Ordnung folgende Reihen von Exponenten:

y^s	$3m$; $3m-\delta$; $3m-2\delta$; $3m-3\delta$; etc.
ax^ny	$m+2$; $m+2-\delta$; $m+2-2\delta$; $m+2-3\delta$; etc.
by^s	$2m$; $2m-\delta$; $2m-2\delta$; $2m-3\delta$; etc.
ey	m ; $m-\delta$; $m-2\delta$; $m-3\delta$; etc.
dx	1
e	0

II. Damit die Particularreihen nebſt den Gliedern dx und e zu einer einzigen Reihe, deren Coefficienten alle $= 0$ ſind, vereinigt werden mögen, ſo müſſen die Exponenten jeder Particularreihe unter den Exponenten jeder der übrigen Particularreihen ſolche antreffen, die ihnen gleich ſind. Denn ſonſt würden entweder die Coefficienten einer Particularreihe für ſich null ſeyn, welches anzeigte, daß das Glied der Gleichung, woraus ſie entſtanden ſeyn ſoll, fehlte; oder, wenn einige Particularreihen beſonders genommen für ſich null wären, ſo müßte die Summe der dazu gehörigen Glieder der Gleichung auch für ſich beſonders genommen null ſeyn, da dieſe Glieder ſich doch nur mit allen übrigen Gliedern der Gleichung zuſammen heben ſollen. Eben ſo müſſen die gegebenen Exponenten, hier 1 und 0, unter den Exponenten der Particularreihen vorkommen, weil ſonſt dx und e fehlen müßten. Es kann aber auch nicht eines dieſer Glieder mit einem oder mehrern der übrigen ſich beſonders heben, aus dem gleich vorher angeführten Grunde. Daher ſind alle die in I. aufgeführten Exponen

ten Glieder einer einzigen arithmetischen Reihe, worin der Unterschied der Glieder $= \delta$ ist, und dieses δ ist also auch der Unterschied der Exponenten in der Reihe für y.

III. Die Exponenten, welche kein δ enthalten, hier $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0; sind also auch Glieder aus einer arithmetischen Reihe, in welcher der Unterschied der Glieder $= \delta$ ist, nur nicht gerade in der hier gesetzten Ordnung. Wenigstens zwey unter denselben müssen einander gleich seyn. Denn die Anfangsglieder der Particularreihen sind Ax^{3m}; aAx^{m+2}; bAx^{2m}; cAx^{m}; wozu noch die monomischen Größen, dx und e, kommen. Von diesen müssen wenigstens zwey das erste Glied der zusammengesetzten Reihe ausmachen, und die übrigen treten bey einem der folgenden Glieder ein.

IV. Weil die Reihe der Exponenten eine fallende ist, so müssen diejenigen unter den Exponenten, $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0, welche sich gleich gesetzt werden, nicht kleiner als die übrigen unter denselben seyn. Dieses erhält man nur, wenn man entweder setzt $3m = m+2$, welches $m = +1$ giebt; oder wenn man setzet $m+2 = 1$, woraus $m = -1$ folgt. In dem ersten Falle sind die Exponenten der Anfangsglieder, mit Einschluß der von den beiden Gliedern dx und e, diese: 3; 3; 2; 1; 1; 0. In dem andern Falle sind die Exponenten, und zwar nach ihrer Größe, 1; 1; 0; -1; -2; -3, wo die negativen Werthe für kleiner als jede positive angesehen werden.

V. In beiden Fällen machen die Exponenten der Anfangsglieder eine arithmetische Reihe mit dem Unterschiede, Eins, aus. Größer als Eins darf also δ nicht seyn, damit keiner jener Exponenten ausfalle; aber kleiner könnte δ seyn. Man nehme $\delta = 1$, unter der Voraussetzung, daß die Bestimmung der Coefficienten keine Wiedersprüche enthalte, so ist

theils $y = Ax + Bx^{0} + Cx^{-1} + Dx^{-2} + \text{etc.}$

theils $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + \text{etc.}$

wo aber begreiflich die Buchstaben, A, B, C, D, etc. in beiden Reihen nicht einerley Größe bezeichnen.

VI. Man nehme zuerst $y = Ax + Bx^0 + Cx^{-1} + \text{etc.}$ so ist

$$\begin{aligned} y^3 = {} & A^3x^3 + 3A^2Bx^2 + 3A^2Cx + 3A^2D \\ & + 3AB^2 + 6ABC + \text{etc.} \\ & + B^3 \\ xyx^2 = {} & aA + aB + aC + aD + \text{etc.} \\ by^2 = {} & + bA^2 + 2bAB + 2bAC \\ & + bB^2 + \text{etc.} \\ cy = {} & + cA + cB + \text{etc.} \\ dx = {} & + d \\ e = {} & + e \end{aligned}$$

Setzt man die Coefficienten der vereinigten Reihe $= 0$, so ist erstlich, $A^3 + aA = 0$, und $A = \pm\sqrt{-a}$. Ist a positiv, so kann die erste Reihe nicht Statt finden, nach welcher für ein unendlich großes x ein ebenfalls unendliches y, mit einem endlichen Verhältnisse, zugeordnet wäre. Ist aber a negativ, so giebt es zwey Fortschreitungen der y, in welchen diese ohne Ende wachsen, und zu dem gleichfalls ohne Ende zunehmenden x ein endliches Verhältniß haben. Zweytens ist $3A^2B + aB + bA^2 = 0$, also $B = -\frac{1}{2}b$. Drittens ist $3A^2C + 3AB^2 + aC + 2bAB + cA + d = 0$, oder $2A^2C - \frac{1}{4}Ab^2 + cA + d = 0$, also $C = \frac{b^2A - 4cA - 4d}{8A^2}$, welcher Werth gedoppelt ist, nachdem für A entweder $+\sqrt{-a}$ oder $-\sqrt{-a}$ gesetzt wird. Es ist nun

$$y = Ax - \tfrac{1}{2}b + \frac{b^2A - 4cA - 4d}{8A^2}x^{-1} + \text{etc.}$$

Daß δ nicht kleiner als 1, z. B. $= \frac{1}{2}$ gesetzt werden konnte, erhellt daher, daß bey dieser Annahme die Gleichung zur Bestimmung von B seyn würde, $3A^2B + aB = 0$, also $B = 0$, so daß $Bx^{\frac{1}{2}}$ wirklich wegfällt.

VII. Aus der zweyten Form für y, nämlich

$$y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + \text{etc.}$$

wird

$$ayx^2 = aAx + aB + aCx^{-1} + aDx^{-2} + \text{etc.}$$
$$dx = +d.$$
$$e = +e$$
$$cy = +cA. \quad +cB. \quad +\text{etc.}$$
$$by^2 = +bA^2. \quad +\text{etc.}$$
$$y^3 = +A^3x^3.$$

Hieraus wird $A = -\frac{d}{a}$; $B = -\frac{e}{a}$; $C = -\frac{cd}{aa}$;

$D = \frac{ce}{aa} - \frac{bdd}{a^3}$ etc. also ist

$$y = -\frac{d}{a}x^{-1} - \frac{e}{a}x^{-2} + \frac{cd}{aa}x^{-3} + \text{etc.}$$

Diese Reihe giebt die dritte Fortschreitung der y, die immer möglich bleibt, wenn auch die beiden in VI. unmöglich sind. Denn y hat als Wurzel einer cubischen Gleichung wenigstens einen möglichen Werth. Aber auch nicht mehr als drey, und deshalb wird A hier durch eine einfache Gleichung gefunden. Für sehr große x ist y sehr klein, und verschwindet, wenn x unendlich groß genommen wird.

VIII. Um eine steigende Reihe für y zu erhalten, nämlich $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+2\delta} + \text{etc.}$ muß man unter den Exponenten der Anfangsglieder und der Glieder ohne y, nämlich $3m$; $m+2$; $2m$; m; 1; 0, wenigstens zwey einander gleich setzen, so daß sie nicht größer seyn als die Werthe der übrigen, die sich aus dem Werthe von m ergeben. Dieses läßt sich nicht anders bewerkstelligen als wenn $m = 0$ gesetzt wird. Dadurch werden jene Exponenten folgende: 2; 0; 0; 1; 0. Diese sind Glieder der arithmetischen Reihe 0; 1; 2; etc. Man darf also δ nicht größer als 1 setzen. Gebrochne Exponenten hat man nicht nöthig anzunehmen. Man setze demnach

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

so ist

$$\begin{aligned} y^3 &= A^3 + 3A^2Bx + 3A^2Cx^2 + \text{etc.} \\ &\quad + 3AB^2. \\ by^2 &= bA^2 + 2bAB. + 2bAC. + \text{etc.} \\ &\quad + bB^2. \\ cy &= cA + cB. + cC. + \text{etc.} \\ e &= e \\ dx &= + d. \\ ayx^2 &= + aA. + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hier ist A die Wurzel der cubischen Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = o$, und hat wenigstens einen möglichen Werth. Ferner ist $B = -\frac{d}{3A^2 + 2bA + c}$, und

$$C = -\frac{3AB^2 + bB^2 + aA}{3A^2 + 2bA + c}.$$

Hat A drey mögliche Werthe, so haben B, C, etc. auch drey Werthe, und es sind alsdann drey verschiedene Fortschreitungen der Größe y. Hat A nur einen möglichen Werth, so haben B, C, etc. auch nur einen Werth. Diese Form ist für unendlich große x nicht anwendbar, und daher auch nicht für beträchlich große.

IX. Wenn $3A^2 + 2bA + c$ nicht $= o$ ist, so ist δ richtig $= 1$ gesetzt. Denn wollte man δ kleiner, z. B. $= \frac{1}{2}$ setzen, so würde dieses, da dx nun in das dritte Glied der Totalreihe käme, $B = o$ geben, welches also wieder auf die Annahme $\delta = 1$ zurückführte. Allein, wenn neben jener cubischen Gleichung in VIII. noch die quadratische, $3A^2 + 2bA + c = o$, Statt hat, so kann die Form $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ mit der beiden Gleichungen für A gemeinschaftlichen Wurzel nicht angewandt werden, sondern dx muß erst bey dem dritten Gliede der zusammengesetzten Reihe ein-

treten. Man setze nun $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \text{etc.}$ und es ist

$$\begin{aligned}
y^3 &= A^3 + 3A^2Bx^{\frac{1}{2}} + 3A^2Cx + 3A^2Dx^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + 3AB^2 \;.\; + 6ABC \;.\; + \text{etc.} \\
&\quad + B^3 \;,, \\
by^2 &= bA^2 + 2bAB \;.\; + 2bAC \;.\; + 2bAD \;. \\
&\quad + bB^2 \;.\; + 2bBC \;. \\
cy^2 &= cA + cB \;.\; + cC \;.\; + cD \;.\; + \text{etc.} \\
e &= e \\
dx &= \quad + d \;. \\
ayx^2 &= \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Da $3A^2 + 2bA + c = 0$ ist, so ist der Coefficient des zweyten Gliedes der zusammengesetzten Reihe für sich $= 0$, und der Coefficient des dritten ist $3AB^2 + bB^2 + d = 0$, da der in C multiplicirte Theil $= 0$ ist. Dieses giebt

$$B^2 = -\frac{d}{3A+b}, \text{ und } B = \pm\sqrt{\frac{-d}{3A+b}},$$

wo die Werthe des Zählers und Nenners entgegengesetzt seyn müssen, damit B einen möglichen Werth erhalte. Der Coefficient des vierten Gliedes in der zusammengesetzten Reihe ist $= 6ABC + B^3 + 2bBC$, also ist $C = -\frac{B^2}{6A+2b}$. Die folgenden Coefficienten mögen hier unberechnet gelassen werden.

X. Wenn $3A^2 + 2bA + c = 0$ ist, so hat die cubische Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = 0$ zwey gleiche Wurzeln (Gleichung, IX.). Die Werthe von y bilden demnach drey Fortschreitungen, von welchen, für $x = 0$, zwey ein gemeinschaftliches Glied haben. Für ein an 0 gränzendes x, positives oder negatives, haben diese beiden Fortschreitungen wieder verschiedene Glieder. Die erstere Reihe für y, in welcher der Unter-

schied der Exponenten = 1 ist, gäbe aber nur zwey Werthe für y, da A nur zwey verschiedene Werthe hat. Für denjenigen Werth von A, der eine einzelne Wurzel der cubischen Gleichung für A, und also nicht von der quadratischen ist, giebt die Reihe Werthe von y, die in die Fortschreitung gehören, in welcher jener Werth von A für $x = 0$ Statt hat. Aber für die beiden gleichen Werthe von A, als Doppelwurzel der cubischen Gleichung, kann die Reihe nicht verschiedene Fortschreitungen der y angeben. Für diese ist eine andere Form der Reihe erforderlich, die zwey Werthe von B enthalte. Diese sind in dem gegenwärtigen Falle gleich und entgegengesetzt, so daß für sehr kleine x die Glieder der beiden Fortschreitungen fast gleichviel auf entgegengesetzte Art von dem gemeinschaftlichen Gliede sich entfernen, in dem das Glied Cx in Betracht der Potenz x viel kleiner ist als das Glied $Bx^{\frac{1}{2}}$.

XI. Exempel. Es sey $y^3 + 4yx^2 - 5y^2 + 7y + 24x - 3 = 0$. Die steigenden Reihen zu finden, von der Form $y = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ suche man zuerst die Wurzeln der Gleichung, $A^3 - 5A^2 + 7A - 3 = 0$. Diese sind $+1$; $+1$; $+3$. Setzt man $A = 3$, so ist $B = -6$; $C = -26$, und $y = 3 - 6x - 26x^2 + \text{etc.}$ Da $3A^2 - 10A + 7 = 0$ ist für $A = 1$, so sind die beiden andern aufsteigenden Reihen von der Form $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + \text{etc.}$ und es ist $B^2 = +12$; $C = +3$, so daß $y = 1 \pm \sqrt{12x + 3x} + \text{etc.}$

XII. Wenn außer der cubischen und quadratischen Gleichung für A noch die einfache, $3A + b = 0$, Statt hat, so kann dx erst mit dem vierten Gliede der zusammengesetzten Reihe eintreten, und die Form der Reihe für y ist nun $y = A + Bx^{\frac{1}{3}} + Cx^{\frac{2}{3}} + Dx + Ex^{\frac{4}{3}} + Fx^{\frac{5}{3}} + Gx^2 + \text{etc.}$ In diesem Falle hat die cubische Gleichung für A drey gleiche Wurzeln, jede $= -\frac{1}{3}b$, oder es ist $(A + \frac{1}{3}b)^3 = a$.

treten. Man setze nun $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \text{etc.}$ und es ist

$$\begin{aligned}
y^3 &= A^3 + 3A^2Bx^{\frac{1}{2}} + 3A^2Cx + 3A^2Dx^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + 3AB^2 \;.\; + 6ABC \;.\; + \text{etc.} \\
&\quad + B^3 \;,, \\
by^2 &= bA^2 + 2bAB \;.\; + 2bAC \;.\; + 2bAD \;. \\
&\quad + bB^2 \;.\; + 2bBC \;. \\
cy^2 &= cA + cB \;.\; + cC \;.\; + cD \;.\; + \text{etc.} \\
e &= e \\
dx &= \quad + d \;. \\
ayx^2 &= \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Da $3A^2 + 2bA + c = o$ ist, so ist der Coefficient des zweyten Gliedes der zusammengesetzten Reihe für sich $= o$, und der Coefficient des dritten ist $3AB^2 + bB^2 + d = o$, da der in C multiplicirte Theil $= o$ ist. Dieses giebt

$$B^2 = -\frac{d}{3A+b}, \text{ und } B = \pm\sqrt{\frac{-d}{3A+b}},$$

wo die Werthe des Zählers und Nenners entgegengesetzt seyn müssen, damit B einen möglichen Werth erhalte. Der Coefficient des vierten Gliedes in der zusammengesetzten Reihe ist $= 6ABC + B^3 + 2bBC$, also ist $C = -\frac{B^2}{6A+2b}$. Die folgenden Coefficienten mögen hier unberechnet gelassen werden.

X. Wenn $3A^2 + 2bA + c = o$ ist, so hat die cubische Gleichung, $A^3 + bA^2 + cA + e = o$ zwey gleiche Wurzeln (Gleichung, IX.). Die Werthe von y bilden demnach drey Fortschreitungen, von welchen, für $x = o$, zwey ein gemeinschaftliches Glied haben. Für ein an o gränzendes x, positives oder negatives, haben diese beiden Fortschreitungen wieder verschiedene Glieder. Die erstere Reihe für y, in welcher der Unter-

schied der Exponenten = 1 ist, gäbe aber nur zwey Werthe für y, da A nur zwey verschiedene Werthe hat. Für denjenigen Werth von A, der eine einzelne Wurzel der cubischen Gleichung für A, und also nicht von der quadratischen ist, giebt die Reihe Werthe von y, die in die Fortschreitung gehören, in welcher jener Werth von A für $x=0$ Statt hat. Aber für die beiden gleichen Werthe von A, als Doppelwurzel der cubischen Gleichung, kann die Reihe nicht verschiedene Fortschreitungen der y angeben. Für diese ist eine andere Form der Reihe erforderlich, die zwey Werthe von B enthalte. Diese sind in dem gegenwärtigen Falle gleich und entgegengesetzt, so daß für sehr kleine x die Glieder der beiden Fortschreitungen fast gleichviel auf entgegengesetzte Art von dem gemeinschaftlichen Gliede sich entfernen, in dem das Glied Cx in Betracht der Potenz x viel kleiner ist als das Glied $Bx^{\frac{1}{2}}$.

XI. Exempel. Es sey $y^3 + 4yx^2 - 5y^2 + 7y + 24x - 3 = 0$. Die steigenden Reihen zu finden, von der Form $y = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ suche man zuerst die Wurzeln der Gleichung, $A^3 - 5A^2 + 7A - 3 = 0$. Diese sind + 1; + 1; + 3. Setzt man $A = 3$, so ist $B = -6$; $C = -26$, und $y = 3 - 6x - 26x^2 + \text{etc.}$ Da $3A^2 - 10A + 7 = 0$ ist für $A = 1$, so sind die beiden andern aufsteigenden Reihen von der Form $y = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + \text{etc.}$ und es ist $B^2 = +12$; $C = +3$, so daß $y = 1 \pm \sqrt{12x + 3x + \text{etc.}}$

XII. Wenn außer der cubischen und quadratischen Gleichung für A noch die einfache, $3A + b = 0$, Statt hat, so kann dx erst mit dem vierten Gliede der zusammengesetzten Reihe eintreten, und die Form der Reihe für y ist nun $y = A + Bx^{\frac{1}{3}} + Cx^{\frac{2}{3}} + Dx + Ex^{\frac{4}{3}} + Fx^{\frac{5}{3}} + Gx^2 + \text{etc.}$ In diesem Falle hat die cubische Gleichung für A drey gleiche Wurzeln, jede $= -\frac{1}{3}b$, oder es ist $(A + \frac{1}{3}b)^3 = a$.

47. Die Verwandlung einer ungesonderten Function in eine gesonderte geschieht nicht sowohl, um für irgend ein x den Werth von y zu erhalten, als nur die Form von y für sehr große und sehr kleine x zu bestimmen. Es würde oft sehr mißlich seyn, die Quantität von y selbst auf diesem Wege erfahren zu wollen. Die Folge der y, für welche eine Reihe die Werthe angeben soll, kann innerhalb zweyer Glieder eingeschlossen seyn, deren zugehörige x nur wenig von einander verschieden sind. Die fallenden Reihen geben zu erkennen, wie viele Fortschreitungen, der y sich ins Unendliche erstrecken, ob die Werthe der y für unendlich große x gegen diese ein endliches oder ein unendliches Verhältniß haben, und wie die Annäherung zu dem Gränzverhältnisse beschaffen ist. Dieses dient zur Unterscheidung der verschiedenen Gattungen einer ungesonderten Function eines gegebenen Grades. Die steigenden Reihen dienen als Differenzformeln, um die endlichen Veränderungen der y für kleine x anzugeben. Dadurch ergeben sich die besondern Beschaffenheiten einer Function an der Gränze der positiven und negativen x. Ist x eine nicht kleine Größe, so muß dafür eine andere $z \pm k$ gesetzt werden, wo z klein genug genommen werden mag.

48. Das erste Glied der Reihe bequem zu finden hat Newton eine geometrische Construction angegeben, die unter dem Namen, Newtonisches Parallelogramm, bekannt ist, s. den Artikel, der davon handelt.

In dem Artikel, krumme Linien, wird die Natur der ungesonderten Functionen durch die geometrische Darstellung der veränderlichen Größen, als Coordinaten an einer krummen Linie, vieles Licht erhalten.

49. Lacroix giebt in seiner Differential- und Integralrechnung, §. 119. ein allgemeines directes Verfahren an, die Werthe des Exponenten in dem ersten Gliede der Reihe Ax^m, zu bestimmen, welches von La Grange herrührt. Es ist aber die Erklärung desselben etwas zu umständlich, daher es hier nicht Platz findet. Das hier gewiesene Verfahren wird das allgemeinere gut erläutern. Es werden kaum Fälle eintreten, wo man nicht durch Ver-

suche die Werthe von dem Exponenten leicht sollte bestimmen können. Lacroix zeigt ferner, wie man die folgenden Glieder der Reihe für y bestimmt. Dieses leistet er auf eine andere Art als hier geschehen ist. Er bemerkt auch, daß die Größe y durch einen Kettenbruch sich darstellen läßt.

Werth einer gebrochnen Function, deren Zähler und Nenner = o gesetzt wird.

56. Es seyn φx und ψx Functionen einer veränderlichen x, die für einen gewissen Werth von x jede = o werden, es ist die Frage, was bey dieser Annahme der Werth des Bruches $\frac{\varphi x}{\psi x}$ ist.

Man gebe der veränderlichen Größe zwey Werthe, deren einer durch x, der andere durch $x + u$ bezeichnet werde, und entwickele die Functionen $\varphi(x+u)$ und $\psi(x+u)$. Aus Differenzenrechnung (17.) ist

$$\varphi(x+u) = \varphi x + pu + \tfrac{1}{2}qu^2 + \tfrac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$$

wo p der Gränzquotient von $\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x}$, q derselbe von $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ oder von $\frac{\Delta^2 \varphi x}{\Delta x^2}$; r derselbe von $\frac{\Delta q}{\Delta x}$ oder von $\frac{\Delta^3 \varphi x}{\Delta x^3}$ ist. Oder es ist

$$p = \frac{\partial \varphi x}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2}; \quad r = \frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3}, \text{ etc.}$$

s. Differenzenrechnung, 38.

Auf gleiche Art ist

$$\psi(x+u) = \psi x + p'u + \tfrac{1}{2}q'u^2 + \tfrac{1}{6}r'u^3 + \text{etc.}$$

wo $p' = \frac{\partial \psi x}{\partial x}$; $q' = \frac{\partial^2 \psi x}{\partial x^2}$; $r' = \frac{\partial^3 \psi x}{\partial x^3}$;

u. s. f. sind.

Dadurch ist

$$\frac{\varphi(x+u)}{\psi(x+u)} = \frac{\varphi x + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}}{\psi x + p'u + \frac{1}{2}q'u^2 + \frac{1}{6}r'u^3 + \text{etc.}}$$

Nun sey, wenn $x = a$ genommen wird, sowohl $\varphi a = o$ als $\psi a = b$, so ist

$$\frac{\varphi(a+u)}{\psi(a+u)} = \frac{p + \frac{1}{2}qu + \frac{1}{6}ru^2 + \text{etc.}}{p' + \frac{1}{2}q'u + \frac{1}{6}r'u^2 + \text{etc.}},$$

nachdem Zähler und Nenner durch u dividirt sind. Setzt man nun $u = o$, so wird

$$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{p}{p'} = \frac{\partial \varphi x : \partial x}{\partial \psi x : \partial x},$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$ zu setzen ist.

Es kann sich ereignen, daß für $x = a$, sowohl p als $p' = o$ sind. Alsdann ist

$$\frac{\varphi(a+u)}{\psi(a+u)} = \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{6}ru + \text{etc.}}{\frac{1}{2}q' + \frac{1}{6}r'u + \text{etc.}},$$

$$\text{und } \frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{q}{q'} = \frac{\partial^2 \varphi x : \partial x^2}{\partial^2 \psi x : \partial x^2},$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$ zu setzen ist.

Wären für $x = a$, auch q und q' jedes $= o$, so wird

$$\frac{\varphi a}{\psi a} = \frac{r}{r'} = \frac{\partial^3 \varphi x : \partial x^3}{\partial^3 \psi x : \partial x^3}.$$

Auf solche Art erhält man zuletzt den gesuchten Werth des Quotienten, der entweder endlich ist, oder auch Null, oder unendlich groß seyn kann.

51. In dem Artikel, berührende Linie, (24—26.), ist schon eine Anwendung dieser Aufgabe auf die Bestimmung der Subtangenten an den Doppelpuncten oder vielfachen Puncten einer Curve gemacht worden; auch in den Interpolations-Formeln, Artikel, Einschalten, 36—38. Hier wollen wir auch noch davon Gebrauch machen, rationale Brüche in einfache zu zerlegen.

52. Es seyn M und N ganze rationale Functionen von x, und $N = (x-\alpha)S$. Der Bruch $\frac{M}{N}$ werde zerlegt in die beiden Brüche, $\frac{A}{x-\alpha}+\frac{P}{S}$, so daß $\frac{M}{N}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{P}{S}$. Also ist $M = AS + P(x-\alpha)$, und $M - AS$ ist durch $x-\alpha$ theilbar, da P eine ganze Function von x ist. Folglich wird $M - AS = 0$, wenn darin $x = \alpha$ gesetzt wird, und es ist bey dieser Annahme $A=\frac{M}{S}$, oder $A=\frac{M(x-\alpha)}{N}$. Aber für $x=\alpha$ sind Zähler und Nenner $= 0$. Darum ist $A=\frac{\partial . M(x-\alpha)}{\partial N}=\frac{(x-\alpha)\partial M + M\partial x}{\partial N}$, wo $x=\alpha$ zu setzen ist. Dadurch wird $A=\frac{M\partial x}{\partial N}$, worin $x=\alpha$ zu setzen ist.

53. Diesen Ausdruck für A erhält man auch auf folgende Art. Da $A=\frac{M}{S}$, wenn $x=\alpha$ genommen wird, so ist auch $A=\frac{M\partial x}{S\partial x}$, bey derselben Annahme. Nun ist $\partial N = S\partial x + (x-\alpha)\partial S$, und für $x=\alpha$, ist $\partial N = S\partial x$, folglich $A=\frac{M\partial x}{\partial N}$, wofern nur $x=\alpha$ genommen ist.

54. Exempel. Es sey wie in (23.)

$$\frac{M}{N}=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$

wo die Größen, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ statt p, q, r, s, in (23.) gesetzt sind, um Verwechslung mit den in (50.)

gebrauchten Bezeichnungen zu verhüten. Es ist, wenn $(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = S$ gesetzt wird,

$$\partial N = S\partial x + (x-\alpha)\partial S, \text{ oder}$$

$$\partial N = (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\partial x + (x-\alpha)\partial S.$$

Setzt man $x = \alpha$, so wird

$$\partial N = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\partial x.$$

In dem Zähler M gleichfalls $x = \alpha$ gesetzt, wird der Zähler des partiellen Bruchs, dessen Nenner $x-\alpha$ ist, oder

$$A = \frac{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

übereinstimmig mit dem in (23) gefundenen Werthe von A.

55. Der Nenner des zu zerlegenden Bruchs enthalte einen quadratischen Factor, $(x-\alpha)^2$, oder es sey $\frac{M}{N} = \frac{M}{(x-\alpha)^2 S}$. Er werde zerlegt in die drey Brüche, $\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{P}{S}$, wo A und B bestimmte Größen sind, so ist

$$M = AS + BS(x-\alpha) + P(x-\alpha)^2,$$

und

$$M - AS - BS(x-\alpha) = P(x-\alpha)^2.$$

Da P eine ganze Function ist, so ist der Theil linker Hand durch $(x-\alpha)^2$ theilbar, also enthält $M-AS$ den Factor $x-\alpha$. Dadurch wird $A = \frac{M}{S}$, für $x-\alpha$, oder es ist $A = \frac{M(x-\alpha)^2}{N}$. Hier sind Zähler und Nenner $= o$, für $x = \alpha$, also ist $A = \frac{\partial . M(x-\alpha)^2}{\partial N}$. Beyde Differentiale sind wieder $= o$ für $x = \alpha$. Differentiirt man

aufs neue, so wird erhalten $A = \frac{\partial^2 . M(x-\alpha)^2}{\partial^2 N}$ für $x = \alpha$, das ist, $A = \frac{2M\partial x^2}{\partial^2 N}$ oder $A = \frac{M}{S}$, wie schon gefunden ist.

Um B zu erhalten, bemerke man, daß $\frac{M - AS}{x-\alpha} - BS$ durch $x - \alpha$ theilbar ist, also für $x = \alpha$ verschwindet, so daß $B = \frac{M - AS}{(x-\alpha)S}$ ist für $x = \alpha$. Da der Zähler den Factor $x - \alpha$ enthält, so verschwindet derselbe, wie der Nenner für $x = \alpha$, also ist $B = \frac{\partial M - A\partial S}{S\partial x}$, wo $x = \alpha$ zu nehmen ist. Oder da $A = \frac{M}{S}$, bey derselben Annahme, so ist $B = \frac{S\partial M - M\partial S}{S^2 \partial x}$ das ist, $B = \frac{1}{\partial x}\partial . \frac{M}{S}$.

55. Exempel. Es sey $\frac{M}{N} = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-\alpha)^2 (x-\beta)}$, so ist erstlich $A = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{\alpha - \beta}$. Zweytens ist $\partial . \frac{M}{S} = \frac{ax^2 - 2a\beta x - b\beta - c}{(x-\beta)^2}\partial x$ und $B = \frac{a\alpha^2 - 2a\beta\alpha - b\beta - c}{(\alpha-\beta)^2}$, übereinstimmig mit (29.).

56. Euler trägt in dem zweyten Theile seiner Differentialrechnung, Cap. XVIII. de usu calculi differentialis in resolutione fractionum, diese Methode vor, und giebt zugleich eine wichtige Ergänzung zu der in der Introductione in Anal. Infin. abgehandelten Lehre von der Zerlegung der Brüche. Durch die Zerlegung solcher, die im Nenner trinomische nicht zerlegbare Factoren, nämlich von der Form $ff - 2fgx\cos\varphi + ggxx$, enthalten. Diese schwe-

rere Untersuchung werden Geübte besser aus jenem Werke kennen lernen, als es hier aus einem unvollständigen Auszuge möglich wäre.

57. Der erste, welcher den Werth eines Bruches bestimmte, der bey einer gewissen Annahme der darin enthaltenen veränderlichen Größe $= \frac{0}{0}$ wird, ist Joh. Bernoulli. Er schätzte diese Auflösung so hoch, daß er die Aufgabe den französischen Mathematikern als ein Räthsel vorlegte. Sie sollten angeben, was der Werth des Bruches $\frac{\sqrt[3]{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[6]{ax^5}}$ ist, wenn $x = a$ gesetzt wird. Da sie auf die Anwendung der Differentialrechnung nicht dachten, so konnten sie die Frage nicht beantworten. Endlich ließ er sich bewegen, ihnen seine Auflösung mitzutheilen. Seine Methode hat hernach l'Hopital in der Analyse des infiniment petits, §. 163 vorgetragen. Joh. Bernoulli selbst fügt noch eine wichtige Ergänzung bey, für den Fall, da die Differentialquotienten im Zähler und Nenner selbst Null werden. Acta Erud. 1704. Opp. T. I. nr. 71. An beiden Stellen werden nach damahliger Gewohnheit krumme Linien zu der Auflösung angewandt. Der Werth des angeführten Bruchs für $x = a$ ist $= \frac{16}{9}a$. Man sehe auch Saurins Aufsätze in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1716 und 1723.

Functionalgröße ist diejenige veränderliche Größe, aus welcher eine andere zusammengesetzt wird, mit oder ohne Zuziehung gegebener Größen.

Functionalzeichen ist das Buchstabenzeichen, welches der Functionalgröße vorgesetzt wird, und mit dieser in Verbindung die Function bedeutet.

Fundamentalabstand, s. Perspectiv.

Funfzehneck, s. Vieleck, ordentliches.

G.

Ganz ist ein Verhältnißbegriff, dessen zugehöriger Begriff der Theil ist. Das Ganze ist so groß, als seine erschöpfenden Theile zusammen. Bey einer Zahlgröße zeigt der Zusatz, ganz, an, daß sie vollständig durch Wiederholung der Einheit zusammengesetzt wird, oder die Einheit selbst ist, im Gegensatze gegen Brüche. Eine ganze Potenz (mit einem ganzen Exponenten) entsteht durch Wiederholung eines Factors allein, eine gebrochne Potenz (mit einem gebrochnen Exponenten) durch Wiederholung eines Factors und Zerlegung des Products in eine Anzahl gleicher Factoren. Was eine ganze Function in Beziehung auf eine gebrochene ist, ist in dem Artikel, Function, erklärt.

Gegeben (datum) ist ein Verhältnißbegriff, dessen Correlatum das unbekannte ist. Die Auflösung einer Aufgabe bestimmt das unbekannte durch das gegebene, ein einzelnes oder mehreres. Bey allgemeinen Untersuchungen wird das gegebene unbestimmt gelassen, und in der Anwendung auf einzelne Fälle entweder willkührlich angenommen, oder durch die Frage bestimmt, oder durch Erfahrung, in der angewandten Mathematik, ausgemacht. In der Rechnung werden die gegebenen Größen durch die ersten Buchstaben des Alphabets, auch durch die mittlern, die unbekannten durch die letztern bezeichnet und unterschieden.

Was die Data des Euklides sind, s. Data.

Gegend ist bey geraden Linien bisweilen dasselbe was Richtung, ein unbestimmt entfernter Punct, nach welchem hin sie gezogen wird, besonders in der Astronomie und Geographie Puncte des Horizonts an der scheinbaren Fläche des Himmels. In der analytischen Geometrie wird auf solche Art die Gegend der positiven und negativen Abscissen unterschieden. Auf ebenen Flächen ist der Theil derselben, der durch eine gerade Linie von dem andern abgesondert wird, eine

Gegend, nach welcher von jener Linie an, aus irgend welchen Puncten, gerade Linien in einer beſtimmten Richtung gezogen werden. Die beiden Theile der ganzen Ebene ſind entgegengeſetzte Gegenden. Bey krummen Linien unterſcheidet man ſolchergeſtalt die Gegend der poſitiven und negativen Ordinaten. Von einer unbeſtimmten körperlichen Ausdehnung iſt der Theil, der durch eine Ebene von dem andern abgeſondert wird, eine Gegend, nach welcher von jener Ebene an, aus irgend welchen Puncten, gerade Linien in einer beſtimmten Richtung gezogen werden. Die beiden Theile der ganzen Ausdehnung auf beiden Seiten der Ebene ſind entgegengeſetzte Gegenden. An krummen Flächen wird dadurch die Lage der parallelen Ordinaten unterſchieden.

Gemiſcht iſt, was aus ungleichartigem zuſammengeſetzt iſt. Eine gemiſchte ebene Figur iſt, deren Umfangslinie aus Linien verſchiedener Art zuſammengeſetzt iſt, als aus geraden und krummen, oder aus krummen, deren Puncte nach verſchiedenen Geſetzen beſtimmt werden. Z. B. eine Ovale, die aus Kreisbogen mit verſchiedenen Halbmeſſern zuſammengeſetzt iſt, dagegen in einer Ellipſe alle Ordinaten durch dieſelbe Formel aus ihren Abſciſſen beſtimmt werden.

Die gemiſchte Mathematik iſt der reinen entgegengeſetzt, weil in jener nicht allein die gegebenen Größen durch Erfahrung geſucht werden müſſen, ſondern auch die Verbindung der bekannten und unbekannten Größen den Geſetzen der Natur gemäß genommen werden muß.

Ein gemiſchtes Verhältniß iſt, was aus ungleichnamigen Verhältniſſen zuſammengeſetzt wird. Z. B. das Verhältniß der Wege zweyer Körper aus den Verhältniſſen der Zeiten und Geſchwindigkeiten; der Preiſe zweyer Waaren aus dem ihrer Menge, dem Verhältniſſe der Gewicht oder Ellenmaaßen, und dem der Geldſorten.

Gemiſchte Zahl, eine aus ganzen und gebrochnen, oder aus rationalen und irrationalen zuſammengeſetzte.

Geodäsie ist eigentlich derjenige Theil der praktischen Geometrie, worin die Eintheilung der Felder und Ländereyen nach vorgeschriebenen Verhältnissen und Maaßen gelehrt wird. Das Kunstwort ist von den beiden griechischen Wörtern, γη, die Erde, und δαιειν, theilen, abgeleitet. Die Theorie des ganzen Verfahrens bey diesem Geschäft ist in dem Artikel, Figur, vorgetragen.

Man gebraucht das Wort aber auch im weitern Verstande für die Feldmeßkunst überhaupt, als die Anwendung der Geometrie auf die Messung und Berechnung der Ländereyen, sowohl in Absicht auf ihren Umfang und Inhalt, als auf ihre Eintheilung. Zollmann hat seine Anweisung zur Feldmeßkunst betitelt: Vollständige Anleitung zur Geodäsie oder praktischen Geometrie, Halle 1744, Fol. Einige Schriftsteller haben auch die Messungen der Linien und Winkel, welche zur Bestimmung der Länge eines Bogens auf einem Meridian der Erde angestellt sind, geodätische Operationen genannt, um sie von den astronomischen Operationen zu unterscheiden, wodurch die Weite des gemessenen Bogens gefunden wird, oder der Winkel, welchen die lothrechten Linien auf den Endpuncten des Bogens, nach dem Innern der Erde verlängert, mit einander machen.

Geometer, eine Person, die der Geometrie wohl kundig ist. Im Französischen pflegt man einen Mathematikverständigen insbesondere einen Geometer zu nennen, weil man wegen des großen Einflusses, den die Geometrie auf alle übrigen Theile der Mathematik hat, in keinem gründliche Kenntnisse haben kann, ohne eine genaue Bekanntschaft mit jener.

D'Alembert macht in dem Artikel, Geometer, des Dictionn. encyclopédique, sehr gute Bemerkungen zur Würdigung des geometrischen (oder vielmehr mathematischen) Talents, die Verträgsamkeit desselben mit dem Talent für Dichtkunst und Wohlredenheit, und den Einfluß auf andere Beschäftigungen. Einen Auszug daraus wird man in dem Artikel, Mathematiker, finden. Der

ganze Aufsatz ist in dem Esprit de l'Encyclopédie, à Genève, T. III. eingerückt.

Geometrie ist die Wissenschaft von den Formen ausgedehnter Größen. Sie unterscheidet sich von der Analysis dadurch, daß sie eigentlich nicht rechnet, die Größen nicht auf eine Einheit, weder eine bestimmte noch unbestimmte bezieht, sondern die Vergleichungen theils durch Zerlegungen und Zusammensetzungen macht, theils die Größen paarweise, durch ihre Verhältnisse, vergleicht. Die Geometrie nimmt die Bilder der intellectuellen Größen selbst zu Symbolen, da die Analysis willkührliche, an sich bedeutungslose, Zeichen der Größen und ihrer Verbindungen gebraucht. Doch kann die Rechnung auch auf geometrische Größen angewandt werden. Zum praktischen Gebrauch ist dieses gewöhnlich nöthig, und am genauesten. In höhern Untersuchungen muß die Analysis zu Hülfe genommen werden.

Die Geometrie ist theils eine *niedere*, theils eine *höhere*. Zu der niedern gehören erstlich alle Untersuchungen über Verbindungen gerader Linien, geradlinichter Figuren, und über Körper, die von Ebenen eingeschlossen sind; dann die Betrachtungen des Kreises, der Kugel, des Cylinders und des Kegels, so fern darin Verhältnisse gerader Linien verglichen werden; einiges leichtere auch über die Vergleichung des Krummen, oder, wenn man will, alles, was durch die Exhaustions-Methode dabey herausgebracht werden kann; wodurch zwar die Lehren des Archimedes von der Kugel, dem Cylinder und dem Kegel noch in die niedere Geometrie zu bringen wären, allein auch an der Gränze mit der höhern sich befänden.

Die *elementarische* Geometrie macht einen Theil der niedern aus. Sie enthält die Hauptsätze, die beständig zu den Beweisen gebraucht werden, mit den Auflösungen derer Aufgaben, die am häufigsten vorkommen. Man muß die niedere Geometrie nicht nach dem Inhalte unserer Lehrbücher beurtheilen, die nur das nothwendigste enthalten. Man sehe die mathematischen Sammlungen

des Pappus an; auch die wiederhergestellten Schriften des Apollonius, die ebenen Örter, die Bücher von dem bestimmten Schnitte, von der Theilung des Raumes, und die noch erhaltene von der Theilung des Verhältnisses; unter den Neuern die Werke von Gregorius a St. Vincentio, Tacquet, und das angefangene ausführliche Lehrgebäude der Geometrie von Gilbert. Erster Theil 1798.

Man theilt bisweilen die Elementar-Geometrie in Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie ein, s. diese Kunstwörter. Doch wird in dieselbe auch die Vergleichung der Oberflächen des senkrechten Cylinders und Kegels, und der Kugel mit ebenen Figuren aufgenommen. Man rechnet diese zur Stereometrie, dem Wortverstande nicht gemäß.

Die höhere Geometrie beschäftigt sich mit den krummen Linien, den von ihnen eingeschlossenen Flächenräumen, und den von ihnen erzeugten Körpern und Oberflächen. Sie fängt mit der Lehre von den Kegelschnitten an, die auf verschiedene Art, entweder rein geometrisch, oder mit Zuziehung analytischer Rechnung behandelt werden kann. Von diesen, durch ihre mancherley Eigenschaften merkwürdigen, Linien geht sie zu den höhern krummen Linien über, deren verschiedene Formen sie aus einander setzt. So weit es hier auf die Verhältnisse der darin nach bestimmten Gesetzen gezogenen geraden Linien ankommt, kann die Analysis endlicher Größen mit der Untersuchung fertig werden, wie man aus den Abhandlungen von Euler in dem zweyten Bande seiner Introductio in Analysin Infin. und Cramers Analyse des lignes courbes sieht. Wo aber das Krumme unmittelbar in Betrachtung zu ziehen ist, oder wo man von den letzten charakteristischen Verhältnissen der Veränderungen an den krummen Linien und Flächen ausgehen muß, da ist die Hülfsleistung der Analysis des Unendlichen nothwendig. Die reine (von der Erfahrung unabhängige) Mechanik führt insbesondere auf krumme Linien, die nur durch dieses Hülfsmittel erforscht werden können. Die wichtigste

und schwerste Frage dieser Art ist die Bestimmung der gedoppelt krummen Linie, die ein Weltkörper vermöge mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte beschreibt, eine Aufgabe, womit man sich schon über ein Jahrhundert beschäftigt hat, und die man nur unter gewissen Einschränkungen aufzulösen in Stand gekommen ist.

Ein neuer Zweig der Geometrie ist die Vergleichung der Winkel mittelst ihrer trigonometrischen Functionen mit denjenigen der Winkel, woraus sie zusammengesetzt werden. Man rechnet diese zu der analytischen Trigonometrie. Sie wird von dieser abgesondert, unter der Benennung, Goniometrie, in diesem Werke abgehandelt werden. Die Alten hatten nur sehr unvollkommene Kenntniß von diesem Theile der rechnenden Geometrie. Sie hat vorzüglich durch Euler ihre Bildung erhalten.

Die Methode in der Geometrie, in Absicht der Hülfsmittel, ist zweyerley. Man kann sich erstlich bloß der Lehren der Elementar-Geometrie, nebst derjenigen Art von Rechnung des Unendlichen, welche die Erhaustions-Methode genannt wird, bedienen, wie die Alten es durchgehends thaten, und die Engländer noch jetzt gewöhnlich thun. Zweytens kann man sich der Hülfe der Algebra, der Analysis und der analytischen Trigonometrie nebst der Goniometrie bedienen, indem man alle Sätze auf Gleichungen bringt, diese mit einander verbindet, und aus den Eigenschaften der Gleichungen und andern analytischen Sätzen, besonders denen aus der Differential- und Integralrechnung, und den trigonometrisch-goniometrischen Formeln, geometrische Vergleichungen herleitet. Dieses Verfahren erspart viele Mühe, da man nach der Methode der Alten erst die Mittelglieder der Schlußfolgen mühsam und künstlich aufsuchen muß, dagegen nach jener analytisch-rechnenden Methode nur das besondere aus dem allgemeinen herzuleiten ist. Die erstere reicht kaum oder wenig über die Kegelschnitte hinaus, der andern ist fast alles zugänglich oder wird es noch werden.

Die Methode in der Geometrie in Absicht des logischen Verfahrens ist, wie überhaupt, entweder *synthetisch* oder *analytisch*. Die synthetische Methode ist nicht, wie man gewöhnlich anzunehmen scheint, einzig und allein die Methode der Alten in der Geometrie, aus bewiesenen Sätzen einen neuen herzuleiten, oder aus dem gegebenen das unbekannte directe zu finden, sondern sie hat auch bey der Anwendung der analytischen Rechnung Statt, besonders bey dem Erweise von Lehrsätzen. Diese wird man nicht leicht rückwärts erweisen, so nämlich, daß gezeigt würde, wie man von einem als wahr angenommenen Satze auf einen als wahr schon anerkannten Satz geführt werde, s. Th. I. S. 88. Die analytische Auflösung geometrischer Aufgaben pflegt mit der synthetischen verbunden zu werden. Der wesentliche Unterschied der Methode der Alten und der Neuern beruht auf den Hülfsmitteln, die von beiden gebraucht werden.

Die Methode der Alten hat man besonders in dem Anfange des mathematischen Studium sich geläufig zu machen. Sie giebt eine unmittelbare, anschauliche Zergliederung der Relationen, sie nöthigt, in jedem Falle auf besondere Verbindungen und Anknüpfungen der Größen, und Einführung von Mittelbegriffen zu sinnen. Auch prägt sie durch die öftere Anwendung der gefundenen Sätze diese dem Gedächtnisse, zur schnellen Bereitschaft, ein. Durch alles dieses wird der mathematische Geist geschärft, und der Zeitaufwand vergütet. Ist man erst im Besitze der allgemeinen Hülfsmittel aus der Analysis der Neuern, so wird man vielleicht nicht die Geduld haben, zu Fuße zu gehen, wo man fliegen kann. Die fast unübersehbare Menge von Kenntnissen, welche die neuere Mathematik enthält, nöthigt auch die Zeit zu sparen.

Newton, der erste Erfinder der neuern Analysis, hielt die Methode der Alten sehr hoch, und rühmte die Mathematiker seiner Zeit, welche in der Anwendung derselben Geschicklichkeit hatten, besonders Huygens. Er pflegte sich oft selbst zu tadeln, daß er sie nicht mehr be-

folge, und bedauerte, daß er in dem Anfange seiner mathematischen Studien sich zu sehr an Descartes und andere algebraische Schriftsteller gehalten hätte, ehe er die Elemente des Euklides sich vollkommen zu eigen gemacht hatte. Das erzählt Pemberton in der Vorrede zu dem View of Sir Isaac Newton's Philosophy.

Uebersicht der Geschichte der Geometrie.

Die wissenschaftliche Geometrie hat ihren Ursprung von der technischen, der Feldmeßkunst, wie der Name (von γη, Erde, und μετρειν, messen) zu erkennen giebt. Herodotus erzählt (B. II. C. 109.), daß der ägyptische König Sesostris jedem seiner Unterthanen gleich viel Land zugetheilt habe, wovon jeder eine, für alle gleiche, Abgabe zu leisten hatte. Verlor einer durch die Überschwemmung des Nils etwas von seinem Antheil, so ward durch einen Feldmesser nachgesehen, wie viel er verloren hatte, und darnach die Abgabe vermindert. Herodotus fügt hinzu, daß hiedurch die Geometrie erfunden seyn möge, welche darauf nach Griechenland übergegangen sey. Aristoteles bemerkt in dem Anfange seiner Metaphysik ohne Zweifel sehr richtig, daß die Mathematik ihren Ursprung in Ägypten habe, da hier das Collegium der Priester frey von den Arbeiten des bürgerlichen Lebens Muße hatte, sich den Wissenschaften zu widmen. Inzwischen mögen die ägyptischen Priester doch nicht weit gekommen seyn, oder sind sehr geheim mit ihren Entdeckungen gewesen, da Thales, der zu ihnen gereiset war, noch die ersten Sätze der Geometrie zu erfinden hatte, und Pythagoras über die Entdeckung eines sehr nothwendigen Satzes so große Freude bezeugte. Nach der Erzählung des Diogenes Laertius und Plutarchus hat Thales den Ägyptern gezeigt, wie man die Höhe der Pyramiden mittelst des Schattens messen könne.

Thales (650 J. v C. G.) hat, wie Proklus berichtet, gefunden, daß in gleichschenklichten Dreyecken die Winkel an der Grundlinie gleich groß sind, daß die Schei-

telwinkel sich gleich sind, daß Dreyecke gleich sind, die in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinkommen, und daß ein Kreis von seinen Durchmessern in zwey gleiche Theile getheilt wird. Auch fand er, daß jeder Winkel am Umfange in einem Halbkreise ein rechter ist, für welchen Satz er den Musen einen Ochsen opferte. Von ihm erhielten die Griechen die ersten Begriffe von Astronomie und Naturlehre.

Pythagoras (im 6ten Jahrh. v. C. G.) erfand den nach ihm genannten geometrischen Satz, ein wichtiges Hülfsmittel zu geometrischen Vergleichungen, und den Grund zur arithmetischen Bestimmung der Linien. Daß er den Göttern hundert Ochsen zum Dank geopfert habe, ist Fabel, da es nach seiner Lehre nicht erlaubt war, ein Thier zu tödten. Pythagoras hat schon eingesehen, daß der Kreis unter allen ebenen Figuren gleichen Umfanges den größten Inhalt, und die Kugel unter allen Körpern mit derselben Oberfläche den größten Raum ausfülle. Die numerische Vergleichung der Linien führte die Pythagoräer auf die incommensurablen Größen. Sie geriethen auch auf die regelmäßigen Körper, die nach ihnen bisweilen benannt werden. Sie verglichen sie, nach ihrer symbolischen Lehrart, mit sinnlichen Gegenständen, die Pyramide mit dem Feuer, den Würfel mit der Erde, das Oktaedron mit der Luft, das Ikosaedron mit dem Wasser, das Dodekaedron mit dem Weltall.

Önopides von Chio (500 J. v C. G.) fand, wie eine senkrechte von einem gegebenen Puncte auf eine gerade Linie gezogen, ein Winkel einem andern gleich gemacht, und ein Winkel in zwey gleiche getheilt wird. Doch scheinen diese Sätze schon früher, dem Thales und Pythagoras, bekannt gewesen zu seyn müssen.

Zenodorus, ein Schüler des Önopides, zeigte, daß aus der Gleichheit des Umfanges zweyer Figuren nicht die Gleichheit des Inhalts folge. Seinen Aufsatz hierüber, die älteste auf uns gekommene geometrische Schrift des Alterthums, hat Theon in seinem Commentar über das Almageſt aufbehalten.

Hippokrates von Chio (450 J. v. C.) fand die Quadratur einer durch zwey Kreisbogen auf gewisse Art begränzten Figur, die von ihm den Namen lunula Hippocratis führt, s. Hippokrates. Zu seiner Zeit kam die Aufgabe in Anregung, einen gegebenen Würfel zu verdoppeln, so daß ein Würfel bleibe. Hippokrates bemerkte, daß es hiebey darauf ankomme, zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere proportionale zu finden. Er ist, wie Proklus angiebt, der erste, der geometrische Anfangsgründe verfaßt hat.

Die lineariſche Perſpectiv iſt, wenn das Zeugniß des Vitruvs (de Architect. VII. praef.) zuverläſſig iſt, früh bearbeitet worden. Er ſagt, daß Anaragoras und Demokritus über die theatraliſche Malerey geſchrieben haben, quemadmodum oporteat ad aciem oculorum radiorumque extenſionem, certo loco centro conſtituto, ad lineas ratione naturali reſpondere, uti de incerta re certae imagines aedificiorum in ſcenarum picturis redderent ſpeciem, et quae in directis planisque frontibus ſint figuratae, alia abſcedentia, alia prominentia eſſe videantur. In der Optik, welche des Euklides Namen führt, ſind zwar Sätze vorgetragen, worauf ſich die Perſpectiv gründet, aber eine perſpectiviſche Geometrie iſt es noch nicht.

Plato (400 J. v. C.) beſchäftigte ſich viel mit der Geometrie, und ſcheint durch Aufmunterung fähiger Köpfe zu ihrer Erweiterung vieles beygetragen zu haben. Er hat zwar, ſo viel man weiß, keine Schrift geometriſchen Inhalts verfaßt, allein man ſieht aus verſchiedenen Stellen ſeiner Schriften, daß er die Geometrie liebte, und ſie mit der Philoſophie zu verbinden ſuchte. Dies erhellt aus der bekannten Inſchrift über der Thür ſeines Hörſaals, kein der Geometrie Unkundiger komme herein. Er verlangte dadurch, daß der Verſtand ſeiner Zuhörer durch die Geometrie gebildet ſeyn ſollte, um die abſtracten unſinnlichen Lehren ſeiner Philoſophie zu faſſen. Auch iſt von ihm bekannt der Ausſpruch, Gott iſt immer Geometer

(ὁ Θεος ἀει γεωμετρει). Man schreibt dem Plato die Erfindung der geometrischen Analysis, und der Kegelschnitte zu. Doch mag er jene nur im Allgemeinen vorgetragen und empfohlen, und diese nur nach ihrer Entstehung aus dem Kegel betrachtet haben, ohne gewisse Eigenschaften an ihnen zu entdecken. Denn seine Auflösung von der Verdoppelung des Würfels ist nur eine mechanische. Seine Zöglinge und Nachfolger, Eudoxus, Menächmus, Dinostratus, Aristäus, bearbeiteten diesen wichtigen Theil der Geometrie, und wandten die analytische Methode mit Scharfsinn und glücklichem Erfolge an.

Eudoxus aus Cnidus wird von Archimedes als der Erfinder verschiedener Sätze in der Lehre von den Körpern angeführt, als daß eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe über derselben Grundfläche ist, und eines ähnlichen Satzes von dem Verhältnisse eines Kegels und Cylinders (von Kugel und Cylinder, Vorr.). Er hat sich entweder mit den Kegelschnitten oder mit andern krummen Linien beschäftigt, und das Delische Problem durch eine besondere von ihm erfundene Curve aufgelöset. Eratosthenes nennt ihn in der Aufschrift seines Mesolabum den gottähnlichen, und führt die von Eudoxus gebrauchte Curve als unterschieden von den drey Kegelschnitten des Menächmus an. Er hat Anfangsgründe der Geometrie verfaßt, und die Lehre von der Proportion erweitert, so daß auch das fünfte Buch des Euklides ihm von einigen zugeschrieben wird.

Menächmus scheint den Grund zu der Lehre von den Kegelschnitten gelegt zu haben, da Eratosthenes in der gedachten Aufschrift die drey Linien nach ihm benennt, (Μεναιχμειους κωνοτομιν τριαδας). Er wandte die Verbindungen zweyer Kegelschnitte sehr kunstgerecht zur Auflösung der Delischen Aufgabe an.

Dinostratus, sein Bruder, erdachte zur Auflösung der Aufgabe, einen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen, die Quadratrix.

Hippokrates von Chio (450 J. v. C.) fand die Quadratur einer durch zwey Kreisbogen auf gewisse Art begränzten Figur, die von ihm den Namen lunula Hippocratis führt, s. Hippokrates. Zu seiner Zeit kam die Aufgabe in Anregung, einen gegebenen Würfel zu verdoppeln, so daß ein Würfel bleibe. Hippokrates bemerkte, daß es hiebey darauf ankomme, zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere proportionale zu finden. Er ist, wie Proklus angiebt, der erste, der geometrische Anfangsgründe verfaßt hat.

Die lineariſche Perſpectiv iſt, wenn das Zeugniß des Vitruvs (de Architect. VII. praef.) zuverläſſig iſt, früh bearbeitet worden. Er ſagt, daß Anaxagoras und Demokritus über die theatraliſche Malerey geſchrieben haben, quemadmodum oporteat ad aciem oculorum radiorumque extenſionem, certo loco centro conſtituto, ad lineas ratione naturali reſpondere, uti de incerta re certae imagines aedificiorum in ſcenarum picturis redderent ſpeciem, et quae in directis planisque frontibus ſint figuratae, alia abſcedentia, alia prominentia eſſe videantur. In der Optik, welche des Euklides Namen führt, ſind zwar Sätze vorgetragen, worauf ſich die Perſpectiv gründet, aber eine perſpectiviſche Geometrie iſt es noch nicht.

Plato (400 J. v. C.) beſchäftigte ſich viel mit der Geometrie, und ſcheint durch Aufmunterung fähiger Köpfe zu ihrer Erweiterung vieles beygetragen zu haben. Er hat zwar, ſo viel man weiß, keine Schrift geometriſchen Inhalts verfaßt, allein man ſieht aus verſchiedenen Stellen ſeiner Schriften, daß er die Geometrie liebte, und ſie mit der Philoſophie zu verbinden ſuchte. Dies erhellt aus der bekannten Inſchrift über der Thür ſeines Hörſaals, kein der Geometrie Unkundiger komme herein. Er verlangte dadurch, daß der Verſtand ſeiner Zuhörer durch die Geometrie gebildet ſeyn ſollte, um die abſtracten unſinnlichen Lehren ſeiner Philoſophie zu faſſen. Auch iſt von ihm bekannt der Ausſpruch, Gott iſt immer Geometer

(ὁ θεος ἀει γεωμετρει). Man schreibt dem Plato die Erfindung der geometrischen Analysis, und der Kegelschnitte zu. Doch mag er jene nur im Allgemeinen vorgetragen und empfohlen, und diese nur nach ihrer Entstehung aus dem Kegel betrachtet haben, ohne gewisse Eigenschaften an ihnen zu entdecken. Denn seine Auflösung von der Verdoppelung des Würfels ist nur eine mechanische. Seine Zöglinge und Nachfolger, Eudoxus, Menächmus, Dinostratus, Aristäus, bearbeiteten diesen wichtigen Theil der Geometrie, und wandten die analytische Methode mit Scharfsinn und glücklichem Erfolge an.

Eudoxus aus Cnidus wird von Archimedes als der Erfinder verschiedener Sätze in der Lehre von den Körpern angeführt, als daß eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe über derselben Grundfläche ist, und eines ähnlichen Satzes von dem Verhältnisse eines Kegels und Cylinders (von Kugel und Cylinder, Vorr.). Er hat sich entweder mit den Kegelschnitten oder mit andern krummen Linien beschäftigt, und das Delische Problem durch eine besondere von ihm erfundene Curve aufgelöset. Eratosthenes nennt ihn in der Aufschrift seines Mesolabium den gottähnlichen, und führt die von Eudoxus gebrauchte Curve als unterschieden von den drey Kegelschnitten des Menächmus an. Er hat Anfangsgründe der Geometrie verfaßt, und die Lehre von der Proportion erweitert, so daß auch das fünfte Buch des Euklides ihm von einigen zugeschrieben wird.

Menächmus scheint den Grund zu der Lehre von den Kegelschnitten gelegt zu haben, da Eratosthenes in der gedachten Aufschrift die drey Linien nach ihm benennt, (Μεναιχμειους κωνοτομεις τριαδας). Er wandte die Verbindungen zweyer Kegelschnitte sehr kunstgerecht zur Auflösung der Delischen Aufgabe an.

Dinostratus, sein Bruder, erdachte zur Auflösung der Aufgabe, einen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen, die Quadratrix.

Aristäus der ältere ist der erste, der über die Kegelschnitte geschrieben hat, ein Werk in fünf Büchern. Pappus führt es an (Coll. math. VII. praef.). Sein Werk über die körperlichen Örter (Auflösungen von Aufgaben durch Linien, die durch Durchschnitte von Körpern mit Ebenen entstehen) in fünf Büchern setzt er mit unter die Hauptwerke, die man studieren müsse, um sich in der geometrischen Analysis Fertigkeit zu erwerben. Diese kunstreiche Methode der alten Geometer hat, wie man hieraus sieht, seit den ersten Anwendungen des Menächmus, bald beträchtliche Erweiterungen erhalten. Die Lehre von den körperlichen Örtern beruhet auf der Lehre von den Kegelschnitten.

Euklides (300 J. v. C.) ist durch seine Elemente der Geometrie und der Arithmetik allen bekannt. Durch ihre Gründlichkeit und wissenschaftliche strenge Anordnung haben sie sich den großen Beyfall in allen Zeiten und bey allen cultivirten Völkern erworben. In England besonders sind sie fast das einzige Lehrbuch der Geometrie, gewiß zur feinern Bildung des Geistes. Ohne Zweifel sind vor Euklides schon gute Elemente der Geometrie vorhanden gewesen, die er benutzen konnte. Proklus nennt vier oder fünf frühere Verfasser von Elementen; Euklides habe aber die Entdeckungen seiner Vorgänger vervollkommnet, und besonders die noch mangelhaften Beweise zur völligen Schärfe gebracht. Allein er hat auch mehrere Werke geliefert, die über die Elemente hinausgehen. Seine Data erstlich enthalten eine Sammlung von Sätzen, die einem Geometer zu eigenen Untersuchungen nothwendig sind, Data Euclidis. Über die Kegelschnitte verfaßte er ein Werk in vier Büchern, worauf Apollonius nachher sein großes Werk gegründet hat. Pappus führt ein Werk von ihm an, Örter an eine Oberfläche, wovon er aber keine weitere Nachricht giebt. Es können nichts anders als krumme Linien von doppelter Krümmung, auf einer krummen Fläche gezogen, seyn. Das Hauptwerk des Euklides sind die Porismata in drey Büchern, wovon Pappus sagt, daß sie eine höchst kunstreiche Sammlung von Sätzen sind,

die zur Analysis der schwerern und allgemeinern Aufgaben dienen, wovon die Natur eine unendliche Menge an die Hand gebe. Die beiden letztern Werke sind verloren gegangen, weil sie zu kunstreich waren. S. Porismata. Die Hauptausgabe aller noch vorhandenen Schriften des Euklides, griechisch und lateinisch, ist von David Gregory. Oxford 1703. Fol. Robert Simson hat eine Ausgabe der geometrischen Elemente, der sechs ersten Bücher, mit dem 11ten und 12ten, lateinisch 1756 4. und englisch 1757 herausgegeben, worin er kritische Verbesserungen des Textes gemacht hat. Von der englischen Übersetzung ist 1775 die fünfte Auflage gemacht. Bey dieser und einigen vorhergehenden befinden sich auch die Data mit Verbesserungen. Eine sorgfältige deutsche Übersetzung aller 15 Bücher hat Lorenz geliefert. Zweyte Ausgabe 1798. Die beiden letzten Bücher der Elemente schreibt man dem Hypsikles zu. Verzeichnisse von Ausgaben der Euklidischen Schriften findet man in Scheibels mathem. Bücherkenntniß, 1. Stück, und in Murhards mathem. Bibliothek, 2 Bd.

Archimedes (250 J. v. C.) eröffnete sich Wege in Gegenden der Geometrie, die bis dahin fast gar nicht betreten waren, durch Vergleichung krummlinichter Größen unter einander und mit geradlinichten. Sein Scharfsinn führte ihn zu vielen merkwürdigen Entdeckungen von neuer Art, daher das Alterthum ihm die erste Stelle unter den Geometern einräumte. Er hat mancherley Schriften hinterlassen, die alle geometrischen oder geometrisch-statischen Inhalts sind. Denn von seinen technischen Erfindungen, deren das Alterthum ihm vierzig beylegt, hat er nichts aufgesetzt. In der Schrift von Kugel und Cylinder vergleicht er diese Körper und ihre Abschnitte in Rücksicht auf Oberfläche und Inhalt. Der Aufsatz über die Kreismessung ist der erste Versuch einer Rectification, s. Cyklotechnie. In dem Buche von Konoiden und Sphäroiden gieng er noch weiter. Er vergleicht die Abschnitte dieser Körper oder das Ganze mit Cylindern und Kegeln von derselben Höhe über derselben Grundfläche. Die

Quadratur der Parabel fand er auf zweyerley Art, von welchen die durch Hülfe der Statik eine ganz überraschende Combination zweyer sehr ungleichartigen Vergleichungen ist. Seine Untersuchungen über die von Conon erdachte Spirale geben die Verhältnisse der zusammengehörigen Flächenräume an dieser Linie und dem Kreise, auch die Verhältnisse der Subtangenten von dem Mittelpuncte aus genommen zu den Kreisbogen. Die Beweise der letztern haben einem guten Mathematiker im 17ten Jahrhundert, Bouillaud, nach seinem Geständnisse, Mühe gemacht, so daß er zweifelte, ob er sie ganz gefaßt hätte. Archimedes war es auch, der die Statik und Hydrostatik gegründet hat. Seine beiden Bücher über die gleichwichtigen ebenen Figuren, oder die Schwerpuncte solcher Figuren, enthalten sehr scharfsinnige geometrische Methoden, den Schwerpunct geradlinichter, besonders aber paraboli-scher Figuren zu finden. Von der Methode, deren sich Archimedes zur Vergleichung krummlinichter Größen bedient hat, s. den Artikel, Erhaustions-Methode. Eine prächtige Ausgabe der Werke des Archimedes, mit Anmerkungen und gelehrten Abhandlungen begleitet, ist zu Oxford 1792, groß Folio herausgekommen. Den größten Antheil an dieser Ausgabe hat Torelli, ein Geometer aus Verona, nach dessen Tode, einige Liebhaber der alten Geometrie seine Handschriften gekauft, und zum Druck befördert haben. Ein Beweis der Liebe für die Alten in England.

Apollonius von Pergä (200 J. v. C.) heißt bey den Alten der große Geometer, oder der Geometer vorzugsweise. Man hat allerdings ihn unmittelbar nach Archimedes zu setzen, der wegen der Neuheit seiner Untersuchungen, und der Methoden, die er dazu anwandte, noch den Rang vor Apollonius behaupten möchte. Das Hauptwerk dieses Geometers ist das über die Kegelschnitte in acht Büchern abgefaßte, von welchen noch die ersten vier im Original, die drey folgenden in einer arabischen Übersetzung, und aus dieser in einer lateinischen übrig sind. Das achte ist von Halley nach der kurzen von Apollonius

gegebenen Anzeige wieder hergestellt. Alle acht Bücher, die vier ersten zugleich griechisch, sind von ihm zu Oxford 1710 gr. Fol. herausgegeben. In den vier ersten Büchern hat Apollonius das vor ihm schon bekannte mit Verbesserung der Form vorgetragen, und mit neuen Sätzen bereichert. Die vier andern Bücher aber enthalten ganz neue und tief geschöpfte Untersuchungen. In dem Artikel, Kegelschnitte, wird davon weitere Nachricht gegeben. Die übrigen Schriften des Apollonius betreffen besondere Aufgaben aus der Geometrie, wobey viele Fälle möglich sind, die darin einzeln vorgenommen werden. Sie waren den Alten wegen der darin angewandten geometrischen Analysis wichtig. Sie sind alle verloren gegangen, bis auf die Schrift de sectione rationis, die in einer arabischen Übersetzung sich erhalten hat. Ihre Titel und die wieder hergestellten sind in dem 1. Th. S. 66. angeführt. Die algebraischen Auflösungen der Aufgaben de sectione rationis und de sectione spatii sind daselbst S. 113 und 115. anzutreffen, die von der sectione determinata, S. 293. ff. ein Fall der Aufgabe de inclinationibus, S. 120. Unter den übrigen Schriften, von deren Inhalt gar keine nähere Anzeige vorhanden ist, war eine über die Vergleichung des Dodekaedron und Ikosaedron, die in derselben Kugel eingeschrieben sind, auch eine Schrift über die Stillstandspuncte und Rückgangsbogen der Planeten.

Mit Apollonius hatte der geometrische Geist unter den Alten seine größte Stärke erreicht. Die folgenden Zeiten mußten sich begnügen, die Werke der großen Meister zu studieren, und einiges als Nachlese beyzufügen. Die Astronomie beschäftigte nun vorzüglich die Mathematiker.

Diese Wissenschaft war es auch, welche die Geometer nöthigte, die Arithmetik auf die Geometrie anzuwenden. Schon die Bedürfnisse bey Messungen von Entfernungen auf der Erdfläche, und Bestimmung des Inhalts von Feldern müssen dazu geleitet haben. Die Astronomie machte es nothwendig, die Winkel durch Ver-

hältniſſe der Linien in rechtwinklichten Dreyecken zu bestimmen. Der erſte, deſſen Bemühungen zu dieſem Zweck bekannt ſind, iſt Menelaus aus Alexandrien, (100 J. n. C. G.), der ſechs Bücher von den Chorden im Kreiſe geſchrieben hat, die nicht mehr vorhanden ſind. Die Aſtronomie bedarf gar ſehr der Lehre von den Lagen der Kreiſe auf einer Kugelfläche gegen einander, und von den Dreyecken, welche die großen Kreiſe auf einer Kugel bilden. Die erſte bekannte Schrift über dieſe Lehre iſt von Theodoſius (50 J. v. C. G.). Sein Zweck iſt die geometriſchen Gründe der ſphäriſchen Aſtronomie feſt zu ſtellen, und die Erſcheinungen, womit ſie ſich beſchäftigt, zu erklären. Das dritte Buch enthält manche merkwürdige und ziemlich ſchwere Sätze, ſo daß Pappus nöthig gefunden hat, darüber Erläuterungen zu geben, welche das ſechſte Buch ſeiner Sammlungen einnehmen.

Menelaus hat auch ein Werk übrr die Sphärik geſchrieben, worin hauptſächlich von ſphäriſchen Dreyecken und ihrer Auflöſung gehandelt wird. Man trifft darin manche merkwürdige und wenig bekannte Sätze an. Dieſer Geometer hat ſich auch mit krummen Linien höherer Art als die Kegelſchnitte ſind, beſchäftigt, wie Pappus in einer Anmerkung zu S. 30. des 4. B. anführt.

Serenus aus Antiſſa auf Lesbos (ungewiſſen Zeitalters) ſchrieb eine Abhandlung über die Schnitte eines Cylinders, und die Schnitte eines Kegels durch die Axe.

Nikomedes (der vielleicht noch in die Zeit vor C. G. zu ſetzen iſt) erfann die Conchoide, zur Auflöſung der Aufgabe von der Dreytheilung eines Winkels, und der Erfindung zweyer mittlern proportionalen.

Pappus aus Alexandrien (um 375 n. C. G.) hat uns eine ſchätzbare Sammlung von mathematiſchen Lehrſätzen und Aufſätzen und Aufgaben mit ihren Auflöſungen hinterlaſſen, die er aus vielen damahls vorhandenen Schriften gemacht hat; zugleich war dabey ſein Zweck,

diejenigen Lehrsätze, welche zum Verständniß der vornehmsten geometrischen Werke nöthig sind, mitzutheilen und zu erweisen. Aus dieser Sammlung lernt man den Geist der geometrischen Analysis der Alten kennen. In der Vorrede zu dem siebenten Buche hat er uns den Inhalt der wichtigsten geometrisch-analytischen Werke derselben angezeigt, wovon wir ohne ihn nicht die Titel wissen würden, und in dieser Abtheilung seiner Sammlung eine große Anzahl Lemmata (Erläuterungs- und Vorbereitungs-Sätze) zu jenen Schriften mitgetheilt, die nach der Methode jener behandelt sind. In der gedachten Vorrede führt er auch die bey den Alten sehr wichtige Aufgabe an, den geometrischen Ort zu finden, wodurch die von jedem Puncte desselben an gegebene gerade Linien gezogenen Perpendikel gegebene zusammengesetzte Verhältnisse bilden. Die Alten konnten sie nur für den Fall von drey oder vier gegebenen geraden Linien auflösen; der neuern Analysis war es vorbehalten, eine uneingeschränkte Auflösung zu liefern. Der Satz, den in neuern Zeiten Guldin bekannt machte, wie mittelst des Schwerpuncts von Linien und Flächen der Inhalt der davon beschriebenen Oberflächen und Körper gefunden wird, wird von Pappus als ein von ihm entdeckter angeführt, am Ende der vorhergedachten Vorrede. In dem fünften Buche wird unter andern die Vergleichung isoperimetrischer Figuren in Rücksicht auf ihren Inhalt gemacht. Der zehnte Satz ist, daß unter geradlinichten Figuren von gleichem Umfange, mit derselben Anzahl Seiten, diejenige den größten Inhalt hat, welche lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. — In Kästners Geschichte der Mathematik Bd. II. S. 81 — 94 ist ein Verzeichniß der mannichfaltigen Gegenstände in dieser Sammlung enthalten.

Von den acht Büchern der Sammlung sind die beiden ersten, und das dritte zum Theil verloren. Die Ausgaben zu Pesaro (Pisauri) 1588 und Venedig 1589 sind nur in dem Titel verschieden. Die Ausgabe von 1660 wird zwar auf dem Titel als eine sehr verbesserte angegeben, ist aber nach Halleys Versicherung nicht so gut als

jene. Das Original ist noch nicht gedruckt. Nur den griechischen Text zu der Vorrede des 7ten Buchs hat Halley der Schrift des Apollonius de sectione rationis beygefügt. Wallis hat ein Fragment des zweyten Buchs in dem dritten Theile seiner Werke mitgetheilt.

Diokles, (4co J. n. C. G.) erdachte zur Auflösung der Aufgabe von der Erfindung zweyer mittlern proportionalen die Cissoide. Von ihm ist auch eine geschickte Auflösung einer für die alte Geometrie nicht leichten Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene in zwey Theile nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen. Archimedes versprach sie zu liefern; man findet sie aber in seinen Schriften nicht. Eutocius führt die Auflösung des Diokles und eines andern Geometer, Dionysodorus, in seinem Commentar über das zweyte Buch des Archimedes von Kugel und Cylinder an.

Dieser jetzt genannte Eutocius aus Ascalon (5. Jahrh. n. C. G.) hat nützliche Erläuterungen über einige Schriften des Archimedes und die vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius geliefert. Man findet darin gute historische Nachrichten, in jenen insbesondere über die Delische Aufgabe.

Nach den Commentarien über die Werke des Archimedes und Apollonius findet sich gar nichts bemerkenswerthes für die Geometrie. Die Eroberung von Ägypten durch die Saracenen (im J. 641.), und die Zerstörung der herrlichen Bibliothek in Alexandrien machten der so alten und verdienten Akademie ein Ende. Politische und kirchliche Unruhen in dem griechischen Reiche und in den Abendländern unterdrückten fast alle Beschäftigung mit der Mathematik. Die Araber fiengen zwar bald an mit der Liebe zum Kriege die Liebe zu den Wissenschaften zu vereinigen, so wie sie immer die Dichtkunst und Beredsamkeit geliebt hatten; sie übersetzten die wissenschaftlichen Schriften der Griechen in ihre Sprache, und erhielten uns dadurch einige schätzbare Werke; allein sie brachten die Geometrie nicht weiter. Es ist wahr, daß nach der

Methode der Alten diese schwerlich höher zu treiben seyn möchte, als es von den Griechen geschehen war. Der Araber Alhazen verdient aber vieles Lob wegen der Auflösung der geometrisch-optischen Aufgabe, an einem sphärischen Spiegel, wenn die Stelle des Objects und des Auges gegeben ist, den Zurückwerfungspunct zu finden. Vielleicht gehört die Auflösung aber einem Griechen. Sein Werk über die Optik ist sehr dunkel, verworren und weitschweifig.

Die Araber haben um die Trigonometrie das Verdienst, daß sie anstatt der von den Alten gebrauchten Chorden die Sinus einführten.

Als in Europa die Liebe zu den Wissenschaften wieder erwachte, und durch die damahls erfundene Buchdruckerkunst unterstützt ward, war man eifrig bemüht auch geometrische Werke der Alten durch Übersetzungen in Umlauf zu bringen. Commandinus (geb. 1509. zu Urbino) verdient hier eine ehrenvolle Erwähnung. Dieses gab zum Anfang hinlänglich Beschäftigung. Doch unternahmen einige sehr arbeitsame Männer in Deutschland schon im 15ten Jahrhundert, noch mehr im 16ten, die Berechnung sehr genauer und vollständiger trigonometrischer Tafeln. Die Verdienste des Purbach, Regiomontanus, Rhäticus, Otho, sind in dem Artikel, Cyklotechnie, Th. I. S. 667. ff. gerühmt. Die Arbeit erforderte gute Kenntniß der Trigonometrie oder Goniometrie, aus welcher manche wichtige Sätze in des Rhäticus Werk de fabrica canonis doctrinae triangulorum vorkommen.

Der Abbate Maurolycus aus Messina (gest. 1575.) war nicht allein ein gelehrter Herausgeber einiger alten geometrischen Werke, sondern auch der erste Mathematiker seiner Zeit. Er wagte sich an die Wiederherstellung des fünften Buchs des Apollonius, welches von den Größten und Kleinsten an den Kegelschnitten handelt. Borellus hat diesen Versuch aus den nachgelassenen Papieren des Maurolycus zu Messina 1654 herausgegeben. Montucla rühmt sehr die Methode, nach welcher Mau-

rolycus die Kegelschnitte behandelt hat, und sagt, daß de la Hire in seinem ausführlichen Werke über diese Linien eben dieselbe befolgt, und weiter angewandt habe.

Nonius, oder mit seinem portugiesischen Namen Nugnez (gest. 1577.), zeigte sich als einen scharfsinniger Geometer durch die Auflösung der Aufgabe von der kürzesten Dämmerung, die selbst Jakob Bernoulli viel zu schaffen gemacht hat. Er ist der erste, der die loxodromische Linie betrachtet hat.

Vieta (gest. 1603.), der insbesondere als Algebraist berühmt ist, fand Formeln für die Chorden der vielfachen Winkel und ganzer Theile eines Winkels durch die Chorde des einfachen. Dadurch löfete er eine ihm von Adrianus Romanus vorgelegte Aufgabe vom 45sten Grad auf Seine Wiederherstellung der Schrift des Apollonius von den Berührungen, und andern Untersuchungen, sind Beweise seines geometrischen Scharfsinnes. Von seiner Kreisrechnung s. Cykletechnie, Th. I. S. 647.

Kepler (gest. 1630.) ist der erste, der das unendlich kleine in die Geometrie einführte, und es zur Vergleichung des Inhalts runder Körper anwandte, in der Stereometria doliorum, 1615. Er findet dadurch den Inhalt von 90 Arten Körper; hat sich aber auch, wo ihm die directe Methode fehlte, durch seine Einbildungskraft verleiten lassen, Verhältnisse anzunehmen, die nur eine gewisse Schicklichkeit oder Wahrscheinlichkeit hatten, welches Alexander Anderson in seinen Vindiciis Archimedis 1616, ihm zeigte.

Cavaleri (gest. 1647.) suchte auf eine andere Art die Exhaustions-Methode der Alten abzukürzen und zu erweitern. Er fand mittelst Summirungen arithmetischer Reihen von unendlich vielen Gliedern mit unendlich kleinen Unterschieden den Inhalt von Flächen-Figuren und Körpern. Was gegen seine Methode zu erinnern ist, findet man in dem Artikel, Cavaleri Methode des Untheilbaren.

Guldin (geſt. 1643.) gründete die Berechnung des Inhalts von Flächenräumen und Körpern auf eine Eigenſchaft des Schwerpunctes, ſ. Guldins Regel.

Lucas Valerius hatte in der Schrift de centro gravitatis ſolidorum, 1604. die von Archimedes bloß bey dem paraboliſchen Konoid angefangene Unterſuchung auf mehrere Körper erſtreckt.

Torricelli (geſt. 1647.) erweiterte die Lehre des Archimedes von der Kugel, insbeſondere durch die Beſtimmung des Inhalts der Körper, welche durch Umdrehung regulärer Vielecke erzeugt werden. De ſphæra et ſolidis ſphæralibus, in der Sammlung ſeiner geometriſchen Wercke. Florent. 1644. Er gab 20 Arten an, die Parabel zu quadriren, theils geometriſche, theils mechaniſche, theils nach der Methode des Untheilbaren, in eben der Sammlung. Die Quadratur der Cykloide fand er auf dreyerley Art. Von ſeinem Streite mit Roberval über das Erfindungsrecht ſ. Theil I. S. 596.

Der Orden der Jeſuiten hatte im 17ten Jahrhundert und ſchon vorher viele Mathematiker von Ruf. Ein ſehr bekannter iſt Clavius (geſt. 1612.), deſſen Werke fünf große Foliobände, eng gedruckt, ausmachen. Doch wird wenig neues von Merkwürdigkeit darin enthalten ſeyn. Vielleicht iſt ſein weitſchweifiges Werk über die ſtereographiſche Projection, welches er Aſtrolabium betitelt, in Rückſicht des Neuen, das wichtigſte. Durch ſeinen großen Commentar über die Euklidiſchen Elemente mag er am nützlichſten geworden ſeyn. Ein anderer Jeſuit, Taequet (geſt. 1660.), hat ſehr vielerley geometriſchen Inhalts, beſonders über die Meſſung mancherley Körper, geſchrieben, das einen ſtarken Foliband füllt. Der wichtigſte mathematiſche Schriftſteller aus dieſem Orden in dem genannten Zeitraume möchte Gregorius a St. Vincentio (geſt. 1667.) ſeyn. Hungens urtheilt ſehr günſtig von ihm, ob er gleich ſeine vermeintliche Quadratur des Kreiſes widerlegt hatte, und Leibnitz nennt ihn auf eine ſehr ehrenvolle Art neben Descartes und Fermat. Von ihm iſt ein großes Werk vorhanden: Opus

geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Antwerp. 1647. Fol. Die Quadratur des Kreises, welche er darin will entdeckt haben, ist zwar unrichtig, allein auf dem Wege, auf welchem er sie suchte, hat er vieles schätzenswerthe und merkwürdige gefunden, als manche neue Sätze über den Kreis und jeden Kegelschnitt; sehr viele Cubirungen, unter andern der hufförmigen Abschnitte eines Cylinders mit Grundflächen verschiedener Art. Alles dieses mag man jetzt leichter finden können; doch bleibt die Methode lehrreich. Wahrscheinlich hat er auch die Verwandlung der arithmetischen Spirale in eine Parabel gefunden, die Cavaleri im 6ten Buch 9ten S. seiner Geometrie vorträgt. Das merkwürdigste, was der P. Gregorius gefunden hat, wird seyn, daß die Flächenräume zwischen einer Hyperbel, der einen Asymptote und den mit der andern parallelen Ordinaten gleichförmig wachsen, wenn die zugehörigen Abscissen in geometrischer Progression genommen werden.

Descartes (gest. 1650.) gab der Geometrie einen neuen Schwung durch die Anwendung der Algebra auf die Untersuchung der Natur krummer Linien. Vor ihm waren schon geometrische Fragen mit Hülfe der Algebra aufgelöset, allein diese betrafen nur einzelne Vergleichungen bestimmter, mit einander verbundenen, geraden Linien; Descartes schloß alle Eigenschaften einer krummen Linie in eine algebraische Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen, den Coordinaten, mit gewissen gegebenen Linien ein, in der Absicht, um aus derselben, als einer vollständigen Definition, wo es nöthig, mit Zuziehung einiger Verwandlungen, alle Eigenschaften einer krummen Linie, auch die verborgensten, vermittelst algebraischer Lehrsätze und Auflösungs-Methoden herzuleiten. Dieses leistete er in seiner Geometrie, einem kleinen, aber sehr gehaltvollen Werke, welches zuerst 1637. erschien. Schon fast im Anfange giebt er die Auflösung einer Aufgabe, welche die Alten nur in einigen besondern Fällen hatten auflösen können. Sie ist folgende: es sind mehrere gerade Linien der Lage nach gegeben, den Ort des Punctes zu fin-

den, an welchem das Product der Linien, die von demselben an einige jener Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, dem Producte derjenigen, die an die übrigen gleichmäßig gezogen werden, gleich sey, oder zu demselben ein gegebenes Verhältniß habe. Ist der geraden Linien eine gerade Anzahl, so mag man für jedes Product gleich viele nehmen; sonst müßte man für die geringere Anzahl gegebene Linien, oder die lineariſche Einheit, zu Factoren aufnehmen, wie es nöthig ist, wenn die Anzahl ungerade ist. Hievon noch in dem Artikel, krumme Linien. — Durch die algebraische Darstellung einer Curve gelangte Descartes zu einer allgemeinen Methode, bestimmte Gleichungen zu construiren (s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra Th. 1. S. 132.). Einiges dahin noch gegen seine Wahl der dazu anzuwendenden Linien zu erinnern syn. — Durch dieselbe fand er auch zwey allgemeine Methoden, an eine krumme Linie berührende gerade zu ziehen, wovon in dem Artikel, berührende Linie, Th. 1. S. 280 Nachricht gegeben ist.

Fermat (gest. 1665.) hat zu gleicher Zeit mit Descartes die Beschaffenheit einer Curve durch eine Gleichung dargestellt; er gebrauchte auch die unbestimmten Gleichungen für zwey krumme Linien um eine bestimmte zu construiren; nur ist es unbequem, daß er sich Vieta's Notation bedient. Seine Methode, hyperbolische und paraboliſche Linien höherer Art nebst der gemeinen Parabel zu quadriren, ist einfach und sinnreich, vermittelst der Summirung einer geometrischen Reihe, wobey er die Abscissen in geometrischer Progression fortgehen läßt. Seine Regel, den Werth einer veränderlichen Größe zu bestimmen, für welchen die zugehörige veränderliche ein Größtes oder Kleinstes ist, ist im wesentlichen dieselbe mit derjenigen, die die neuere Analysis lehrt. Sein Verfahren, berührende an eine Curve zu ziehen, macht die Sache sehr begreiflich, kann aber nur bey rationalen Gleichungen gebraucht werden, s. Th. I. S. 828. Er fand die Rectification der zweyten cubischen Parabel, deren Gleichung ist $y^3 = ax^2$, welche aber auch zwey andere Geo-

meter, van Heuraet und Neil, für sich mögen gefunden haben. Er wird auch der erste seyn, der die Aufgaben vornahm, wie eine Kugel zu finden sey, welche andere gegebene Kugeln oder Ebenen berührt, oder deren Oberfläche durch gegebene Puncte geht.

Pascal (gest. 1662, im 39sten Jahre) war ein außerordentlicher Kopf für die Geometrie, da er schon im 16ten Jahre eine Abhandlung über die Kegelschnitte verfaßte, worin er aus einem einzigen Satze auf 400 Corollarien herleitete. Doch ist von seinen mathematischen Schriften nichts gedruckt, als seine Geschichte der Cykloide, worin er schwere Aufgaben auflöset. Durch Kränklichkeit und religiösen Eifer für die Jansenisten ward er von der Mathematik abgezogen.

Viviani (gest. 1703 im 81sten J.) gab im J. 1659. eine Wiederherstellung des fünften Buchs über die Kegelschnitte von Apollonius heraus, de Maximis et Minimis geometrica divinatio in V. Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum, worin er vieles neue zur Ergänzung des alten Werks vorträgt, einige der schwersten Fragen aber unberührt gelassen hat. Im Jahr 1673. gab er auch eine Wiederherstellung der Schrift de locis solidis des ältern Aristäus heraus, wovon er 1701. eine vermehrte Ausgabe erscheinen ließ. Viviani ist unter den Neuern einer der vertrautesten mit der alten Geometrie.

Hugens (gest. 1695.) bereicherte die Geometrie mit der Theorie der Evoluten, in dem dritten Theile des Horologium oscillatorium, 1673. Sie führte ihn zu manchen neuen Sätzen und Bemerkungen, als über die Rectification der Curven, und zu der merkwürdigen Eigenschaft der Cykloide, daß sie durch die Abwickelung sich selbst wieder erzeugt. Die Kreisrechnung erhielt durch ihn Erweiterungen.

Wallis (gest 1703.) wandte die Lehre von der Summirung unendlicher Reihen, deren Glieder eine stetige Folge ausmachen, auf die Geometrie ausführlicher an, als es seit Cavaleri's Zeit von andern Geometern geschehen

war. Seine Arithmetica infinitorum erſchien zuerſt 1655. Es iſt eigentlich ein geometriſches Werk, worin beſonders die Quadratur krummlinichter Figuren vorgenommen wird. Darauf folgten die Schriften über die Cykloide und Ciſſoide und die dadurch erzeugten Körper, nebſt Methoden zur Rectification und Complanation, 1659; ſehr ausführliche Unterſuchungen über den Schwerpunct der Körper (faſt 300 S. Fol. ſtark, im J. 1670); eine Abhandlung über die Winkeltheilungen, 1685. Doch iſt alles dieſes, ſo ſcharfſinnig es auch erfunden iſt, gegenwärtig zu weitſchweifig und mühſam. Von ſeinem Ausdruck des Verhältniſſes zwiſchen dem Quadrat des Durchmeſſers und dem Flächeninhalte eines Kreiſes, ſ. Th. I. S. 654.

Lord Brounker (geſt. 1684) fand für das eben gedachte Verhältniß einen Ausdruck durch einen Kettenbruch, ſ. Th. I. S. 655. Er war auch der erſte, der den Flächeninhalt einer Curve durch eine unendliche Reihe, nämlich an der Hyperbel, darſtellte, ſ. Brounkerſche Reihen, Th. I. S. 356.

Mercator (geſt. 1694) fand eine bequemere Reihe für die Quadratur der Hyperbel an ihren Aſymptoten, dieſelbe, welche die Integralrechnung unmittelbar giebt.

Barrow (geſt. 1677) gab mancherley künſtliche Methoden an, berührende an krumme Linien zu ziehen, aber auch die einfache, welche die Differentialrechnung an die Hand giebt, nur daß er ſie noch nicht anders als bey rationalen Gleichungen anzuwenden vermochte. S. Th. I. S. 284. Barrows lectiones geometricae et opticae 1669, welche letztern ganz geometriſch ſind, enthalten ſcharfſinnige Unterſuchungen. Mit dem Ende des ſiebzehnten Jahrhunderts ſchließt ſich auch das Zeitalter der mittlern Geometrie, die entweder ganz nach dem Muſter der alten geformt war, oder ſich mit der Algebra verband, und ſich der Summirung unendlicher Reihen gleichſam mit mehrerer Kühnheit als die Geometrie der Alten bediente. Die Analyſis des Unendlichen, welche Newton und Leibnitz erfanden, ſetzte die Geometer in Stand, nicht allein alle Aufgaben, wobey neben den veränderlichen Größen ſelbſt

auch die Gränzverhältnisse ihrer Veränderungen in Betrachtung kommen, (als die von berührenden, von Wendungspuncten, Rückkehrpuncten, vom Krümmungskreise, von Brennlinien, von Größten und Kleinsten), leicht und allgemein aufzulösen, sondern auch von diesen Verhältnissen durch die Integralrechnung zu den endlichen Größen selbst zu gelangen. Also wurden Quadraturen, Cubirungen, Complanationen, Lage des Schwerpunktes, womit sich die vorhergehenden Geometer viele Mühe und auch viele Freude gemacht hatten, nur eine vorbereitende Anwendung der neuen Rechnung, um zu schwerern Untersuchungen sich geschickt zu machen. Von dieser Zeit an sind Analysis, Geometrie und die reine Mechanik so genau mit einander verschwistert, daß die Geschichte der einen immer in die der andern eingreift. Doch behielt die Geometrie der Alten immer noch ihre Verehrer, besonders in Italien und England. Dem letztern Lande dankt man die besten Ausgaben der alten Geometer und Wiederherstellungen ihrer verlornen Schriften. Die Kegelschnitte sind von Engländern häufig bearbeitet, immer nach der Methode der Alten, und werden mit zu dem Elementar-Unterrichte gezogen. Auch die analytischen Untersuchungen der Engländer haben eine alt-geometrische Gestalt.

Newtons drey Schriften, geometrisch-analytischen Inhalts, sind in dem Artikel, Differentialrechnung, Th. I. S. 831. ff. angezeigt. In der größern derselben, der Methodus fluxionum et serierum infinitarum, sind sehr viele wichtige geometrische Untersuchungen enthalten. Der Abstand gegen die besten ältern Schriften ist sehr groß. Man muß sich wundern, daß ein solches Werk bis 1736 ungedruckt geblieben ist, wenn nicht die Besitzer des Manuscripts einen solchen Schatz geheim zu halten gesucht haben. Zu jenen drey Schriften ist hier noch die Enumeratio linearum tertii ordinis zu setzen. Es war ein ganz neuer Gedanke, die sehr beträchtliche Anzahl dieser Curven in Classen zu bringen, und ihre Verschiedenheiten anzugeben. Newton brachte nach seiner Eintheilungsart zwey und siebzig Species heraus. Sein

Commentator über dieſe Materie, Stirling, fügte noch zwey von Newton aus der Acht gelaſſene hinzu, im J. 1717, und Gua noch vier, die auch Stirling überſehen hatte. Der letztere ſuchte den Weg zu entdecken, auf welchem Newton zu ſeinen Reſultaten gelangt ſeyn möchte. Er machte ſeine Bemerkungen bekannt in einer Schrift: Uſage de l'analyſe de Descartes pour découvrir, ſans le calcul differentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres, 1740.

Nach dem Beyſpiele, das Newton gegeben hatte, fuhr man fort, die Theorie der krummen Linien vollſtändiger und zuſammenhängender zu machen. Bragelogne, Mitglied der franzöſiſchen Akademie, wählte die Linien der vierten Ordnung zu einem beſondern Gegenſtande ſeiner Unſuchung. In den Abhandlungen der Akademie von 1730 und 1731 theilte er die Vorbereitungen dazu mit; in der Geſchichte für das J. 1732 wird auch ein Abriß von ſeiner Methode zur Aufzählung der Linien der vierten Ordnung gegeben; aber er verſtarb vor Beendigung des mühſamen Unternehmens. Euler widmete den 2ten Theil ſeiner Einleitung in die Analyſis des Unendlichen (1748) der Lehre von den krummen Linien, theils in Allgemeinen, theils insbeſondere denen von der zweyten und dritten Ordnung. Von den Linien der vierten Ordnung war es hinlänglich eine allgemeine Claſſification zu machen. Dazu fügte er einiges von den transſcendenten Linien und von den Oberflächen der Körper. In dieſem Werke wird die trigonometriſche Rechnungsmethode oft angewandt. Es iſt ſehr lichtvoll und belehrend. Ein anderes, noch ausführlicheres Werk über die krummen Linien iſt das von Cramer. Introduction à l'Analyſe des lignes courbes algébriques. 1750, 640 pag. 4to. Es iſt deutlich und methodiſch geſchrieben, ohne Zuziehung der Analyſis des Unendlichen und der trigonometriſchen Rechnung. In gedrängter Kürze iſt abgefaßt Traité des courbes algébriques par Dionis de Séjour et Godin, Paris 1756. Von dem erſtern Verfaſſer iſt noch ein beſonderes Werk: Traité des propriétés communes à toutes les courbes. Paris 1778.

Newton hatte am Ende seiner Abhandlung über die Linien der dritten Ordnung kurz angezeigt, wie Curven durch stetige Bewegung eines Punctes, vermittelst der Durchschnitte der Schenkel zweyer gegebenen, um ihre fixen Scheitelpuncte beweglichen Winkel beschrieben werden können, indem die andern Schenkel eine gegebene Linie mit ihrem Durchschnittspuncte durchlaufen. Maclaurin (geb. 1698. gest. 1746.) bewies nicht allein Newtons Sätze, sondern erweiterte noch das ganze Verfahren, und fügte mehrere merkwürdige Sätze hinzu, in der Schrift: Geometria organica, seu descriptio linearum curvarum universalis, Londini 1720. Man behauptet, daß er schon in seinem sechszehnten Jahre viele von den in diesem Buche enthaltenen Sätzen gefunden habe. Eine andere Art der Beschreibung krummer Linien gab Braikenridge an in der Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, Londini 1733. Er gebraucht die Durchschnitte dreyer, um fixe Puncte bewegliche Linien. Eine ähnliche Beschreibung der Kegelschnitte lehrte schon Joh. de Witt in den Elementis curvarum linearum, 1683, in van Schooten Ausgabe der Geometrie von Descartes.

Das Hauptwerk von Maclaurin, sein Treatise of Fluxions, Edinburgh, 1742, 2 vol. 4to. 754 pag. enthält größtentheils geometrische Untersuchungen, sowohl reine als angewandte. Wenn man des Verfassers zu umständliche Beweise der Infinitesimalrechnung nicht gebraucht, und mit dieser schon gut bekannt ist, so wird man unter den neuern Schriften schwerlich eine finden, die zur Übung in der feinern Geometrie dienlicher wäre, als dieses Werk, welches desto mehr zu diesem Zwecke zu empfehlen ist, je weniger man in den Schriften der neuesten Mathematiker Gelegenheit findet, in der construirenden Geometrie Fortschritte zu thun. Bossut empfiehlt in seiner Geschichte der Mathematik dieses Werk gar sehr, und führt an, daß mehrere französische Mathematiker, die in der Folge berühmt geworden sind, es als Anleitung zu der neuen Geometrie benutzt haben. Bey der Algebra,

Methode der Alten dieſe ſchwerlich höher zu treiben ſ
möchte, als es von den Griechen geſchehen war. D
Araber Alhazen verdient aber vieles Lob wegen der A
löſung der geometriſch-optiſchen Aufgabe, an einem ſph
riſchen Spiegel, wenn die Stelle des Objects und des A
ges gegeben iſt, den Zurückwerfungspunct zu finden. Vi
licht gehört die Auflöſung aber einem Griechen. S
Werk über die Optik iſt ſehr dunkel, verworren und we
ſchweifig.

Die Araber haben um die Trigonometrie das V
dienſt, daß ſie anſtatt der von den Alten gebrauchten Ch
den die Sinus einführten.

Als in Europa die Liebe zu den Wiſſenſchaften w
der erwachte, und durch die damahls erfundene Bu
druckerkunſt unterſtützt ward, war man eifrig bemü
auch geometriſche Werke der Alten durch Überſetzungen
Umlauf zu bringen. Commandinus (geb. 1509. zu U
bino) verdient hier eine ehrenvolle Erwähnung. Dieſ
gab zum Anfang hinlänglich Beſchäftigung. Doch u
ternahmen einige ſehr arbeitſame Männer in Deutſchla
ſchon im 15ten Jahrhundert, noch mehr im 16ten, d
Berechnung ſehr genauer und vollſtändiger trigonomet
ſcher Tafeln. Die Verdienſte des Purbach, Regiomo
tanus, Rhäticus, Otho, ſind in dem Artikel, Cyklotechn
Th. I. S. 667. ff. gerühmt. Die Arbeit erforderte gr
Kenntniß der Trigonometrie oder Goniometrie, aus w
cher manche wichtige Sätze in des Rhäticus Werk de f
brica canonis doctrinae triangulorum vorkommen.

Der Abbate Maurolycus aus Meſſina (ge
1575.) war nicht allein ein gelehrter Herausgeber einig
alten geometriſchen Werke, ſondern auch der erſte Mat
matiker ſeiner Zeit. Er wagte ſich an die Wiederherſt
lung des fünften Buchs des Apollonius, welches von d
Größten und Kleinſten an den Kegelſchnitten hande
Borellus hat dieſen Verſuch aus den nachgelaſſenen P
pieren des Maurolycus zu Meſſina 1654 herausgegeb
Montucla rühmt ſehr die Methode, nach welcher Ma

geriethen dabey in einen Wettſtreit, der in Bitterkeit ausartete. Jakob Bernoulli gab die Kettenlinie auf, zuerſt für eine gleichförmig ſchwere Linie, und dann für eine ungleichförmig ſchwere. Er fand die Gleichung für die elaſtiſche, durch ein Gewicht gebogene Linie, die zugleich diejenige iſt, nach welcher ein mit einem flüſſigen ſchweren Körper beſchwertes, undurchdringliches Tuch ſich krümmt (lintearia); auch fand er die Geſtalt eines vom Winde geſpannten Segels (velaria).

Joh. Bernoulli gab im J. 1696 die berühmte Aufgabe von der Linie des ſchnellſten Falles (brachyſtochrona) auf. Seiner Auflöſung fügte er eine andere Aufgabe bey, die krumme Linie zu finden, welche auf einer ſtetigen Folge von Cykloiden, die in denſelben lothrechten Ebenen, durch denſelben Anfangspunct einer gemeinſchaftlichen Grundlinie gezogen ſind, Bogen abſchneidet, die alle von dem Anfangspuncte an in einerley Zeit durchlaufen werden. Dieſe Linie nannte er die Synchrona, die Linie der übereinſtimmigen Fallzeiten. Eine für die praktiſche Anwendung brauchbare Curve ward von l'Hospital beſtimmt, diejenige, auf welcher ein Gewicht mit einer Zugbrücke, vermittelſt einer Kette, in jeder Lage derſelben im Gleichgewicht iſt. Joh. Bernoulli zeigte, daß ſie eine Epicykloide iſt.

Die Theorie der Brennlinien, wovon Hugens und Tſchirnhauſen zuerſt die Entſtehung bemerkt hatten, ward von den beiden Bernoulli ausführlich unterſucht. Man wird etwa noch die Form der Reſultate etwas bequemer einrichten können.

Die Rectification der Epicykloiden, welche durch einen Punct auf dem Umfange des rollenden Kreiſes beſchrieben werden, fand Newton. Die beiden Bernoulli wandten die neue Analyſis darauf an. De la Hire behandelte ſie nach der Methode der alten Geometrie, aber auf eine zu mühſame und verwickelte Art.

Jakob Bernoulli bemerkte, daß die logarithmiſche Spirale auf mancherley Art durch ſich ſelbſt erzeugt wird, daher er ſie ſpira mirabilis nannte.

Leibnitz und Joh. Bernoulli geriethen auf die Aufgaben von den rechtwinklichten Trajectorien, das ist Curven, die eine stetige Folge von Curven gleicher Art, die nach einem gewissen Gesetze beschrieben sind, alle unter einem rechten Winkel schneidet. In dem Streite wegen der Erfindung der Differentialrechnung ward eine Aufgabe dieser Art von Leibnitz und Bernoulli gebraucht, um die englischen Geometer ihre Kräfte daran versuchen zu lassen. Nicolaus Bernoulli legte im J. 1720 eine Aufgabe verwandter Art vor. Zwey parallele Axen sind gegeben; in dem Raume zwischen ihnen über jeder derselben eine Curve zu beschreiben, so daß wenn eine derselben, oder auch beide auf ihrer Axe mit paralleler Bewegung fortgeschoben werden, sie sich immer unter demselben Winkel schneiden. Dieses ist die Aufgabe von den Trajectoriis reciprocis. Euler hat sich viel mit den Trajectorien beiderley Art beschäftigt.

Das berühmteste Problem war das isoperimetrische, welches Jakob Bernoulli den Geometern seiner Zeit, und namentlich seinem Bruder, vorlegte. Er war darauf durch die Aufgabe von der Curve der kürzesten Fallzeit geleitet, die mit jener zu einer Classe gehört. Er trug sie zuerst (1697) folgendergestalt vor; Unter allen Curven von gleicher Länge, über derselben Grundlinie, diejenige zu finden, welche zwar nicht selbst mit dieser den möglich größten Raum einschließt, durch welche aber dieses für eine andere Curve über derselben Grundlinie erhalten wird, an welcher die Ordinaten zu den Ordinaten oder Bogen jener Curve irgend ein vielfaches oder umgekehrt vielfaches Verhältniß haben. Allgemeiner trug er sie in einer akademischen Dissertation 1701. vor. Die Untersuchung dieser Frage beförderte den Bruch zwischen den beiden Brüdern. Joh. Bernoulli hatte sich wirklich bey der Auflösung geirrt, da er die Methode, welche er bey der Frage von der Curve der kürzesten Fallzeit gebraucht hatte, auch hier ohne die nöthige Erweiterung anwenden wollte. Jener Fall war einfacher, da keine Bedingung wegen der Beschaffenheit der Curve gemacht wird, hier aber die Curve, an

welcher eine Function ihrer Ordinaten ein Größtes ist, mit den andern, an welchen diese Function kleinere Werthe erhält, gleiche Länge haben soll. Da Jakob Bernoulli seinem Bruder anzeigte, daß seine Methode mangelhaft sey, gestand dieser zwar ein, daß er sich in einem Stücke übereilt hätte, und gab eine andere Auflösung, die aber in der That noch von eben der Seite, wie die erste, unvollkommen war. Auf die wiederholte Erinnerung seines Bruders blieb er bey seiner Behauptung nicht gefehlt zu haben, und bey dem stolzen Ton, den er gegen jenen seit einiger Zeit angenommen hatte. Als aber dieser im J. 1701 seine Methode bekannt machte, schwieg er gänzlich von der Untersuchung. Erst im J. 1718, als er eine neue Auflösung bekannt machte, gestand er sein Versehen ein.

Euler behandelte in der Folge die Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art, so daß anstatt der gleichen Länge der Bogen auch irgend eine andere gemeinschaftliche Eigenschaft der Curven gesetzt werden mag. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannae 1744. 4. Nach Euler erweiterte la Grange die Aufgabe noch mehr, so daß sie nicht auf geometrische Größen eingeschränkt blieb, dabey sehr schwere Untersuchungen befaßte, und auch in der Methode gewann. Seit dieser Zeit heißt diese Rechnung die Variations-Rechnung.

Cotes (gest. 1716) wandte die trigonometrische und logarithmische Rechnung auf die Integrationen an, da er zeigte, wie die Fluenten oder Integrale mittelst der in den trigonometrischen oder logarithmischen Tafeln berechneten Größen gefunden werden können, so daß Integrale, die von der Quadratur des Kreises oder der Hyperbel (den Logarithmen) abhangen, kaum mehr für transscendente Größen zu halten sind. Cotes entdeckte eine merkwürdige Eigenschaft des Kreises, betreffend die Linien, welche aus einem Punkte innerhalb oder außerhalb desselben an die Endpuncte gleich großer Bogen gezogen werden. Moivre erweiterte den Cotesischen Lehrsatz von einer zweytheiligen Function auf eine dreytheilige. Der Satz giebt der analytischen Entwickelung der Functionen $x^n \pm a^n$, und

$r^{2n} - 2a^n r^n \cos a + a^{2n}$ eine schöne Erläuterung, s. Cotesischer Lehrsatz.

Noch manche einzelne neue geometrische Sätze und Aufgaben könnten hier angeführt werden. Dergleichen ist die von Jakob Bernoulli vorgelegte, zwischen zwey gegebenen Puncten auf einem Konoid oder Sphäroid die kürzeste Linie zu ziehen. Joh. Bernoulli fand, daß auf einer Parabel zwey Bogen in einem gegebenen Verhältnisse sich bestimmen lassen, daher sich auch zwey Bogen finden lassen, deren Summe oder Unterschied einer geraden Linie gleich ist, nur nicht mit einem gemeinschaftlichen Endpuncte. Der Marchese Fagnano hat nachher eben dieses an der Ellipse und Hyperbel bewerkstelligt. Joh. Bernoulli gab eine allgemeine Methode an, auf einer sphärischen Oberfläche rectifizible Curven zu ziehen. Nicole bestimmte auch die Fälle, da sphärische Epicykloiden algebraisch und rectificabel sind.

Die Darstellung oder Symbolization eines Kreisbogens durch unmögliche Logarithmen ist von Joh. Bernoulli zuerst angegeben, der daraus eine allgemeine Formel für die Tangente des vielfachen Bogens durch diejenige des einfachen fand.

Die formulare Trigonometrie, welche sowohl bey geometrischen Untersuchungen als vorzüglich in der Astronomie so große Dienste leistet, hat ihre geschmeidige Einrichtung hauptsächlich durch Euler erhalten. Die Gestalt, welche die trigonometrischen und goniometrischen Sätze bey den ältern Mathematikern hatten, waren zur Verbindung der Rechnung mit der Geometrie nicht bequem. Friedr. Christ. Mayer, Mitglied der Petersburger Akademie, stellte in den Commentarien derselben im zweyten Bande für 1727 theils für die Zusammensetzungen der Winkel mittelst ihrer Sinus, Cosinus und Tangenten, theils für geradlinichte und sphärische Dreyecke Formeln auf, an welchen nur das noch unbequem ist, daß die trigonometrischen Linien durch einzelne Buchstaben bezeichnet werden, welches theils ihre Combinationen erschwert, theils den Gebrauch dieser Buchstaben für andere Größen hindert.

Die cyklometrischen Reihen wurden von Euler auf eine ungemein mannigfaltige Art zerlegt, verbunden, und mit andern Reihen verglichen, sowohl in seiner Einleitung zur Analysis des Unendlichen als in dem zweyten Theile der Differentialrechnung. Um alle diese mancherley Formen gehörig zu fassen, muß man die Capitel, die davon handeln, besonders und aufmerksam durchgehen.

Zuletzt ist noch die für die Anwendung bey Gewölben brauchbare Lehre von den Durchschnitten der Oberflächen der Körper anzuführen. Die französischen Geometer haben sich vorzüglich mit dieser Untersuchung beschäftigt. Die praktischen Schriftsteller über die Behauung der Steine (coupe des pierres), als Derand, Jousse, Frezier waren dazu genöthigt. Der letztere hat darüber ein Werk in drey starken Quartbänden geliefert, worin alles durch Hülfe der gewöhnlichen Geometrie gefunden wird, allein auf eine sehr mühsame Art. Gegenwärtig ist man in Frankreich eifrig damit beschäftigt, die Theorie von den Durchschnitten und Projectionen der Oberflächen der Körper, den doppelt gekrümmten Linien, und geradlinicht-krummen Flächen zu erweitern. Man nennt sie Géométrie descriptive. Monge hat diesen neuen Anbau der Geometrie sehr glücklich angefangen. Er hat einige neue merkwürdige Lehrsätze gefunden, und verschiedene wichtige schwere Aufgaben aufgelöset. Lacroix hat darüber ein elementarisches Werk geliefert, welches wegen der Deutlichkeit und geschickten Auseinandersetzungen gerühmt wird. Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes: (Elémens de Géométrie descriptive). Seconde édition à Paris An X. 1802. 8.

Geometrisch, was zur Geometrie gehört, oder darauf irgend eine Beziehung hat.

Geometrische Auflösung ist diejenige, wobey man bloß die geometrischen Größen unmittelbar gebraucht, also das gesuchte, und was dazu vorher gefunden werden muß, bloß durch Durchschnitte und Begränzungen von li-

nien und Flächen bestimmt. Sie ist der arithmetischen und analytischen entgegengesetzt.

Geometrischer Beweis verhält sich auf ähnliche Art.

Geometrische Construction der Gleichungen ist die Auflösung derselben vermittelst der Durchschnitte von Linien, woraus die Wurzeln einer Gleichung sich unmittelbar alle zusammen ergeben, so viele mögliche als sie hat, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Geometrische Fläche und Curve sind solche, worin alle Puncte nach einem gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt werden, im Gegensatz gegen solche, wobey kein Gesetz der Bildung sich findet.

Geometrische Methode der Alten, s. Geometrie.

Geometrisches Mittel ist das mittlere Glied in einer stetigen Proportion von drey Größen, s. Proportion.

Geometrischer Ort ist eine Linie oder Fläche, deren Puncte alle zur Auflösung einer unbestimmten Aufgabe dienen, s. Ort.

Geometrische Progression oder Reihe, s. den folgenden Artikel.

Geometrische Proportion und Proportionalzahl, s. an ihrem Orte.

Geometrisches Quadrat ein Instrument zur Messung der Höhen, welches gegenwärtig nicht mehr üblich ist.

Geometrischer Riß (Entwerfung) ist eine nach geometrischen Regeln verfertigte Abbildung eines Gegenstandes, z. B. eines Hauses, eines Feldes, im Gegensatz gegen die nach dem Augenmaße durch freye, mahlerische Zeichnung gemachte. S. Projection und Perspectiv.

Geometrischer Schritt wird, ohne Grund, eine Länge von fünf Fußen genannt.

Geometrisches Verhältniß, s. Proportion.

Geometrische Reihe ist eine Folge von Grössen, deren jede zu der nächstfolgenden dasselbe geometrische Verhältniß hat, wie die Reihe,

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc.}$$

oder allgemein,

$$\frac{a^4}{b^5} : \frac{a^3}{b^4} : \frac{a^2}{b^3} : \frac{a}{b^2} : \frac{1}{b} : \frac{b}{a^2} : \frac{b^2}{a^3} : \frac{b^3}{a^4} : \text{etc.}$$

1. Die Bezeichnung des Gesetzes der Reihe geschieht am bequemsten und deutlichsten, wie es hier geschehen ist, durch das Zeichen des geometrischen Verhältnisses. Man setzt auch der Reihe das Zeichen $\therefore$ vor, und zwischen jedes Paar Glieder einen Punct, wie

$$\therefore 1. 3. 9. 27. 81. 243. \text{ etc.}$$

2. Eine geometrische Reihe geht von irgend einem Gliede nach beiden Seiten hin ohne Ende fort, auf der einen Seite unbegränzt zunehmend, auf der andern eben so abnehmend. Ein Stück einer Reihe ist eine steigende (wachsende) Reihe, wenn die folgenden Glieder wachsen, eine fallende (abnehmende), wenn sie abnehmen.

3. Der Exponent des Verhältnisses zweyer nächsten Glieder sey $= e$, das Anfangsglied eines Stücks der Reihe $= a$, so ist von diesem angenommen, die Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a \ldots e^{n-1}a : e^n a : \text{etc.}$$

Dieses Stück hat $n + 1$ Glieder. Das $n$te Glied sey $= u$, so ist

$$u = e^{n-1}a.$$

4. Die Summe von n Gliedern sey $= S$. Diese zu finden, multiplicire man die Glieder der Reihe,

$$a : ea : e^2a \ldots e^{n-2}a : e^{n-1}a,$$

durch e, so wird sie

$$ea : e^2a \ldots e^{n-1}a : e^n a.$$

Es ist also

$$eS = S + e^n a - a,$$

folglich in dem Falle, da $a > u$,

$$S = \frac{e^n a - a}{e - 1} = \frac{eu - a}{e - 1};$$

und, wenn $e < 1$ ist,

$$S = \frac{a - eu}{1 - e}.$$

Die Formel für den ersten Fall dient auch für den zweyten, indem man von den negativen Werthen des Zählers und Nenners die entgegengesetzte nimmt.

5. Die Reihe sey eine fallende, so ist die Gränze, welcher ihre Summe sich immer mehr nähert, je mehr Glieder genommen werden, die Summe der ganzen, ohne Ende fortgesetzten Reihe. Die Gränze der Summe zu erhalten, muß das letzte Glied $= 0$ gesetzt werden, und so ist die Summe der vollständigen Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a : \text{etc.} = \frac{a}{1 - e}.$$

Z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{etc.} = 2$;

die Summe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \text{etc.} = \frac{3}{2}$.

6. Wie bey der arithmetischen Reihe sind hier fünf verschiedene Größen vorhanden, von welchen je zwey durch die übrigen drey bestimmt werden. Dieses giebt zehn Fälle für die gegebenen Größen, also zehn Aufgaben, deren jede wieder zwey in sich enthält, nachdem die eine oder die andere der unbekannten Größen gefunden werden soll. Die vier, a, u, e, S, werden, mit Ausnahme zweyer Fälle, durch arithmetische Operationen gefunden, die Erhebung auf Potenzen und Ausziehung jeder Wurzel als ausführbar angenommen. Aber die Anzahl n der Glieder zu finden, erfordert aus Potenz und Wurzel den Grad der Potenz zu finden, welches so viel ist, als in einem logarithmischen System aus der Zahl ihren Logarithmen angeben. Daher muß man, wenn n verlangt wird, die Logarithmen zu Hülfe nehmen.

Geometrische Reihe ist eine Folge von Größen, deren jede zu der nächstfolgenden dasselbe geometrische Verhältniß hat, wie die Reihe,

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc.}$$

oder allgemein,

$$\frac{a^4}{b^5} : \frac{a^3}{b^4} : \frac{a^2}{b^3} : a : b : \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2} : \frac{b^4}{a^3} : \text{etc.}$$

1. Die Bezeichnung des Gesetzes der Reihe geschieht am bequemsten und deutlichsten, wie es hier geschehen ist, durch das Zeichen des geometrischen Verhältnisses. Man setzt auch der Reihe das Zeichen $\therefore$ vor, und zwischen jedes Paar Glieder einen Punct, wie

$$\therefore 1. 3. 9. 27. 81. 243. \text{ etc.}$$

2. Eine geometrische Reihe geht von irgend einem Gliede nach beiden Seiten hin ohne Ende fort, auf der einen Seite unbegränzt zunehmend, auf der andern eben so abnehmend. Ein Stück einer Reihe ist eine steigende (wachsende) Reihe, wenn die folgenden Glieder wachsen, eine fallende (abnehmende), wenn sie abnehmen.

3. Der Exponent des Verhältnisses zweyer nächsten Glieder sey $= e$, das Anfangsglied eines Stücks der Reihe $= a$, so ist von diesem angenommen, die Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a \ldots e^{n-1}a : e^n a : \text{etc.}$$

Dieses Stück hat $n + 1$ Glieder. Das $n$te Glied sey $= u$, so ist

$$u = e^{n-1}a.$$

4. Die Summe von n Gliedern sey $= S$. Diese zu finden, multiplicire man die Glieder der Reihe,

$$a : ea : e^2a \ldots e^{n-2}a : e^{n-1}a,$$

durch e, so wird sie

$$ea : e^2a \ldots e^{n-1}a : e^n a.$$

Es ist also

$$eS = S + e^n a - a,$$

die Maclaurin zum Verfaſſer hat, befindet ſich eine kurze, aber ſehr reichhaltige Abhandlung über die allgemeinen Eigenſchaften der geometriſchen Linien.

Das erſte Werk über die krummen Linien von doppelter Krümmung lieferte Clairaut. Recherches ſur les courbes à double courbure, à Paris 1731. 4to. 119 pag. Er verfaßte dieſe Schrift in einem Alter von ſechszehn Jahren, wie der Cenſor und der Secretär der Akademie bezeugen. Er druckt die Natur dieſer Curven durch Gleichungen zwiſchen drey Coordinaten aus. Euler hat in ſeiner Theorie des Mondes, dem zweyten Werke, die Bahn dieſes Trabanten auf ſolche Art beſtimmt. Die Bahnen der Weltkörper ſind alle transſcendente Curven von doppelter Krümmung, die nicht in ſich zurücklaufen, daher die Aſtronomie zugleich der ſchwerſte Theil der Geometrie iſt.

Die neue Analyſis gab in Verbindung mit der reinen Mechanik zu manchen ſchweren geometriſchen Aufgaben Anlaß. Das ganze Werk der Principien der Naturwiſſenſchaft von Newton iſt voll von geometriſchen Beſtimmungen mancherley Bewegungen: es enthält auch rein geometriſche Unterſuchungen, als aus der Lehre von den Kegelſchnitten, von Epicykloiden, Spiralen u. m. Hier kommt zuerſt die Bahn eines geworfenen Körpers in einem widerſtehenden Mittel vor, freilich nur noch mit der leichteſten Annahme des Widerſtandes; auch zuerſt die Aufgabe von der Figur eines Körpers, die den Widerſtand eines flüſſigen Mittels am geringſten macht, aber nur als Vorbereitung zu einer beſtimmtern Auflöſung.

Leibnitz legte, um die Vortrefflichkeit ſeiner neuen Rechnung des Unendlichen zu zeigen, die Aufgaben von der Iſochrona und der iſochrona paracentrica vor. Auf jener fällt ein ſchwerer Körper nach ſenkrechter relativer Bewegung gleichförmig; auf dieſer nähert er ſich einem gegebenen Puncte gleichförmig, und entfernt ſich ſo von demſelben.

In gleicher Abſicht legten die beiden Bernoulli Aufgaben von ſchwer zu findenden krummen Linien vor, und

welcher eine Function ihrer Ordinaten ein Größtes ist, mit den andern, an welchen diese Function kleinere Werthe erhält, gleiche Länge haben soll. Da Jakob Bernoulli seinem Bruder anzeigte, daß seine Methode mangelhaft sey, gestand dieser zwar ein, daß er sich in einem Stücke übereilt hätte, und gab eine andere Auflösung, die aber in der That noch von eben der Seite, wie die erste, unvollkommen war. Auf die wiederholte Erinnerung seines Bruders blieb er bey seiner Behauptung nicht gefehlt zu haben, und bey dem stolzen Ton, den er gegen jenen seit einiger Zeit angenommen hatte. Als aber dieser im J. 1701 seine Methode bekannt machte, schwieg er gänzlich von der Untersuchung. Erst im J. 1718, als er eine neue Auflösung bekannt machte, gestand er sein Versehen ein.

Euler behandelte in der Folge die Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art, so daß anstatt der gleichen Länge der Bogen auch irgend eine andere gemeinschaftliche Eigenschaft der Curven gesetzt werden mag. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannae 1744. 4. Nach Euler erweiterte la Grange die Aufgabe noch mehr, so daß sie nicht auf geometrische Größen eingeschränkt blieb, dabey sehr schwere Untersuchungen befaßte, und auch in der Methode gewann. Seit dieser Zeit heißt diese Rechnung die Variations-Rechnung.

Cotes (gest. 1716) wandte die trigonometrische und logarithmische Rechnung auf die Integrationen an, da er zeigte, wie die Fluenten oder Integrale mittelst der in den trigonometrischen oder logarithmischen Tafeln berechneten Größen gefunden werden können, so daß Integrale, die von der Quadratur des Kreises oder der Hyperbel (den Logarithmen) abhangen, kaum mehr für transscendente Größen zu halten sind. Cotes entdeckte eine merkwürdige Eigenschaft des Kreises, betreffend die Linien, welche aus einem Punkte innerhalb oder außerhalb desselben an die Endpuncte gleich großer Bogen gezogen werden. Moivre erweiterte den Cotesischen Lehrsatz von einer zweytheiligen Function auf eine dreytheilige. Der Satz giebt der analytischen Entwickelung der Functionen $x^n \pm a^n$, und

machen eine geometrische Progres-

nt ist $\frac{r+1}{r}$; das ist, $\frac{21}{20}$ bey 5 P. C;

jemand in eine Ersparungscasse
a, wie hoch wachsen die Einlagen

wegen $\frac{r+1}{r} = q$, so ist seine

von $q^n a + q^{n-1} a \ldots + q^2 a$
lage mit Anfang jedes Jahrs ge-
etenz nach Verlauf von n Jahren

Summe ist $= \frac{q^n - 1}{q - 1} qa =$

$+ 1) a$.

age sey $= 1$; der Zinsfuß 4 P. C.

ihl $n = 10$, so ist $\left(\frac{r+1}{r}\right)^{10} =$

Competenz nach 10 Jahren ist
Jahren ist sie 0,96912.

rleihet jemand ein Capital a mit der
Empfänger ihm jedes Jahr mit Ein-
Zinsen die Summe b zahle, so daß
abgetragen werde, wie viel ist nach
apital noch rückständig?

als Creditoren und Debitoren be-
hat nach n Jahren das Capital

rdern. Der andere hat seit $n - 1$
edes Jahrs b gezahlt, und dazu am
rs eben so viel. Jene Zahlun-
ahren werth $\left[\left(\frac{r+1}{r}\right)^{n-1} - 1\right]$

$\frac{-s}{m}$
mnte und e a ist das (r — mn) te nach diesem Gliede.

12. Jede gegebene Zahl findet in einer geometrischen Reihe entweder unmittelbar ihren Platz, oder in einer interpolirten, oder zwischen zwey Gliedern einer interpolirten, die man ihr so nahe bringen kann, daß der Unterschied kleiner als jede angebbare Größe ist. Nimmt man die Anzahl der zwischen je zwey Gliedern eingeschalteten Glieder unendlich groß, so ist jede Zahl, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, in einer geometrischen Reihe anzutreffen. Die Fortschreitung der Glieder ist nun eine stetige, und jede Reihe mit einem endlichen Exponenten ist eine aus der stetigen Reihe herausgehobene, indem zwischen jedem Paare jener Reihe eine gleich große Anzahl Glieder aus dieser ausgelassen sind. So wird man begreifen, wie in einem logarithmischen System jede Zahl ihren Logarithmen, den Exponenten von e, und jeder Logarithme seine zugehörige Zahl habe. In dem Artikel, Logarithmotechnie, wird gewiesen, wie für

$\frac{r}{m}$ $\frac{n}{r}$
jede Zahl e a der Exponent — bequem gefunden werden könne.
m

13. Exempel. I. die Zinsen eines Capitals werden jährlich zu demselben geschlagen, es ist die Frage, wie groß es mit diesen nach n Jahren wird?

Das Capital, dessen Zinse = 1 ist, sey = r, (z. B. 20 bey 5 P. C. oder 25 bey 4 P. C.), so ist nach Verlauf des ersten Jahrs die Summe von Capital und Zinsen $= \frac{r+1}{r}$ a, nach 2 Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^2$ a, also nach 3 Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^3$ a, also nach n Jahren $= \left(\frac{r+1}{r}\right)^n$ a.

Diese Summen machen eine geometrische Progression aus, deren Exponent ist $\frac{r+1}{r}$; das ist, $\frac{21}{20}$ bey 5 P. C; $\frac{25}{24}$ bey 4 P. C.

14. II. Es legt jemand in eine Ersparungscasse jedes Jahr die Summe a, wie hoch wachsen die Einlagen in n Jahren an?

Es sey der Kürze wegen $\frac{r+1}{r} = q$, so ist seine Competenz die Summe von $q^n a + q^{n-1} a \ldots + q^2 a + q a$, wenn die Einlage mit Anfang jedes Jahrs geschieht, und die Competenz nach Verlauf von n Jahren berechnet wird. Diese Summe ist $= \frac{q^n - 1}{q - 1} q a = \left(\left(\frac{r+1}{r}\right)^n - 1\right)(r+1)a$.

Z. B. Die Einlage sey $= 1$; der Zinsfuß 4 P. C. also $r = 25$. Die Zahl $n = 10$, so ist $\left(\frac{r+1}{r}\right)^{10} = 1{,}48024$, und die Competenz nach 10 Jahren ist 12,48624. Nach 20 Jahren ist sie 30,96912.

15. III. Es verleihet jemand ein Capital a mit der Bedingung, daß der Empfänger ihm jedes Jahr mit Einschluß der schuldigen Zinsen die Summe b zahle, so daß das Capital allmählig abgetragen werde, wie viel ist nach n Jahren von dem Capital noch rückständig?

Man kann beide als Creditoren und Debitoren betrachten. Der eine hat nach n Jahren das Capital $\left(\frac{r+1}{r}\right)^n a$ zu fordern. Der andere hat seit $n-1$ Jahren mit Anfang jedes Jahrs b gezahlt, und dazu am Ende des nten Jahrs eben so viel. Jene Zahlungen sind nach n Jahren werth $\left[\left(\frac{r+1}{r}\right)^{n-1} - 1\right]$

$(r+1)b$, oder $\left(\frac{r+1}{r}\right)^n rb - (r+1)b$. Dazu die letzte Zahlung selbst genommen, ist seine Forderung werth $\left(\left(\frac{r+1}{r}\right)^n - 1\right) rb$. Er ist also, wenn diese Summe weniger als jene beträgt, noch schuldig

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^n (a - rb) + rb.$$

oder $$rb - \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a).$$

16. Sollte man wegen der zusammengesetzten Zinsen, wenn sie gleich auf beiden Seiten angerechnet werden, Schwierigkeit finden, so stelle man die Berechnung folgendergestalt an. Der Verleiher heiße A, der Empfänger B. Der erstere hat nach Verlauf des ersten Jahrs zu fordern $\frac{r+1}{r}$ a oder qa, erhält die Summe b, hat also nun zu fordern $qa - b$. Aus dieser Forderung wird am Ende des zweyten Jahrs $q^2a - qb$, wovon durch die Bezahlung von b bleibt $q^2a - qb - b$. Am Ende des dritten Jahrs hat A zu fordern $q^3a - q^2b - qb$, und da b abbezahlt wird, bleibt $q^3a - q^2b - qb - b$. So wird mit jedem Jahre der Rest am Ende des vorhergehenden Jahrs mit q multiplicirt, und dann b abgezogen, dadurch wird nach n Jahren der Rest =

$$q^na - q^{n-1}b - q^{n-2}b \ldots - qb - b.$$

Der subtractive Theil ist die geometrische Reihe, $1 + q + q^2 \ldots q^{n-1}$ in b multiplicirt, das ist $\frac{q^n - 1}{q - 1} b$. Also ist der Rest, den B noch schuldig ist,

$$q^na - \frac{q^n - 1}{q - 1} b, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^n (a - rb) + rb,$$

wie vorher gefunden ist.

Wenn b die Interesse von dem Capital ist, so ist $rb = a$, also bleibt die Schuld des B immer rb oder a, da er nicht mehr bezahlt als was er schuldig ist. Soll die Schuld vermindert werden, so muß b größer seyn als die Interesse a, also rb größer als a. Die Formel für den Rest ist daher

$$rb - \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a).$$

17. Wenn nach n Jahren die Schuld ganz abgetragen seyn soll, so ist

$$rb = \left(\frac{r+1}{r}\right)^n (rb - a),$$

$$\text{und } \frac{a}{b} = r - \left(\frac{r}{r+1}\right)^n r.$$

Z. B. Wenn $r = 25$, und $n = 20$, so ist $1 - \left(\frac{r}{r+1}\right)^n = 0{,}54362$, und $\frac{a}{b} = 13{,}5905$, oder die Kaufsumme, (der baare Werth,) einer Leibrente auf 20 Jahr ist $13\frac{59}{100}$ mahl die Rente. Bey 5 P. C. oder $r = 20$ ist die Kaufsumme $12\frac{46}{100}$ mahl die Rente. Bey 3 P. C. ist der baare Werth $14\frac{88}{100}$ mahl die Rente.

Tabellen, nach diesen Formeln berechnet, sind zu finden in Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, am vollständigsten in Tetens Berechnung der Leibrenten.

18. Exempel. Von einem Weinfasse, das a Maaß enthält, werden jeden Tag b Maaß weggenommen, und eben so viele wieder aufgefüllt, wie viel Maaß sind nach n Tagen von den ersten a Maaß übrig? und wie viel von m Maaß, die in m Tagen aufgefüllt sind, am Ende dieser m Tage?

Wenn an irgend einem Tage der Reſt x bleibt, ſo wird von demſelben $\frac{bx}{a}$ weggenommen, und es iſt alſo für den nächſten Tag der Reſt $\frac{(a-b)x}{a}$. Eben ſo iſt den folgenden Tag der Reſt $\frac{(a-b)^2x}{a^2}$, u. ſ. f. Da am erſten Tage das Ganze a war, ſo iſt nach n Tagen der Reſt $= \left(\frac{a-b}{a}\right)^n a$.

Von den n b Maaß, die in n Tagen aufgefüllt ſind, ſind noch übrig

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^n\right)a.$$

Alſo ſind überhaupt von m Maaß, die in m Tagen aufgegoſſen worden ſind, nach den m Tagen übrig

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^m\right)a.$$

Dieſes läßt ſich auch folgendergeſtalt finden. Von den b Maaß, die an dem erſten dieſer m Tage aufgefüllt ſind, bleiben $\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-1}$ b übrig; von den b Maaß des zweyten Tages $\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-2}$ b; u. ſ. w. Die b Maaß, die an dem mten Tage aufgefüllt werden, ſind an demſelben unvermindert vorhanden. Man hat alſo die geometriſche Progreſſion

$$\left(\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-1}+\left(\frac{a-b}{a}\right)^{m-2}\ldots+\frac{a-b}{a}+1\right)b$$

zu ſummiren. Die Summe iſt $\left(1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^m\right)a$.

19. Von dem Erfinder des Schachspiels wird erzählt, daß derselbe sich von dem Fürsten, dem er es überreicht hatte, als Belohnung auf das erste Feld ein Gersten- oder Weizenkorn, auf das zweyte zwey, auf das dritte vier, u. s. f. in dem Verhältnisse 1 : 2 ausgebeten habe. So gering als der Fürst zuerst diese Belohnung gehalten, so sehr sey er erstaunt, als die Berechnung die ungeheure Menge Körner zeigte. Es ist $1+2+4\ldots+u = \frac{2u-1}{2-1} = 2u-1$. Hier ist u das 64ste Glied der Reihe =

9 223372 036854 775808,

und die Summe von 1 bis u =

18 446744 073709 551615

Dieses ist mehr als 18 Ernten geben würden, wenn die Erdfläche ganz und gar Ackerland wäre. In der französischen Encyklopädie wird berechnet, daß zur Einscheurung dieser Menge 91522 Scheuren erfordert werden, jede ein Quadrat, eine Lieue oder 14400 Fuß im Umfange, worin das Korn 20 Fuß hoch aufgehäuft sey. Der Verfasser rechnet, daß höchstens 450 Körner Weizen auf einen Cubikzoll gehen.

Dieses Exempel dient einen Begriff von der schnellen Zunahme einer geometrischen Reihe, selbst bey einem kleinen Exponenten, zu geben.

Vergleichung zweyer geometrischen Reihen.

20. Man nehme zwey geometrische Reihen,

$a : ea : e^2a \ldots e^ma \ldots e^xa \ldots$

$A : EA : E^2A \ldots E^nA \ldots E^yA \ldots$

und setze, daß $e^ma = E^nA$, auch daß $e^xa = E^yA$ sey. Es ist die Frage, wie die Relation der Exponenten m, n, x, y, und der Exponenten e, E beschaffen sey. Zu dem Ende müssen die Anfangsglieder, a, A weggeschafft werden. Dieses geschieht sogleich durch die Divi-

sion der Theile jener Gleichungen eines durch den andern, welches giebt

$$e^{x-m} = E^{y-n}.$$

Man betrachte E als ein Glied in der geometrischen Reihe, $1 : e : e^2 : e^3$: etc. und setze $E = e^{\alpha:\beta}$, zufolge (12.). Hieraus ist $E^\beta = e^\alpha$. Man erhebe die Theile der Gleichung zwischen e und E auf die Potenz mit dem Exponenten β, so ist

$$e^{\beta(x-m)} = E^{\beta(y-n)}.$$

Nun ist $E^{\beta(y-n)} = \left(E^\beta\right)^{y-n} = \left(e^\alpha\right)^{y-n} = e^{\alpha(y-n)}$ also ist

$$e^{\beta(x-m)} = e^{\alpha(y-n)},$$

folglich $\beta(x-m) = \alpha(y-n)$,

und $x-m : y-n = \alpha : \beta$.

Oder, die Unterschiede der Stellenzahlen derselben zweyer Glieder in beiden Reihen haben ein gegebenes Verhältniß.

21. Man nehme noch in jeder der beiden Reihen ein Glied von derselben Größe, dessen Stelle in der ersten Reihe p, in der zweyten q sey, oder es sey $e^p a = E^q A$, so ist

$$p-m : q-n = \alpha : \beta.$$

Also ist

$$x-m : y-n = p-m : q-n.$$

Daraus

$$x = \frac{p-m}{q-n}(y-n) + m,$$

$$y = \frac{q-n}{p-m}(x-m) + n.$$

22. Wenn $A = a$ ist, so lasse man die beiden sich gleichen Glieder, $e^m a$ und $E^n A$, die Anfangsglieder der beiden Reihen seyn. Dieses giebt $m = 0$; $n = 0$, und es ist $x : y = p : q$, das ist, die Stellenzahlen derselben

zweyer Glieder in beyden Reihen haben ein gegebenes Verhältniß.

Hieraus ersieht man, wie aus der Stelle einer Zahl in einer geometrischen Reihe die Stelle derselben Zahl in jeder andern geometrischen Reihe leicht gefunden wird, das ist, wie aus den Logarithmen in einem System die Logarithmen derselben Zahlen in jedem andern berechnet werden.

23. Exempel. Es sey $a=1$; $e=10$, so ist x der Briggische oder gemeine Logarithme von e^x. In dem Neperischen System ist die Reihe eine fallende, und das Anfangsglied $A=1000\,0000$. Das nächste nach demselben in der Tafel (primum proportionale nennt Neper es) ist 999 9999, wobey in der Tafel zwar als Logarithme 1 steht, allein es ist darum nicht $E=\frac{999\,9999}{1000\,0000}$. Denn Neper sagt ausdrücklich in der Schrift, mirifici Logar. canonis constructio, §. 30, daß der Logarithme (numerus artificialis) von 999 9999 zwischen 1.0000001 und 1.0000000 falle. Wir haben E zu wissen nicht nöthig, da wir nur irgend ein Paar Logarithmen aus dem Neperischen System als gegebene Größen in die Rechnung einführen können.

Man bezeichne einen Briggischen Logarithmen durch 1B; einen Neperischen durch 1N. Nun ist $1B.\,10^7=7$, und $1N.\,10^7=0$, also $m=7$; $n=0$. Die Neperischen Logarithmen sind alle negative Größen. Bezeichnen nun q und y bloß die Quantität, so ist diesen Symbolen das Vorzeichen — zu geben, so daß $-y=\frac{-q}{p-7}(x-7)$ ist. Diese Formel verwandelt sich in folgende,

$$y=\frac{q}{7-p}(7-x).$$

Da Neper den Sinus totus 10 Millionen setzt, so haben wir zu den tabularischen Logarithmen, so fern sie sich auf den Sinus totus als Einheit beziehen, in der Characteristik 7 zu addiren. Man nehme

$p = \log \text{tab. sin } 30° + 7 = 6{,}6989700$

$q = 1\text{N. sin } 30° = 6931469,$

so ist $\frac{q}{7-p} = \frac{6931469}{0{,}3010300} = 23025840,$ und

$1\text{N. sin } \varphi = 23025840\ (7 - 1\text{B. sin } \varphi).$

Man suche nun 1N. sin 60°. Es ist 1B. sin 60°, oder $x = 6{,}9375306$, also

$7 - 1\text{B. sin } 60° = 0{,}0624694$, und

1N. sin 60° = 1438411, wie bey Neper, bis auf die letzte Ziffer, die daselbst o ist.

Gerade Zahl ist eine solche ganze, die sich durch Zwey ohne Rest theilen läßt. Eine doppeltgerade oder geradgerade (numerus pariter par) ist durch Vier ohne Rest theilbar; eine ungeradgerade (impariter par) läßt durch 4 getheilt den Rest 2.

Gerade Linie, s. Linie.

Geradlinichte Figur ist eine solche, die ganz von geraden Linien eingeschlossen ist.

Geschoben wird bisweilen von Parallelogrammen mit schiefen Winkeln gebraucht, s. Rhombus und Rhomboides.

Gesellschaftsrechnung ist die Eintheilung einer Zahl nach gegebenen Verhältnissen. Weil diese Rechnung in denen Fällen gebraucht wird, wo Gewinn oder Verlust, Abgabe oder Einnahme unter mehrere Personen zu vertheilen ist, so hat sie daher von den Rechenmeistern die Benennung erhalten.

Es sind von dieser Rechnung zwey Fälle. In dem ersten machen die Verhältnißzahlen, nach welchen ein gegebenes Ganze getheilt werden soll, zusammen genommen, ein ähnliches Ganze wie jenes aus; in dem zweyten aber nicht.

Ein Beyspiel des ersten Falles ist folgendes. Es sollen 1000 Rthl. auf drey Personen A, B, C, vertheilt werden, so daß die Theile von A und B sich wie 2 : 3 : und die Theile von B und C sich wie 3 : 5 verhalten. Da hier die Verhältnißzahl für B, nämlich 3 sowohl für das eine als das andere Verhältniß dient, so ist das Ganze, 2 + 3 + 5, oder 10, schon auf die verlangte Art eingetheilt. Man hat also nur die Proportion zu machen: das Normalganze, 10, verhält sich zu dem einzutheilenden Ganzen, 1000, wie einer der Theile jenes (z. B. 2.) zu dem gleichnamigen Theile dieses, welcher also 200 Rthl. beträgt.

Allgemein seyn die Verhältnisse, nach welchen ein Normalganzes eingetheilt ist, a : b : c : d : etc. so daß der erste und zweyte Theil sich wie a : b : der zweyte und dritte wie b : c : der dritte und vierte sich wie c : d verhalten, u. s. f. Ein gegebenes Ganze soll auf gleichmäßige Art in die Theile A, B, C, D, E, etc. eingetheilt werden, so ist

a + b + c + d + e + etc. : A + B + C + D + E + etc.
= a : A oder = b : B, oder = c : C; u. s. f.

Dieses beruht auf folgendem Satze aus der Lehre von der Proportion: wenn

A : B = a : b
B : C = b : c
C : D = c : d
D : E = d : e

u. s. f.

so ist die Summe der Glieder, A + B + C + D + etc. zu einem derselben, wie die Summe der Glieder, a + b + c + d + etc. zu dem mit jenem gleichstelligen unter ihnen.

Nicht allein bey Vertheilungen einer Geldsumme auf eine Anzahl Personen, sondern auch bey Mischungen nach gegebenen Verhältnissen wird diese Vorschrift angewandt. Z. B. Es mögen zu einer Sorte Schießpulver

zu nehmen seyn 75 Theile Salpeter, 10 Theile Schwefel und 15 Theile Kohlen, oder in kleinern Zahlen 15; 2; 3 Theile, so sind auf 1000 Pfund zu nehmen $\frac{1000}{20} \times 15$ oder 750 Pfund Salpeter; $\frac{1000}{20} \times 2$ oder 100 Pf. Schwefel, und $\frac{1000}{20} \times 3$ oder 150 Pf. Kohlen.

Der zweyte Fall ist, wenn die Verhältnißzahlen für jeden Theil in Beziehung auf zwey andere Theile nicht dieselben sind, oder wenn kein Normalganzes gegeben wird, dessen Theile zur Bestimmung der Theile eines andern Ganzen dienen. Ein gewisses Ganze sey also zu theilen in die Theile A, B. C, D, E, etc. so daß

$$A : B = a : b \quad ; \quad B : C = \beta : c$$
$$C : D = \gamma : d. \quad ; \quad D : E = \delta : e,$$

u. s. f.

Man hat nun diese Verhältnisse auf die Form, wie in dem ersten Falle zu bringen, so daß das Hinterglied jedes das Vorderglied des nächstfolgenden werde. Dieses geschieht folgendergestalt für vier Verhältnisse,

$$A : B = a\beta\gamma\delta : b\beta\gamma\delta$$
$$B : C = b\beta\gamma\delta : bc\gamma\delta$$
$$C : D = bc\gamma\delta : bcd\delta$$
$$D : E = bcd\delta : bcde.$$

Auf ähnliche Art bey mehrern oder wenigern Verhältnissen. Haben die Verhältnißglieder rechter Hand gemeinschaftliche Theile, so wird man zur Erleichterung der Berechnung sie dadurch zu theilen haben.

Z. B. $a : b = 2 : 3$; $b : c = 5 : 4$; $c : d = 9 : 7$; $d : e = 6 : 5$. Daraus ist $A : B : C : D : E = 540 : 810 : 648 : 504 : 420 = 90 : 135 : 108 : 84 : 70$.

Gesetz einer Reihe ist die Art, wie die Glieder derselben jedes zufolge seiner Stelle zusammengesetzt

werden. Iſt die Reihe nach den Potenzen einer gewiſſen Größe geordnet, ſo iſt zuerſt die Fortſchreitung der Exponenten dieſer Potenzen zu beſtimmen. Sie kann auch nach den Potenzen zweyer Größen geordnet ſeyn, wie in der Potenz eines Binomium, $a+b$, nach den Potenzen von a und b zugleich, wo die Summe der Exponenten in dem Producte beider Potenzen eine beſtimmte Summe ausmacht. Dividirt man mit der höchſten Potenz einer von beiden Größen, und multiplicirt zugleich das Ganze mit derſelben Potenz, ſo erhält man eine Fortſchreitung von Potenzen einer einzelnen Größe.

Die Coefficienten der Potenzen, nach welchen die Reihe geordnet iſt, ſind entweder Functionen ihrer Stelle, oder auf andere Art der Form nach beſtimmt, von welcher letztern die Binomial-Coefficienten ein Beyſpiel geben. Oft iſt das Geſetz ſo verwickelt und zuſammengeſetzt, daß man es nicht zu entdecken vermag.

Geſichtspunct, ſ. Perſpectiv.

Gleich iſt, was in Abſicht der Größe eins für das andere geſetzt werden darf. Die Art der Zuſammenſetzung mag verſchieden oder dieſelbe ſeyn.

Gleichartig (homogen) iſt, was durch dieſelbe Einheit gemeſſen wird, oder gemeſſen werden kann. Alle Linien ſind gleichartige Größen, ſo auch alle Flächen unter ſich, alle Körper, desgleichen Zeiten, beſchleunigende Kräfte, Gewichte. Alle Zahlen mit einer unbeſtimmten Einheit ſind gleichartige Größen. Gleichartige Größen, und keine andere, kann man zu einander ſetzen, und eine von der andern abziehen. Größen, die im Allgemeinen gleichartig ſind, können durch verſchiedene Beſtimmung der Einheit ungleichartig werden, z. B. Fuße und Zolle; Quadratzolle und Kreiszolle; Nonageſimalgrade und Centeſimalgrade. Dergleichen kann man zwar zuſammenſetzen, aber nicht ihre Zahlwerthe.

Gleichartige Radicalgrößen ſind ſolche, welche Wurzeln gleichen Grades ſind, z. B. $\sqrt[3]{25}; \sqrt[3]{43}$.

Von einer algebraischen Gleichung wird gesagt, daß das Gesetz des Gleichartigen darin beobachtet sey, wenn alle Glieder derselben einerley Dimension oder Abmessung haben.

Eine gleichartige Differentialgleichung zwischen zwey veränderlichen Größen ist eine solche, worin die Glieder bloß in Absicht derselben einerley Dimension haben.

Homogeneum affectionis et comparationis, s. an seinem Orte.

Gleichförmig wachsend oder abnehmend ist eine Reihe von Größen, deren jede von der folgenden um gleichviel auf gleiche Art unterschieden ist. Die ungleichförmigen Veränderungen zu messen gebraucht man zugehörige gleichförmige Veränderungen einer zugeordneten Größe.

Gleichheit ist die Beschaffenheit der Größen, wodurch sie gleich sind. — Verhältniß der Gleichheit ist das a : a, oder 1 : 1. Alle Beweise in der Mathematik beruhen auf der Bestimmung der Gleichheit oder Ungleichheit der Größen. In der Differentialrechnung kommt das Verhältniß der Gleichheit als Gränze eines veränderlichen Verhältnisses, oder vielmehr als Grundlage eines solchen, oft vor.

Gleichlaufend, s. parallel.

Gleichnamig (homologa) sind die Vorderglieder oder die Hinterglieder zweyer oder mehrerer Verhältnisse; auch die Seiten ähnlicher geradlinichter Figuren, die von den gleichen und auf gleiche Art liegenden Winkeln eingeschlossen sind. In den Proportionen zwischen solchen Seiten sind sie entweder die Vorderglieder oder die Hinterglieder, wenn nämlich die Seiten in der einen Figur zu einem Verhältnisse, und die in der andern Figur zu dem andern Verhältnisse genommen werden.

Gleichseitig (aequilaterum) ist erstlich ein Vieleck, das lauter gleiche Seiten hat; zweytens eine Hyperbel, deren Axen gleich groß sind.

Gleichwinklicht (aequiangulum) ist ein Vieleck, das lauter gleiche Winkel hat. Die regulären Vielecke sind gleichseitig und gleichwinklicht.

Gleichung ist entweder ein symbolischer Ausdruck der Art, wie mehrere mit einander verbundene Grössen jede aus der andern zusammengesetzt werden, oder eine Verknüpfung zweyer Formen derselben Größe.

1. Beyspiele der ersten Gattung sind

$$x^2 + ax = b,$$
$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$
$$x^2 + 7xy - 8y^2 + 10x - 12y - 20 = 0.$$

Beyspiele der zweyten Gattung sind

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$
$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{(a-b)}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{(a-b)}{b^4}x^3 + \text{etc.}$$
$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}.$$
$$\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

2. Man pflegt diese beiden Gattungen nicht zu unterscheiden. Sie sind aber, wie man aus den gegebenen Beyspielen sieht, von sehr verschiedener Beschaffenheit. Die Auflösung der Gleichungen von der ersten Gattung gehört für die Algebra. In diesem Artikel ist es die Absicht, die Auflösung derselben zu zeigen, das ist, wie die unbekannte Größe aus den gegebenen directe zusammen zu setzen sey, da sie in der Gleichung auf eine unentwickelte Art mit diesen dargestellt wird.

3. Die Gleichungen für eine einzige unbekannte Größe theilt man nach den höchsten Potenzen ein, auf welche die unbekannte Größe in denselben steigt.

Eine Gleichung vom ersten Grade, eine einfache, ist eine solche, worin die unbekannte Größe nur einfach oder in der ersten Potenz erscheint; Gleichungen vom zweyten Grade, oder quadratische, sind, worin das Quadrat der unbekannten Größe nebst der ersten Potenz, oder auch ohne diese vorkommt; vom dritten Grade, oder cubische, worin der Cubus, nebst allen oder einigen niedrigern Potenzen, oder auch ganz allein enthalten ist; vom vierten Grade oder biquadratische, worin die unbekannte Größe bis zum Biquadrat oder der vierten Potenz steigt, u. s. w.

4. Wenn eine Potenz der unbekannten Größe, ohne die niedrigern, mit der gegebenen Größe allein in einer Gleichung vorhanden ist, so heißt die Gleichung eine reine (aequatio pura). Wenn mehrere Potenzen der unbekannten Größe zusammen kommen, so heißt es eine unreine Gleichung oder besser eine zusammengesetzte (non pura vel affecta). Eine vollständige Gleichung, (aequatio completa), ist diejenige, worin alle Potenzen von der höchsten bis zu der ersten nebst dem gegebenen Gliede vorhanden sind; eine unvollständige ist, worin eine oder mehrere Potenzen fehlen.

5. Die einzelnen Größen, woraus eine Gleichung, sie sey von welcher Art sie wolle, zusammen gesetzt wird, heißen die Glieder (termini) derselben, wie x^2; ax; b in der Gleichung $x^2 - ax = b$. Die gegebenen Factoren der unbekannten Größe heißen ihre Coefficienten. Man muß dabey zugleich auf das Vorzeichen achten.

Die Aggregate der Glieder auf jeder Seite des Gleichheits-Zeichens heißen die Theile (membra) der Gleichung.

6. Die gewöhnlichen Stellungen der Glieder sind zweyerley. Entweder setzt man das gegebene Glied auf die eine Seite des Gleichheits-Zeichens, und alle die, welche unbekannte Größen enthalten, auf die andere; oder man bringt alle Glieder auf dieselbe Seite, so daß der eine Theil der Gleichung $= 0$ ist, indem sich alle Glieder des andern Theils gegen einander aufheben. Diese Stellung

ist zu manchen Absichten die brauchbarste, als um zu zeigen, wie eine Gleichung aus Factoren zusammengesetzt wird, um einen oder mehrere Factoren abzusondern, die Consecution der Folgen und Abwechslungen der Vorzeichen anzugeben, welche von der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln abhängt, eine gegebene Gleichung mit einer allgemeinen, oder canonischen zu vergleichen, und überhaupt allgemeine Lehrsätze über die Eigenschaften der Gleichungen und Regeln zur Auflösung zu geben.

7. Eine Gleichung, worin nur eine einzige unbekannte Größe enthalten ist, heißt eine bestimmte Gleichung (aequatio determinata); eine einzelne, worin zwey oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, ist eine unbestimmte Gleichung (indeterminata). Durch jene wird die unbekannte Größe mittelst der gegebenen bestimmt, durch diese aber nicht, weil sie von gegebenen und nicht gegebenen Größen zugleich abhängt.

8. Wenn bey der Auflösung einer Aufgabe oder überhaupt bey der Untersuchung irgend einer Verbindung von Größen, mehrere unbekannte Größen, wie es oft der Fall ist, vorhanden sind, so sind diese in den Gleichungen zwischen ihnen und den gegebenen, mit einander vermengt. Es ist alsdann nöthig, für jede der unbekannten Größen eine bestimmte Gleichung zu finden. Dieses ist möglich, wenn so viele Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind, s. Elimination. Die Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe gehören in diesem Falle nicht zu den unbestimmten. Sind aber weniger Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden, so behält man bey allen Combinationen der Gleichungen doch zum Resultat eine unbestimmte Gleichung.

9. Die bestimmten Gleichungen sind das Resultat der analytischen Untersuchung über den Zusammenhang gewisser Größen. Diese überliefert gleichsam die Analysis der Algebra, um die Werthe der unbekannten Größen mittelst der bekannten daraus zu bestimmen.

10. Die unbestimmten Gleichungen gehören für die Untersuchung des Zusammenhanges der nach irgend einem

Gesetze von einander abhängigen veränderlichen Größen, es sey in der reinen Analysis, oder in der Geometrie, in der Mechanik, Astronomie und andern Anwendungen der Mathematik. Eine besondere Gattung unbestimmter Gleichungen ist die, wodurch nicht die Größe aber die Form der unbekannten Größen bestimmt wird, s. unbestimmte Analytik.

11. Die Wurzeln der bestimmten Gleichungen sind diejenigen Werthe der unbekannten Größe, welche der Gleichung zu folge der gegebenen Größen und ihrer Zusammensetzungsart Genüge thun. So sind $+2$ und $+5$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2-7x+10=0$, und $+2$; $+5$; -4 die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3-3x^2-18x+40=0$.

12. Die positiven Wurzeln sind diejenigen, bey welchen in dem Aggregat der Glieder die eigentliche Bedeutung der Vorzeichen beybehalten wird, als bey den Wurzeln $+2$ und $+5$ in jenen beiden Gleichungen. Sie werden in demjenigen Sinne genommen, der bey der Auflösung der Frage für sie festgesetzt ist. Die negativen Wurzeln sind, für welche die Vorzeichen der ungeraden Potenzen ihre Bedeutung ändern, so daß die mit $+$ begleiteten subtractiv, die mit $-$ begleiteten additiv werden. So ist in der obigen cubischen Gleichung, wenn die Wurzel -4 gebraucht wird, das Aggregat $-64-48+72+40=0$.

13. Die negativen Wurzeln dienen, zwey in den Vorzeichen bloß verschiedene Gleichungen in eine einzige zu vereinigen. Man verändere in einer Gleichung bloß die Vorzeichen der ungeraden Potenzen, oder, welches bey Gleichungen von einem ungeraden Grade bequemer ist, die Vorzeichen der geraden Potenzen, so sind die negativen Wurzeln der einen Gleichung die positiven der andern. Z. B. die Gleichung, $x^3+3x^2-18x-40=0$, hat die positive Wurzel $+4$, und die negativen -2; -5; die Gleichung, $x^3-3x^2-18x+40=0$, hat die Wurzeln -4; $+2$; $+5$. Die biquadratische Gleichung, $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$, hat die

Wurzeln $+2$; $+5$; -4; -1; die Gleichung, $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$, hat die Wurzeln -2; -5; $+4$; $+1$. Wollte man die negativen Wurzeln vermeiden, so müßte man zu der vollständigen Auflösung einer Aufgabe zwey Gleichungen anwenden, die von der erklärten entgegengesetzten Beschaffenheit wären, so daß der eine Theil der Werthe der gesuchten Größe durch die eine Gleichung, der andere Theil durch die andere Gleichung, nach ihrer absoluten Größe, zufolge der eigentlichen Bedeutung der Vorzeichen, gegeben würde. Allein es ist dem Geiste der Analysis gemäß, diese verwandten Beziehungen des gesuchten zu dem gegebenen in eine einzige Formel zu fassen, s. entgegengesetzte Größen.

14. Die verschiedenen Wurzeln sind Werthe verschiedener Größen, die alle bey einer Aufgabe gesucht werden, wenn man gleich nur nach einer einzigen fragen sollte. Die Algebra verbessert in ihrer Antwort das Mangelhafte in der Frage. Darüber wird die Betrachtung der Gleichungen von den verschiedenen Graden völliges Licht ertheilen.

15. Manche der alten Algebraisten (als Descartes, Wolf,) nannten die negativen Wurzeln sehr unrichtig falsche Wurzeln, weil sie sich zu dem Falle, worauf sie die Rechnung eingerichtet hatten, nicht schickten. Sie sind so gut Antworten auf die Frage als die von ihnen so genannten wahren, die positiven, Wurzeln. Jene verändern nur die Vorzeichen, so daß ihre ungeraden Potenzen subtrahirt oder addirt werden, wo diese addirt oder subtrahirt werden, wie es allemahl geschieht, wenn in den arithmetischen Operationen eine Größe durchaus ihr Vorzeichen ändert; s. entgegengesetzte Größen.

16. Gleichungen, in welchen alle Potenzen der unbekannten Größe gerade Exponenten haben, enthalten je zwey gleiche und entgegengesetzte Wurzeln, da das Quadrat und jede andere gerade Potenz einer Größe ihr Vorzeichen nicht ändert, wenn das Vorzeichen der Wurzel geändert wird.

17. Gleichungen, in welchen neben jeder Wurzel, die p heiße, das reciproke derselben $\frac{1}{p}$ auch als Wurzel vorhanden ist, heißen reciproke Gleichungen. Euler hat diese Benennung eingeführt. Comm. vet. Petrop. T. VI. p. 223.

18. Wenn für die unbekannte Größe irgend ein positiver oder negativer Werth gesetzt wird, so heißt das Aggregat aller Glieder, auf eine Seite gebracht, der Werth der Gleichung für diesen in die Stelle der Wurzel gesetzten Werth. Die Werthe einer Gleichung machen eine stetige Reihe aus, und wachsen ins Unendliche, wenn für x ein unendlich großer Werth gesetzt wird. Wird für x eine der Wurzeln selbst genommen, so ist der Werth der Gleichung $= o$.

19. Wir wollen nun die bestimmten Gleichungen vom ersten bis vierten Grade, jede Gattung besonders, untersuchen, und die Methoden zu ihrer Auflösung kennen lernen. Alsdann wird die allgemeine Betrachtung der Gleichungen keine Schwierigkeit machen, wenn es gleich, einzelne Fälle ausgenommen, nicht möglich ist, die höhern Gleichungen vom fünften Grade an, anders als durch unendliche Reihen, oder für numerische Werthe der Coefficienten durch Annäherung aufzulösen.

I. Gleichungen vom ersten Grade.

20. Wenn die unbekannte Größe in einer Gleichung bloß in der ersten Potenz vorhanden ist, so bringe man alle Glieder, welche sie enthalten, durch Veränderung des Vorzeichens, auf eine Seite der Gleichung, die andern, die bekannten, eben so auf die andere Seite: man dividire das Aggregat der bekannten durch den Factor der unbekannten Größe, oder multiplicire es durch den Divisor derselben, in den Fällen, wo diese mit einem Multiplicator oder Divisor verbunden ist. So erhält man den Werth der unbekannten Größe durch bekannte Größen.

Z. B. $5x - 12 = 3x + 4$

so ist $5x - 3x = 4 + 12$

$2x = 16$

$x = 8.$

Oder allgemeiner sey

$ax - b = cx + d$

so ist $ax - cx = b + d$

$(a - c)x = b + d$

$$x = \frac{b+d}{a-c}.$$

Als Beyspiele zur Erfindung der Gleichungen und ihrer Verbindungen dienen folgende Aufgaben. Man verbinde hiemit den Artikel: Buchstabenrechnung.

21. Aufg. Aus der Summe zweyer Zahlen, a, und ihrem Unterschiede, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn x und y, so ist

$x + y = a$, und $x - y = b$. Daraus ist

$2x = a + b$, und $x = \frac{1}{2}(a + b)$

$2y = a - b$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

22. Aufg. Aus dem Unterschiede zweyer Zahlen, a, und dem Unterschiede ihrer Quadrate, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn x und y, so ist $x - y = a$, und $x^2 - y^2 = b$. Da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, (Buchstabenrechnung, 14.) so ist

$$x + y = \frac{b}{a},$$

also zufolge (21.)

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + a\right) = \frac{b + aa}{2a}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - a\right) = \frac{b - aa}{2a}.$$

Wenn a a gröſſer als b iſt, ſo iſt y negativ, und a bedeutet die Summe x + y.

23. Aufg. Ein Courier A, deſſen Geſchwindigkeit, (Weg in einer Stunde) = a iſt, geht m Stunden eher ab, als ein Courier B, deſſen Geſchwindigkeit = b iſt, von einem Orte abgeht, der c Meilen von dem Orte des A rückwärts entfernt liegt. Beide gehen nach derſelben Richtung. Wo und wenn wird A von B eingeholt, wofern b > a iſt?

Es ſey x der Weg des A, bis er eingeholt wird, ſo iſt x + c der Weg des B bis dahin. Die Zeit des A auf dem Wege x iſt $= \frac{x}{a}$; die Zeit des B auf dem Wege x + c iſt $\frac{x+c}{b}$. Der Unterſchied beider Zeiten iſt = m. Alſo iſt

$$\frac{x}{a} - \frac{x+c}{b} = m.$$

Daraus iſt für A

der Weg $x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$,

die Zeit $= \frac{c+mb}{b-a}$.

Der Weg des B $= x + c = \frac{b(c+ma)}{b-a}$,

und die Zeit $= \frac{c+ma}{b-a}$.

Wenn die Couriere einander entgegen gehen, ſo iſt $x = \frac{a(c+mb)}{b+a}$. Denn der Weg des B iſt alsdann c − x. Man erhält den Werth von x in dieſem Falle, wenn man in der Formel für den erſten Fall a negativ nimmt, wodurch x negativ wird, welches bedeutet, daß

der Weg x eine der in jenem Falle gesetzten Richtung entgegengesetzte hat.

24. Aufg. Es sey das siderische Jahr = A; der mittlere siderische periodische Monath = M; der mittlere synodische Monath = N; die Vergleichung zwischen diesen Größen zu machen.

Aufl. Der Bogen der Ecklíptik, welchen die Sonne während eines synodischen Monaths beschreibt, sey = x, der ganze Umkreis = p, so ist $\frac{x}{p}A = N$. Da $p + x$ der von dem Monde während derselben Zeit beschriebene Bogen ist, so ist $\frac{p+x}{p}M = N$. In der erstern Gleichung addire man auf beiden Seiten die Größe A, so ist $\frac{p+x}{p}A = A + N$. Aus dieser Gleichung und der zweyten folgt durch Division

$$\frac{M}{A} = \frac{N}{A+N}. \quad \text{Also ist } M = \frac{A.N}{A+N}.$$

Hieraus ist $M(A+N) = A.N$; ferner

$$M.A = (A-M)N, \text{ und } N = \frac{A.M}{A-M}.$$

Es ist

A = 365 T. 6 St. 9′ 12″ = 365, 25639 T.
M = 27. 7. 43. 11. = 27, 32165 «
N = 29. 12. 44. 3. = 29, 53059 «

Der Werth von N findet sich auch aus dem Werthe der Zeit in der vorhergehenden Aufgabe, wenn man daselbst m = o setzt. Es ist c der Umkreis p, weil der Mond von der Conjunction mit der Sonne an denselben beschreiben muß, ehe er an die Stelle kommt, von welcher die Sonne ausgieng. Der in irgend einer Zeit-Einheit, als ein Tag, von der Sonne beschriebene Bogen ist $\frac{p}{A} = a$;

der von dem Monde beschriebene Bogen ist $\frac{P}{M} = b$. Setzt man diese Werthe für c, a, b, so wird die Zeit bis zur nächsten Conjunction, $N = \frac{A.M}{A-M}$. Hieraus ergiebt sich $M = \frac{A.N}{A+N}$.

25. Aufg. Es soll aus m löthigen und n löthigen Silber eine Masse von a Loth zusammen gesetzt werden, die r löthig ist. Wie viel von jedem Silber ist zu nehmen?

Aufl. Von dem erstern seyn zu nehmen x Loth, von dem andern y Loth. Die Menge des feinen Silbers in x Loth ist $\frac{mx}{16}$, in den y Loth ist sie $= \frac{ny}{16}$, in der Mischung $\frac{ra}{16}$. Also ist

I. $mx + ny = ra$.

Es ist auch

II. $x + y = a$.

Hier ist nur nöthig, das Verhältniß x : y zu suchen. Darum verwandle man II. in folgende,

III. $rx + ry = ra$.

Demnach ist

IV. $mx + ny = rx + ry$

oder V. $mx - rx = ry - ny$.

Also ist

VI. $x : y = r - n : m - r$.

Durch die Gesellschafts-Regel findet man hieraus sowohl x als y.

Wollte man, ohne das Verhältniß gefunden zu haben, x und y unmittelbar finden, so ist, wenn x gesucht wird, in I. der Werth von y aus II. zu setzen, nämlich $y = a - x$. Dies giebt $mx + n(a-x) = ra$, das

ist $(m-n)x = (r-n)a$, und $x = \frac{r-n}{m-n}a$. Wenn m und x mit n und y vertauscht werden, so ist $(n-m)y = (r-m)a$, oder $(m-n)y = (m-r)a$, und $y = \frac{m-r}{m-n}a$.

26. Aufg. Das specifische Gewicht einer Materie sey $= a$, einer andern $= b$, einer Mischung aus beiden $= c$, man sucht, wie viel von jeder in der Mischung enthalten ist, vorausgesetzt, daß die Summe der Räume beider Materien in und außer der Mischung gleich groß ist.

Aufl. Da die Einheit der Gewichte, so wie der Räume, willkührlich ist, so nehme man das Gewicht der Raum-Einheit an Wasser zur Einheit, und es ist das Gewicht der ersten Materie in der Raum-Einheit $= a$, und der Raum von dem Gewichte x derselben $= \frac{x}{a}$. Eben so ist von dem Gewichte der zweyten Materie der Raum $= \frac{y}{b}$, und von der Mischung beider $= \frac{x+y}{c}$, wenn die Gewichte der darin enthaltenen beiden Materien x und y sind. Zufolge der Voraussetzung ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x+y}{c}.$$

Daraus
$$bcx + acy = ab(x+y)$$
$$a(c-b)y = b(a-c)x$$
$$x : y = a(c-b) : b(a-c)$$
$$x : y = \frac{a}{a-c} : \frac{b}{c-b}.$$

Z. B. Das specifische Gewicht des Silbers sey $= 11{,}09$, des Kupfers $= 8{,}33$, einer Mischung $= 10{,}24$, so ist $x : y = 3 : 1$ nahe.

27. Aufg. Aus den Gewichten zweyer Materien, den specifischen Gewichten der einen und ihrer Mischung

das specifische Gewicht der andern zu finden, unter der Voraussetzung wie in (26.).

Die Gewichte seyn p, q, das specifische Gewicht der erstern = a, der zweyten = u, der Mischung = c, so ist $\frac{p}{a} + \frac{q}{u} = \frac{p+q}{c}$

$$\frac{q}{u} = \frac{p+q}{c} - \frac{p}{a} = \frac{a(p+q)-cp}{ac}$$

$$u = \frac{acq}{a(p+q)-cp}.$$

Die Formel würde unter der gemachten Voraussetzung dienen, aus dem Gewichte einer Salzauflösung und des darin enthaltenen Salzes, nebst den specifischen Gewichten des Wassers und der Auflösung, das specifische Gewicht des Salzes zu finden. Z. B. in einer gesättigten Auflösung ist nach Lamberts Versuchen p = 979; q = 380; a = 1; c = 1,205, also u = 2,554. In einer schwächern ist p = 1095; q = 100; c = 1,059. Dieses giebt u = 2,99.

28. Aufg. In einer Salzauflösung sey das Gewicht des süßen Wassers = a, des Salzes = b, der Gehalt = G = $\frac{b}{a+b}$. Man verlangt die Menge des Wassers, das zugegossen werden muß, damit die Auflösung den Gehalt g bekomme.

Aufl. Die gesuchte Wassermenge wiege = x, so ist $g = \frac{b}{a+x+b}$. Daraus ist $x = \frac{b}{g} - (a+b)$ $= \frac{b}{g} - \frac{b}{G} = \frac{(G-g)b}{Gg}$. Oder, wenn für b der Werth G(a + b) gesetzt wird, $x = \frac{(G-g)(a+b)}{g}$.

29. Aufg. Zu finden, wie sich die Gewichte zweyer Körper, deren einer schwerer, der andere leichter

als Wasser ist, verhalten müssen, damit beide verbunden im Wasser ganz eingetaucht schwimmend erhalten werden.

Aufl. Das specifische Gewicht des schwerern Körpers sey $=m$; des leichtern $=n$, des Wassers $=p$, das Gewicht des erstern $=a$, des zweyten $=x$. Damit beide ganz eingetaucht dem Wasser das Gleichgewicht halten, muß das Gewicht beider so groß seyn als das Gewicht des Wassers, dessen Stelle sie einnehmen. Nun verhalten sich die Gewichte zweyer Massen von gleicher Räumlichkeit wie ihre specifischen Gewichte; also ist das Gewicht des Wassers, dessen Stelle der erstere Körper einnimmt, $=\frac{pa}{m}$, und das Gewicht des Wassers in dem Raume des zweyten Körpers $=\frac{px}{n}$. Demnach ist

$$a+x=\frac{pa}{m}+\frac{px}{n}$$

$$mn(a+x)=p(na+mx)$$

$$(m-p)na=(p-n)mx$$

$$a:x=(p-n)m:(m-p)n$$

$$a:x=\frac{m}{m-p}:\frac{n}{p-n}.$$

Das Verhältniß ist dasselbe wie in der Aufgabe (26.), wenn für das dortige specifische Gewicht der Mischung hier das specifische Gewicht des Wassers gesetzt wird. Die beiden verbundenen Körper sind als eine Mischung zu betrachten, deren specifisches Gewicht dem einer Masse von gleichem Gewicht und gleichem Umfange, also dem des Wassers gleich ist. Die Algebra hilft hier die Ähnlichkeit zweyer dem ersten Anblick nach verschiedenen Fragen einsehen.

30. Aufg. Ein Wasserbehälter erhält a Cubikfuß Wasser aus zwey Röhren, wenn die erste m Stunden, die andere n Stunden läuft; und erhält b Cubikfuß, wenn jene p St. diese q St. läuft; wie viel Wasser giebt jede Röhre in einer Stunde?

Aufl. Die erste Röhre gebe x Cubikfuß, die zweyte y, so ist

I. $mx+ny=a$

II. $px+qy=b$.

Um y herauszuschaffen, multiplicire man I. mit q, und II. mit n, so ist

I. $mqx+nqy=qa$

II. $npx+nqy=nb$.

Durch die Subtraction wird

III. $mqx-npx=qa-nb$

$$x=\frac{qa-nb}{mq-np}.$$

Eben so $$y=\frac{mb-pa}{mq-np}.$$

Wäre $qa<nb$, so ist auch $mq<np$, so wie $mb<pa$, und man hat nur die Vorzeichen im Zähler und Nenner zu ändern.

In dem Falle, daß das Wasser durch die zweyte Röhre hinausfließt, hat man nur y negativ zu setzen, oder das Vorzeichen zu ändern. Es ist alsdann $y=\frac{pa-mb}{mq-np}$. Wüßte man nicht, ob durch die zweyte Röhre das Wasser hinein oder herausliefe, so dürfte man nur den einen oder den andern Fall beliebig voraussetzen. Ist der Werth von y positiv, so ist die Voraussetzung richtig; ist er negativ, so erhellt daraus, daß die entgegengesetzte zu nehmen ist.

Z. B. $m=2$; $n=3$; $p=4$; $q=5$; $a=5$; $b=35$, so ist, wenn die Rechnung nach dem ersten Falle gemacht wird, $x=40$; $y=-25$. Durch die zweyte Röhre fließt das Wasser nicht hinein, sondern hinaus.

31. Aufg. Es sey I. $x+y=a$; II. $x+z=b$; III. $y+z=c$, man sucht die Größen x, y, z.

Aufl. Weil $2x + 2y + 2z = a + b + c$,

so ist
$$2x = a + b - c$$
$$2y = a - b + c$$
$$2z = b + c - a.$$

32. Das allgemeine Verfahren, wenn drey oder mehr Gleichungen vom ersten Grade mit eben so vielen unbekannten Größen gegeben werden, ist in dem Artikel, Elimination, anzutreffen.

Mehrere Exempel suche man in den Lehrbüchern, besonders in Saundersons Algebra (Englisch, 1740, 2 Bände in 4. französisch, 1756), und in L'Huiliers Algebra, 1799 und 1801. 2 Bde. in 8.

II. Quadratische Gleichungen.

Alle Fragen, wodurch man auf quadratische Gleichungen geführt wird, lassen sich auf folgende beide bringen.

33. Aufg. Es ist gegeben die Summe, a, zweyer Zahlen, und ihr Product, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn p und q, jene die größere, so daß $p > \frac{1}{2}a$, also $q < \frac{1}{2}a$. Es ist

I. $p + q = a$; II. $pq = b$.

Die Theile der erstern Gleichung multiplicire man mit p, so ist

$$pp + pq = ap, \text{ das ist}$$
$$pp - ap + b = o.$$

Man addire auf beiden Seiten die bekannte Größe, $\frac{1}{4}aa - b$, so ist

$$pp - ap + \tfrac{1}{4}aa = \tfrac{1}{4}aa - b,$$

also $p - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$

und $p = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Für die zweyte der gesuchten Größen, q, ist ebenfalls die Gleichung

$$qq - aq + b = o,$$

und $qq - aq + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - b.$

Da aber $q < \frac{1}{2}a$, so ist

$$\frac{1}{2}a - q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)},$$

und $q = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}.$

Bezeichnet man jede der beiden Größen durch x, so ist

$$xx - ax + b = o,$$

und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}.$

Hieraus sieht man, woher die Gleichung, $xx - ax + b = o$, zwey Wurzeln hat. Denn sie ist die Antwort auf eine Frage nach zwey Größen. Die Algebra findet auch ohne Rücksicht auf diese Frage einen doppelten Werth für x. Denn die Quadratwurzel aus $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ ist so gut $x - \frac{1}{2}a$ als $\frac{1}{2}a - x$. Jene giebt

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)},$$

diese $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}.$

34. Aufg. Es ist gegeben der Unterschied, a, zweyer Zahlen, und ihr Product, b, die Zahlen zu finden.

Aufl. Die Zahlen seyn p und q, so ist

I. $p - q = a$; II. $pq = b.$

Wie vorher ist

$$pp - b = ap,$$

und $pp - ap - b = o.$

Auf beiden Seiten addirt $\frac{1}{4}aa + b$, ist

$$pp - ap + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + b.$$

Daher $p - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)},$

$$p = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)} + \frac{1}{2}a.$$

Ferner ist

$pq - qq = aq$, das ist,

$b - qq = aq$, aber

$qq + aq - b = o.$

Auf beiden Seiten addirt $\frac{1}{4}aa+b$, ist

$$qq+aq+\tfrac{1}{4}aa=\tfrac{1}{4}aa+b,$$

daher $$q+\tfrac{1}{2}a=\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+b)},$$

$$q=\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+b)}-\tfrac{1}{2}a.$$

Um die beiden Gleichungen, $pp-ap-b=o$, und $qq+aq-b=o$, durch eine einzige Gleichung, $xx-ax-b=o$, oder auch $xx+ax-b=o$, darzustellen, muß man in jener unter x sowohl p als $-q$, in dieser sowohl q als $-p$ verstehen, so daß die eine Wurzel die eine gesuchte Größe in dem Sinne der Frage, die andere Wurzel aber die andere Größe in dem entgegengesetzten Sinne angebe. Die Wurzeln der Gleichung,

$$xx-ax-b=o,$$

sind solchergestalt

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+b)};$$

und die Wurzeln der Gleichung,

$$xx+ax-b=o,$$

sind $$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa+b)}.$$

35. Alle Formen einer quadratischen Gleichung sind

1) $xx-ax+b=o$
2) $xx+ax+b=o$
3) $xx-ax-b=o$
4) $xx+ax-b=c$.

Die zweyte entsteht aus der ersten, und diese aus der zweyten, wenn x negativ genommen wird. Man kommt in der Rechnung auf die zweyte Form, wenn man die Relation der Wurzeln x (oder p und q) gegen die gegebenen Größen aus dem Falle der ersten Form herleitet, und beide in einer entgegengesetzten Beziehung gegen die in jener Form nimmt. Die dritte und vierte Form enthalten ebenfalls einerley Wurzeln, nur in entgegengesetzter Bedeutung. Die Wurzeln in den beiden ersten Formen sind gleichnamig, in den andern beiden ungleichnamig oder sich

entgegengesetzt. (Vergl. Anwendung der Geometrie auf die Algebra, I. V.)

36. Es sind also zwey Hauptformen der quadratischen Gleichungen.

$$\text{I. } xx \mp ax + b = o,$$
$$\text{II. } xx \mp ax - b = o.$$

Beide unterscheiden sich darin wesentlich, daß die erste unmögliche Wurzeln enthalten kann. Denn der Unterschied der gesuchten Größen sey $= u$, so sind sie (21.) eine $= \frac{1}{2}(a + u)$, die andere $= \frac{1}{2}(a - u)$. Also ihr Product $b = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}uu$, so daß nothwendig $b < \frac{1}{4}aa$ ist. Die Nichterfüllung dieser nothwendigen Bedingung macht die Auflösung unmöglich.

Z. B. $xx - 10x + 24 = o$

hat zwey mögliche Wurzeln $+6$ und $+4$,

aber $xx - 10x + 26 = o$

hat keine mögliche Wurzeln.

37. Wenn man unter der Summe zweyer Größen auch ihren Unterschied versteht, und das Vorzeichen ihres Products gehörig bestimmt, so begreift die Gleichung, $x^2 - ax + b = o$, alle vier Formen, und die Aufgabe in (33.) alle Fälle, welche auf eine quadratische Gleichung führen. Jene Form ist zur Repräsentantinn aller sehr gut geeignet, da ihre beiden Wurzeln gleichnamig sind.

38. Da für die Form $xx - ax + b = o$ die beiden Wurzeln sind $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$, oder $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}$, so kann man diese Auflösung auch auf die andern Formen mit gehöriger Abänderung der Vorzeichen anwenden.

Den Wurzeln kann man auch folgende Formen geben, $\frac{b}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}}$, und $\frac{b}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}}$. Diese entstehen aus den Formen $\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4b)}$

durch die Multiplication und Division mit einer und derselben Größe, $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(aa-4b)}$. Sie sind zuweilen bequemer als die erstern.

39. In allen vier Formen sind so viele Folgen ungleichnamiger Vorzeichen als positive Wurzeln, und so viele Folgen gleichnamiger als negative Wurzeln, wenn nämlich noch dem ersten Gliede das Zeichen + vorgesetzt wird, und beide Wurzeln möglich sind.

40. In allen vier Formen ist die Summe der beiden den Wurzeln entgegengesetzten Größen gleich dem Coefficienten von x in Verbindung mit seinem Vorzeichen, und das Product derselben gleich dem gegebenen Gliede in der Gleichung, auch in Verbindung mit seinem Vorzeichen. Das erste Glied, xx, habe den Coefficienten + 1.

41. Wenn $4b > aa$ ist, so sind beide Wurzeln der Gleichung zwar unmöglich (36.) allein die Summe derselben und ihr Product sind dennoch mögliche Größen. In der Summe hebt sich das unmögliche eben so wie das mögliche irrationale. In dem Producte der unmöglichen Wurzeln geschieht dasselbe, und das Product von $+\sqrt{(aa-4b)}$ in $-\sqrt{(aa-4b)}$ ist die mögliche Größe, $-(aa-4b)$, es mag aa größer oder kleiner als 4b seyn.

42. Der Satz in (40.) gilt also auch, wenn die Wurzeln unmögliche Werthe haben, nämlich in dem Falle, da $b > \frac{1}{4}aa$ ist. Um dem Satze die völligste Ausdehnung zu geben, werden die unmöglichen Wurzeln, wenn sie gleich nichts weiter als Bezeichnungen sind, mit unter die Wurzeln aufgenommen. Ihre Form ist $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, und es ist, wenn sie die Wurzeln der Gleichung, $x^2 - ax + b = o$, sind, $\alpha = \frac{1}{2}a$; $\beta^2 = b - \frac{1}{4}aa$. Der Theil $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$ der Wurzel x ist $\sqrt{(b-\frac{1}{4}aa)}\,(-1) = \sqrt{\beta^2(-1)} = \beta\sqrt{-1}$.

43. Die Wurzeln der Gleichung, $xx - ax + b = o$, seyn p, q, es ist

$$xx - ax + b = (x-p)(x-q).$$

Denn die Entwickelung des Products, welches P heiße, giebt

$$P = xx - px + pq - qx$$

Da $p + q = a$, und $pq = b$ ist, so erhellt der Satz.

44. Um eine dreytheilige Größe, wie $xx - ax + b$, in zwey Factoren zu zerfällen, suche man die Wurzeln, p, q, der Gleichung, $xx - ax + b = o$, so ist $xx - ax + b = (x - p)(x - q)$, was man auch für x setzen mag. Hat die Gleichung keine mögliche Wurzeln, so läßt sich das Trinomium nur der Form nach in Factoren zerlegen

Exempel. Die Wurzeln der Gleichung, $xx - 12x + 35 = o$, sind $+5$ und $+7$, also ist

$$xx - 12x + 35 = (x - 5)(x - 7).$$

Die Wurzeln der Gleichung $xx - 5x - 84 = o$ sind $+12$ und -7, also ist $xx - 5x - 84 = (x - 12)(x + 7)$. So auch ist $3x^4 - 10a^2x^2 + 3a^4 = (3x^2 - a^2)(x^2 - 3a^2)$. Denn die Gleichung, $x^4 - \frac{10}{3}a^2x^2 + a^4 = o$, hat die Wurzeln, $x^2 = \frac{5}{3}a^2 \pm \sqrt{(\frac{25}{9}a^4 - a^4)} = \frac{5}{3}a^2 \pm \frac{4}{3}a^2$. Also ist

$$x^4 - \tfrac{10}{3}a^2x^2 + a^4 = (x^2 - 3a^2)(x^2 - \tfrac{1}{3}a^2),$$

und daher

$$3x^4 - 10a^2x^2 + 3a^4 = (x^2 - 3a^2)(3x^2 - a^2) = (3a^2 - x^2)(a^2 - 3x^2).$$

45. Das Aggregat der Glieder der Gleichung, ihr Werth, ist negativ, wenn der Werth von x zwischen den beiden möglichen Wurzeln liegt; positiv, wenn er jenseits der einen wie der andern genommen wird. Denn das Product $(x - p)(x - q)$, oder $(p - x)(q - x)$, hat in dem erstern Falle ungleichnamige Factoren, und ist dadurch negativ. In dem andern Falle ist das Product positiv.

46. Hat die Gleichung keine mögliche Wurzeln, so ist ihr Werth immer positiv. Denn xx kann immer so groß genommen werden, daß es größer ist, als die beiden andern Glieder zusammen, wenn sie auch beide das

Vorzeichen — erhalten. Könnte nun der Werth der Gleichung auch negativ seyn, so müßte zwischen den positiven Werthen und dem negativen ein Werth $=0$ fallen, die Gleichung also mögliche Wurzeln haben.

47. Hat die Gleichung zwey gleiche mögliche Wurzeln, so wird ihr Werth für diese $=0$, ist aber für alle andere Werthe von x positiv. Dieser Fall macht den Übergang von der Möglichkeit der Wurzeln zu ihrer Unmöglichkeit. S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

Beyspiele einiger Aufgaben.

48. Aufg. Es ist gegeben $x + y = a$, und $xx + yy = bb$, die Zahlen x, y, zu finden.

Aufl. Es ist $xx + 2xy + yy = aa$, also $2xy = aa - bb$. Da nun die Summe und das Product gegeben sind, so ist, wenn x jede der beiden Größen bezeichnet,

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}(aa - bb))}$$
$$= \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{4}aa)}.$$

Es muß $bb >$ oder $= \tfrac{1}{2}aa$ seyn, wenn die Auflösung möglich seyn soll.

49. Aufg. Es ist gegeben die Summe der Quadrate zweyer Größen, und ihr Product, die Größen zu finden.

Aufl. Es sey $xx + yy = aa$; $xy = b$, so ist $xx + 2xy + yy = aa + 2b$, und $xx - 2xy + yy = aa - 2b$. Also $x + y = \sqrt{(aa + 2b)}$, und $x - y = \sqrt{(aa - 2b)}$. Folglich

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa + 2b)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 2b)}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa + 2b)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 2b)}.$$

Oder da $xxyy = bb$, so ist zufolge (33.)

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - bb)}$$
$$yy = \tfrac{1}{2}aa - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - bb)},$$

50. Aufg. Es ist gegeben $x+y=a$, und $x^5+y^5=b^5$, die Größen x, y zu finden.

Auflö. Man setze, zur Abänderung der Auflösungsart, $x-y=u$, so ist

$$x=\tfrac{1}{2}(a+u), \text{ und } y=\tfrac{1}{2}(a-u),$$

also $x^5=\frac{1}{32}(a^5+3a^4u+3au^4+u^5)$,

$y^5=\frac{1}{32}(a^5-3a^4u+3au^4-u^5)$.

Daher

$$b^5=\tfrac{1}{4}(a^5+3au^4),$$

$$u^4=\frac{4b^5-a^5}{3a},$$

und die beiden Zahlen $=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^5-a^5}{3a}}$.

Es muß $4b^5>$ oder $=a^5$ seyn.

51. Aufg. Es ist gegeben die Summe a dreyer Zahlen, die in geometrischer Progression sind, und die Summe b^2 ihrer Quadrate; die Zahlen zu finden.

Auflö. Die Zahlen seyn x, y, z, so ist

I. $x+y+z=a$

II. $x^2+y^2+z^2=b^2$

III. $xz=y^2$.

Die erste Gleichung quadrirt, giebt

IV. $x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2=a^2$.

Hieraus entsteht durch Verbindung mit der Gleichung II.

V. $2xy+2xz+2yz=a^2-b^2$.

Aus dieser durch Verbindung mit III.

VI. $2xy+2y^2+2yz=a^2-b^2$

oder VI. $2y(x+y+z)=a^2-b^2$.

Hieraus vermittelst I.

VII. $2ay=a^2-b^2$,

und $y=\frac{a^2-b^2}{2a}$,

Da $x+z=a-y$, ſo iſt

$$x+z=\frac{a^2+b^2}{2a}.$$

Auch iſt $$xz=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}.$$

Demnach iſt Summe und Product der Größen x und z gegeben. Jene ſey $=A$; dieſes $=B^2$, ſo iſt (33.)

$$x=\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-B^2)},$$

oder $$x=\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}A+B)\,(\tfrac{1}{2}A-B)}.$$

Nun iſt $$A=\frac{a^2+b^2}{2a};\quad B=\frac{a^2-b^2}{2a},$$

alſo $$\tfrac{1}{2}A+B=\frac{3a^2-b^2}{4a};\quad \tfrac{1}{2}A-B=\frac{3b^2-a^2}{4a}$$

und $$x=\frac{a^2+b^2}{4a}\pm\frac{\sqrt{(3a^2-b^2)\,(3b^2-a^2)}}{4a}.$$

wenn x jedes der beiden äußern Glieder der Progreſſion bedeutet. Damit die Aufgabe möglich ſey, muß ſeyn $b^2>$ oder $=\frac{1}{3}a^2$ und $b^2<$ oder $=3a^2$.

Zweyte Auflöſung. Man nenne das erſte Glied der Progreſſion x, den Exponenten u, ſo iſt

I. $x(1+u+u^2)=a$

II. $x^2(1+u^2+u^4)=b^2$.

Nun iſt

III. $x^2(1+2u+3u^2+2u^3+u^4)=a^2$

IV. $2x^2(1+u+2u^2+u^3+u^4)=a^2+b^2$

oder

IV. $2x^2(1+u^2)(1+u+u^2)=a^2+b^2$

V. $2x^2(u+u^2+u^3)=a^2-b^2$

oder

V. $2x^2u(1+u+u^2)=a^2-b^2$

VI. $$\frac{1+u^2}{u}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Man ſetze $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=c$, ſo iſt

VII. $u^2-cu+1=0$

alſo $u=\frac{1}{2}c\pm\sqrt{(\frac{1}{4}c^2-1)}$

Der Exponent einer geometriſchen Reihe hat immer einen gedoppelten Werth, da die Reihe ſowohl ſteigend als fallend genommen werden kann. Das Product beider Werthe iſt $=1$, daher der gegebene Terminus der Gleichung $=+1$ iſt.

52. Aufg. Es iſt gegeben die Summe $x+y=a$, und $x^4+y^4=b^4$, die Größen x und y zu finden.

Aufl. Es iſt $(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=x^4+y^4$; alſo $a^4-4a^2xy+2x^2y^2=b^4$. Solchergeſtalt iſt das Product xy durch eine quadratiſche Gleichung gegeben. Nachdem es hieraus gefunden iſt, werden x und y aus ihrer Summe und ihrem Producte beſtimmt.

53. Aufg. Es iſt gegeben die Summe $x+y=a$, und $x^5+y^5=b^5$, die Größen x und y zu finden.

Aufl. Es iſt $(x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)=x^5+y^5$; alſo iſt $a^5-5a^3xy+5ax^2y^2=b^5$, und die fernere Auflöſung iſt wie in (52).

III. Cubiſche Gleichungen.

Die Aufgaben, welche auf cubiſche Gleichungen führen, laſſen ſich alle auf folgende drey bringen.

54. Aufg. I. Es iſt gegeben die Summe a dreyer Größen, die Summe b der Producte je zweyer, und das Product c aller drey; die Gleichungen für dieſe Größen zu finden.

Aufl. Man nenne die geſuchten Größen, p, q, r, ſo iſt

I. $p+q+r=a$, II. $pq+pr+qr=b$.
III. $pqr=c$.

Man setze $q+r=\alpha$; $qr=\beta$, so ist

I. $p+\alpha=a$ oder $p^3+p^2\alpha=ap^2$
II. $p\alpha+\beta=b$; $p^2\alpha+p\beta=bp$
III. $p\beta=c$; $p\beta=c$.

Aus diesen Gleichungen folgt sogleich unmittelbar,

$$p^3=ap^2-bp+c,$$

oder $p^3-ap^2+bp-c=0$.

Die beiden andern Größen werden durch völlig ähnliche Gleichungen gefunden. Bezeichnet man jede derselben durch x, so ist

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

die Gleichung, welche die Relation jeder der drey Größen zu den gegebenen enthält.

Die Symbole, a, b, c, p, q, r, bedeuten hier und in den folgenden beiden Aufgaben bloß Quantität, oder positive Größen.

55. Aufg. 2. Es sey I. $p+q-r=a$; II. $pq-pr-qr=\pm b$; III. $pqr=c$, die Gleichungen für die Größen p, q, r, zu finden.

Aufl. Es sey $q-r=\alpha$; $qr=\beta$, so ist

I. $p+\alpha=a$ oder $p^3+p^2\alpha=ap^2$
II. $p\alpha-\beta=\pm b$; $p^2\alpha-p\beta=\pm pb$
III. $p\beta=c$; $p\beta=c$.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$p^3=ap^2\mp bp-c,$$

oder $p^3-ap^2\pm bp+c=0$.

Und eben so

$$q^3-aq^2\pm bq+c=0.$$

Allein für r erhält man die Gleichung,

$$r^3+ar^2\pm br-c=0.$$

56. Aufg. 3. Es sey I. $p-q-r=a$; II. $pq+pr-qr=b$; III. $pqr=c$: die Gleichungen für p, q, r zu finden.

Aufl. Durch daſſelbe Verfahren wie vorher iſt

$$p^3 - ap^2 - bp - c = o$$
$$q^3 + aq^2 - bq + c = o$$
$$r^3 + ar^2 - br + c = o.$$

Die Größe b iſt poſitiv, weil $p(q + r) > qr$ iſt, da $p > q + r$ ſeyn ſoll. Wäre $p < q + r$, ſo gehörte dieſer Fall zu der zweyten Aufgabe.

57. Man bezeichne überhaupt jede der Größen, $\pm p$; $\pm q$; $\pm r$, durch x, ſo ſind die Gleichungen, worauf die obigen Aufgaben führen, folgende:

1) $x^3 - ax^2 + bx - c = o$
2) $x^3 - ax^2 \pm bx + c = o$
3) $x^3 + ax^2 \pm bx - c = o$
4) $x^3 - ax^2 - bx - c = o$
5) $x^3 + ax^2 - bx + c = o.$

Dazu nehme man noch die Gleichung,

6) $x^3 + ax^2 + bx + c = o,$

ſo hat man alle Fälle von Abwechslungen und Folgen der Vorzeichen. Die ſechſte Gleichung iſt bloß darin von der erſten verſchieden, daß ihre Wurzeln in einer entgegengeſetzten Beziehung auf die Wurzeln der erſten Gleichung genommen werden, alſo alle negativ ſind, wie bey den quadratiſchen Gleichungen (35. nr 1. 2.). Die Gleichungen 1) und 6) haben drey gleichnamige, aber entgegengeſetzte Wurzeln; die übrigen ungleichnamige. Die Wurzeln von 2) ſind denen von 3) gleich, aber entgegengeſetzt; die von 4) ſind in Abſicht auf die von 5) eben ſo beſchaffen.

Die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = o$, mit drey gleichnamigen poſitiven Wurzeln begreift alle übrigen, wenn bey den Coefficienten und Wurzeln auch eine negative Bedeutung zugelaſſen wird. Wegen der Gleichförmigkeit ihrer Wurzeln ſoll ſie überhaupt die Repräſentantinn aller der andern ſeyn.

58. Wenn alle drey Wurzeln mögliche Größen ſind, ſo hat eine cubiſche Gleichung ſo viele poſitive Wur-

zeln als Abwechslungen der Vorzeichen + — oder — + zweyer nächsten Glieder sich finden, und so viele negative Wurzeln, als Folgen gleicher Vorzeichen + + oder — — vorhanden sind. Zum Vorzeichen des ersten Gliedes ist + zu nehmen.

Die Gleichung 1) in (57.) hat drey positive Wurzeln; die 2) hat zwey positive Wurzeln, $+p$, $+q$ und eine negative, $-r$; die 3) hat eine positive $+r$, und zwey negative, $-p$, $-q$. In letztern beiden kann der Coefficient von x das eine oder das andere Vorzeichen haben, ohne daß dadurch die Anzahl der Abwechslungen und Folgen geändert wird. Die Gleichung 4) hat eine positive Wurzel, $+p$, und zwey negative, $-q$, $-r$; die 5) hat zwey positive, $+q$, $+r$; und eine negative, $-p$. Die 6) hat lauter negative Wurzeln. Allen diesen Beschaffenheiten der Wurzeln ist die Anzahl der Abwechslungen und Folgen der Vorzeichen gemäß, wie es angegeben ist. Ist ein Coefficient $= 0$, so gehören ihm beide Vorzeichen zu.

Der Satz muß auf mögliche Wurzeln eingeschränkt werden, weil die Beziehung des entgegengesezten auf unmögliche Wurzeln nicht anwendbar ist.

59. Ist $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ eine gegebene Gleichung, so sind ihre Wurzeln die drey Größen, p, q, r, welche folgenden drey Gleichungen Genüge thun: I. $p + q + r = a$; II. $pq + pr + qr = b$; III. $pqr = c$. Denn die Gleichung, welche für jede dieser drey Größen aus diesen drey Gleichungen hergeleitet wird, ist identisch mit der vorgegebenen. Durch gehörige Veränderung der Vorzeichen von p, q, r, wird jede der andern möglichen Formen erhalten.

Da die drey Coefficienten einer cubischen Gleichung nicht mehr als drey Bedingungen hergeben, so können keine andern Wurzeln Statt haben, als diejenigen, die durch die drey angeführten Gleichungen bestimmt werden.

60. Wenn statt der Wurzeln einer cubischen Gleichung die ihnen entgegengesetzten gleichen genommen werden,

ſo iſt der Coefficient des zweyten Gliedes in Verbindung mit dem Vorzeichen die Summe dieſer Größen; eben ſo der Coefficient des dritten Gliedes die Summe der Producte je zweyer, und das dritte Glied das Product aller drey.

61. Die Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = o$, habe die Wurzeln, p, q, r, es iſt

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - p)(x - q)(x - r).$$

Denn die Entwickelung des Products, welches P heiße, giebt

$$\begin{aligned} P = x^3 &- px^2 + pqx - pqr \\ &- qx^2 + prx \\ &- rx^2 + qrx \end{aligned}$$

Die Coefficienten von den Potenzen der Größe x in dem Producte kommen mit den Coefficienten in der Gleichung überein (59.), alſo iſt das Aggregat der Glieder in der Gleichung, oder ihr Werth gleich dem Producte P, was man auch für x ſetzen mag. Beides, das Aggregat und das Product, wird $= o$, wenn für x eine der Wurzeln geſetzt wird.

62. Zwey der durch p, q, r, bezeichneten Wurzeln können unmöglich ſeyn. Denn, wenn man eine derſelben als möglich und bekannt annimmt, ſo iſt von den beiden andern die Summe oder der Unterſchied und das Product gegeben. Iſt es die Summe, welche gegeben wird, ſo muß noch eine Bedingung erfüllt werden, zufolge (36).

63. Eine der Wurzeln iſt immer möglich. Denn man kann für x einen ſo großen poſitiven Werth ſetzen, daß x^3 allein größer iſt, als alle mit — begleiteten Glieder, ſo daß dadurch der Werth der Gleichung poſitiv wird. Man kann aber auch für x einen ſo großen negativen Werth ſetzen, daß dadurch x^3 allein alle Größen zuſammen übertrifft, die das Vorzeichen + erhalten, wodurch folglich der Werth der Gleichung negativ wird. Zwiſchen beiden Werthen von x muß es einen geben, für welchen die mit entgegengeſetzten Vorzeichen begleiteten Glieder eine gleiche Summe ausmachen, alſo der Werth der Gleichung $= o$

wird. Dieser Werth von x ist eine Wurzel der Gleichung. (S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.)

64. In dem Producte $(x - p)(x - q)(x - r) = P$ bedeute p eine mögliche Größe, q und r mögen mögliche oder unmögliche seyn. Man gebe dem Producte die Form $P = (x - p)(x^2 - (q + r)x + qr)$, und setze $x^2 - (q + r)x + qr = o$. Hat diese quadratische Gleichung zwey mögliche Wurzeln, so hat P drey mögliche einfache Factoren, und die cubische Gleichung, deren Werth P ist, hat drey mögliche Wurzeln. Hat die quadratische Gleichung keine mögliche Wurzeln, so hat die cubische Gleichung nur eine mögliche Wurzel. Dieses ist der Fall, wenn $(q + r)^2 < 4qr$ ist (36.).

65. Kann der Werth von p vollständig durch die Coefficienten der Gleichung angegeben werden, so wird durch die Division des Aggregats ihrer Glieder der quadratische Factor gefunden. Dieser $= o$ gesetzt, giebt die beiden Wurzeln q und r, entweder beide als mögliche, oder beide als unmögliche Größen.

66. Ohne darauf zu sehen, ob der quadratische Factor gefunden werden kann oder nicht, setze man denselben im allgemeinen $= x^2 - \alpha x + \beta$. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \alpha x + \beta = o$ seyn unmögliche, $q = m + n\sqrt{-1}$; $r = m - n\sqrt{-1}$, nach (41.), so ist $q + r = 2m$; $qr = mm + nn$. Setzt man in den Gleichungen der ersten Aufgabe für q und r diese Werthe, so wird eben die Gleichung für p erhalten, als wenn man die einfachen Zeichen, q, r, oder die möglichen Werthe, $m \pm n$, genommen hätte, da die erste Potenz von n aus der Rechnung herausgeht. Daher gilt der Satz in (59.) auch für den Fall unmöglicher Wurzeln.

67. Man setze nun in der cubischen Gleichung statt der Wurzel p eine der beiden andern beiden Wurzeln, q, so daß $q^3 - aq^2 + bq - c = o$ sey. In dem Falle, daß $q = m \pm n\sqrt{-1}$ ist, hebt sich alles unmögliche gegen einander auf, eben so wie alle Glieder, die n und n^3 enthalten, wenn $q = m \pm n$, gesetzt wird.

68. Die Auflösung der cubischen Gleichungen zu erleichtern, muß das zweyte Glied weggeschafft werden. Man setze $x = u + \frac{1}{3}a$, so wird aus der Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, die transformirte

$$u^3 - (\tfrac{1}{3}a^2 - b)\,u - (\tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c) = 0.$$

69. Die Gleichung $x^3 + bx \pm c = 0$ hat zwey unmögliche Wurzeln.

Diese Gleichung entsteht daher, daß in dem Falle der Aufgabe (55.) die Bedingungen sind I. $p + q - r = 0$. II. $pq - pr - qr = +b$. Die erste giebt $p + q = r$, also die zweyte, $pq = r^2 + b$. Daher ist $pq > r^2$. Wenn aber p und q mögliche Größen sind, so ist $pq < \frac{1}{4}(p+q)^2$ zufolge (36.), also $pq < r^2$. Wegen dieses Widerspruchs sind zwey Wurzeln unmöglich.

Man setze $p = m + n\sqrt{-1}$, und $q = m - n\sqrt{-1}$, so ist $p + q = 2m$, und $pq = m^2 + n^2$, so daß nun $pq > m^2$ oder $pq > \frac{1}{4}(p+q)^2$.

Die dritte Wurzel r ist möglich, weil eine cubische Gleichung wenigstens eine mögliche Wurzel hat. Es sind $p + q$ und pq mögliche Größen.

70. Die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ hat drey mögliche Wurzeln, wenn $4b^3 > 27c^2$; zwey unmögliche, wenn $4b^3 = 27c^2$; und zwey gleiche, wenn $4b^3 = 27c^2$ ist.

Diese Gleichung entsteht daher, daß in dem Falle der Aufgabe (55.) die Bedingungen sind: I. $p + q - r = 0$; II. $pr + qr - pq = b$; III. $pqr = c$. Demnach ist $p + q = r$, und $r^2 = b + pq$. Es sey erstlich $pq < \frac{1}{4}r^2$, so ist $r^2 < b + \frac{1}{4}r^2$, und $\frac{3}{4}r^2 < b$. Ferner ist $pq = \frac{c}{r}$, also $\frac{1}{4}r^2 > \frac{c}{r}$, und $r^3 > 4c$. Die erstere Formel der Ungleichheit giebt $\frac{64}{27}b^3 > r^6$, die letztere giebt $r^6 > 16c^2$, also ist $\frac{64}{27}b^3 > 16c^2$, das ist $4b^3 > 27c^2$.

Es sey zweytens $pq > \frac{1}{4}r^2$, so ist $r^2 > b + \frac{1}{4}r^2$, und $\frac{3}{4}r^2 > b$, also $r^6 > \frac{64}{27}b^3$. Ferner, da $pq = \frac{c}{r}$

ist, so ist $\frac{1}{4}r^2 < \frac{c}{r}$, oder $r^3 < 4c$, und $r^6 < 16c^2$.

Also ist $\frac{64}{27}b^3 < 16c^2$, oder $4b^3 < 27c^2$.

In dem erstern Falle sind p und q mögliche Größen, also ist auch r möglich. In dem andern Falle sind p und q unmöglich. Ist nun $4b^3 > 27c^2$, so sind alle drey Wurzeln möglich, weil, wenn zwey unmöglich wären, $4b^3 < 27c^2$ seyn müßte. Eben so folgt aus der Ungleichheit $4b^3 < 27c^2$, daß zwey unmögliche Wurzeln vorhanden sind.

Es sey drittens $pq = \frac{1}{4}r^2$, da $p + q = r$ ist, und $p^2 + 2pq + q^2 = r^2$, so ist $p^2 - 2pq + q^2 = 0$, also $p = q$, und $p = \frac{1}{2}r$. Daraus folgt $3p^2 = b$, und $2p^3 = c$, und hieraus $4b^3 = 27c^2$. Umgekehrt ist $p = q$, wenn $4b^3 = 27c^2$ ist. Denn wenn p und q ungleich wären, so wären auch pq und $\frac{1}{4}r^2$ ungleich, und daher auch $4b^3$ und $27c^2$.

71. Die Gleichung $x^3 - bx \pm c = 0$ kann auch aus dem Falle in der dritten Aufgabe (56.) entstehen, wenn I $p - q - r = 0$; II $pq + pr - qr = b$; III $pqr = c$ ist. Die Deduction des Satzes bleibt dieselbe, wenn q und r statt p und q, so wie p statt r gesetzt werden.

72. Aufg. Die Wurzel der Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, zu finden.

Aufl. Man setze $\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{27}b^3 = A^2$, so ist $x = \sqrt[3]{(A + \frac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(A - \frac{1}{2}c)}$.

Bew. Da $x^3 = c - bx$ ist, so setze man x aus zwey noch unbestimmten Stücken zusammen, um den Cubus des Aggregats mit $c - bx$ zu vergleichen. Es sey demnach $x = y - z$. Also

$x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$, oder

$x^3 = y^3 - 3yz(y - z) - z^3 = y^3 - 3yzx - z^3$

Da nun auch ist $x^3 = c - bx$, so setze man $y^3 - z^3 = c$, und $3yz = b$, indem hier die zwey unbestimmten

Größen zwey Bedingungen zu ihrer Bestimmung zu machen gestatten. Hier ist der Unterschied zweyer Größen, $y^3 - z = c$, und ihr Product, $y^3 z^3 = \frac{1}{27} b^3$, gegeben. Daher ist (34.)

$$y^3 = \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 + \tfrac{1}{27} b^3)} + \tfrac{1}{2} c$$
$$z^3 = \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 + \tfrac{1}{27} b^3)} - \tfrac{1}{2} c.$$

Hieraus folgt der Satz mit der darin gebrauchten Substitution.

73. Die Wurzel der Gleichung, $x^3 - b'x - c = 0$, zu finden, wenn nur eine mögliche vorhanden ist.

Aufl. Man setze $\frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{27} b^3 = A^2$, so ist

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2} c + A)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2} c - A)}.$$

Bew. Man mache $x = y + z$, so ist $x^3 = y^3 + z^3 + 3yzx$. Aus der gegebenen Gleichung ist $x^3 = c + bx$. Folglich $y^3 + z^3 = c$, und $3yz = b$. Hier ist die Summe $y^3 + z^3 = c$, und das Product $y^3 z^3 = \frac{1}{27} b^3$ gegeben, also ist nach (II. 1)

$$y^3 = \tfrac{1}{2} c + \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - \tfrac{1}{27} b^3)}$$
$$z^3 = \tfrac{1}{2} c - \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - \tfrac{1}{27} b^3)}.$$

Hat c in den beiden Gleichungen (72. 73.) das Vorzeichen +, so wird in den Werthen von x die Größe c entgegengesetzt genommen.

74. Die Formeln für x in beiden Gleichungen sind dieselben bis auf das Vorzeichen von b^3, welches mit dem von b in der Gleichung übereinkommt. Die Regel, welche in diesen Formeln enthalten ist, heißt Cardans Regel, s. Algebra, Th. I. S. 36.

75. Exempel. Es sey $x^3 - 13{,}3592x - 24{,}6377 = 0$. (Die Gleichung kommt bey der Auflösung einer astronomischen Aufgabe über den Abstand des Uranus von der Sonne vor, astronom. Jahrbuch 1782. S. 197.). Hier ist nach (73.) $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$, also

$$\tfrac{1}{4} c^2 = 151{,}7540$$
$$\tfrac{1}{27} b^3 = 88{,}3034$$

$$A^2 = 63,4506$$
$$A = 7,96559$$
$$\tfrac{1}{2}c + A = 20,28444$$
$$\tfrac{1}{2}c - A = 4,35326$$
$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} = 2,72722$$
$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)} = 1,63282$$
$$x = 4,36004$$

76. Wenn in der Gleichung, $x^3 - bx \pm c = 0$, ist $\frac{1}{27}b^3 > \frac{1}{4}c^2$, so wird die Quadratwurzel aus $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3$ unmöglich, obgleich in diesem Falle die Gleichung drey mögliche Wurzeln hat. Es entsteht daher eine Schwierigkeit wegen der Anwendung der Cardanischen Regel auf diesen Fall, der daher auch casus irreducibilis heißt. Allein das mögliche ist hier nur in einer unmöglichen Hülle versteckt. Die Cubikwurzel aus einem Binomium von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ kann vermittelst des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten durch eine ins Unendliche fortlaufende Reihe dargestellt werden. In den Reihen für $\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})}$ und $\sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ bekommen die unmöglichen Glieder entgegengesetzte Vorzeichen, und heben sich in der Summe beider Reihen einander auf. Die drey Wurzeln entstehen daher, daß die Cubikwurzel aus einer zweytheiligen unmöglichen Größe drey unmögliche Werthe hat; daher für $\sqrt[3]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ neun Combinationen möglich sind, unter welchen sich drey finden, die mögliche Größen geben. Diese sind die drey möglichen Wurzeln der cubischen Gleichung, s. Cardans Regel, II.

77. Die drey möglichen Wurzeln einer cubischen Gleichung lassen sich algebraisch darstellen, aber nur durch Einführung einer Größe, die wiederum durch eine cubische Gleichung gegeben ist. Man setze in der cubischen Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, eine der Wurzeln $= f + g$; die zweyte $= f - g$; so ist die dritte $= -2f$. Nun ist

das Product, $(x-f-g)\,(x-f+g)\,(x+2f) = o$, das ist

$$x^3-(3ff+gg)\,x+2f(ff-gg)=o.$$

Diese Gleichung werde mit einer gegebenen,

$$x^3-bx+c=o,$$

verglichen, so ist

$$3ff+gg=b\,;\ 2f(ff-gg)=c.$$

Es sey $ff-gg=u$, so ist

$$4ff=b+u\,;\ 4gg=b-3u.$$

Also sind die Wurzeln der Gleichung, $x^3-bx+c=o$,

I. $\frac{1}{2}\sqrt{(b+u)}+\frac{1}{2}\sqrt{(b-3u)}$

II. $\frac{1}{2}\sqrt{(b+u)}-\frac{1}{2}\sqrt{(b-3u)}$

III. $-\sqrt{(b+u)}$.

Die Größe u aber ist die Wurzel der cubischen Gleichung,

$$u^3+bu^2=c^2,$$

da $2f(ff-gg)=c$ ist.

Man setze $u=t-\frac{1}{3}b$, so ist

$$t^3-\tfrac{1}{3}b^2t+\tfrac{2}{27}b^3-c^2=o.$$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel, wenn $4(\frac{1}{3}b^2)^3 < 27\,(\frac{2}{27}b^3-c^2)^2$, das ist, wenn $4b^3 < 27\,c^2$. In diesem Falle hat die vorgegebene Gleichung auch nur eine mögliche Wurzel, und die Hülfsgleichungen sind unnöthig. In dem entgegengesetzten Falle, da $4b^3 > 27\,c^2$ ist, ist bey der Hülfsgleichung dieselbe Schwierigkeit, wie bey der vorgegebenen. Die gefundenen Wurzeln können also nur dienen, wenn das gegebene Glied der Gleichung die Form $u\sqrt{(b+u)}$ hat, oder, wenn die Gleichung $u^3+bu^2-c^2=o$ sich bequemer auflösen läßt, als die vorgegebene, oder statt eines quadratisch irrationalen Werthes von c, einen rationalen c^2 zu setzen. Hat die Gleichung für u drey mögliche Wurzeln, so geben die Formeln für x zwar neun Werthe, von welchen aber nur drey möglich sind.

78. Um f und g durch c und eine neue unbekannte v auszudrücken, setze man $2f(3ff+gg)=v$, so ist $8f^3=c+v$, also $2f=\sqrt[3]{(c+v)}$. Ferner ist $8fgg=v-3c$; $4gg=\frac{v-3o}{\sqrt[3]{(c+v)}}$. Dadurch ist $b=\frac{v}{\sqrt[3]{(c+v)}}$, so daß die Hülfsgleichung ist

$$v^3-b^3v-b^3c=o.$$

Diese Gleichung hat drey mögliche Wurzeln, wenn die Gleichung, $x^3-bx+c=o$ eben so viele mögliche hat. Sie kann also auch, wie die zuerst gefundene, nur als transformirte Gleichung dienen.

Die beiden Auflösungen, wenn die Coefficienten einer cubischen Gleichung die eine oder die andere hier bestimmte Form haben, sind schon in dem Artikel, Cardans Regel (13.), angeführt.

79. Da der Sinus und der Cosinus eines Winkels aus dem Sinus und Cosinus des dreyfachen Winkels durch eine cubische Gleichung gegeben werden, so kann man diese sehr bequem gebrauchen, um durch die Dreytheilung eines Winkels die cubischen Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln aufzulösen, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. V.

80. Noch eine Methode, cubische Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln für numerische Coefficienten aufzulösen, ist diejenige, die für alle Gleichungen durch Näherung Statt findet, s. unten. IX.

81. Es ist gegeben die Summe zweyer Größen, und die Summe ihrer sechsten Potenzen, die Größen zu finden.

Aufl. Es ist

$$(x+y)^6-6xy(x+y)^4+9x^2y^2(x+y)^2-2x^3y^3=x^6+y^6.$$

Setzt man $x+y=a$; $x^6+y^6=b$, und $xy=z$, so ist

$$2z^3-9a^2z^2+6a^4z-a^6+b^6=0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so wird ferner durch das Product und die Summe jede der beiden Größen gegeben.

82. Es ist gegeben die Summe zweyer Größen und die Summe ihrer siebenten Potenzen, die Größen zu finden.

Aufl. Es ist

$$(x+y)^7-7xy(x+y)^5+14x^2y^2(x+y)^3$$
$$-7x^3y^3(x+y)=x^7+y^7.$$

oder, nach der vorher gebrauchten Bezeichnung,

$$7az^3-14a^3z^2+7a^5z-a^7+b^7=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben mit der Summe a die beiden gesuchten Größen.

IV. Biquadratische Gleichungen.

Jede biquadratische Gleichung ist die Auflösung einer von den folgenden vier Aufgaben, in welchen alle Größen absolut, bloß nach ihrer Quantität, genommen werden.

83. Aufgabe I. Es ist gegeben die Summe a von vier Größen; die Summe b der Producte je zweyer von ihnen; die Summe c der Producte je dreyer derselben, und das Product d aller vier, die Gleichungen für jede der vier gesuchten Größen zu finden.

Aufl. Es sey

I. $p+q+r+s=a$

II. $pq+pr+ps+qr+qs+rs=b$

III. $pqr+pqs+prs+qrs=c$

IV. $pqrs=d$.

Man setze

I. $q+r+s=\alpha$

II $qr + qs + rs = \beta$

III. $qrs = \gamma$,

so ist

1) $p + \alpha = a$ oder $p^4 + p^3\alpha = ap^3$

2) $p\alpha + \beta = b$ " $p^3\alpha + p^2\beta = bp^2$

3) $p\beta + \gamma = c$ " $p^2\beta + p\gamma = cp$

4) $p\gamma = d$ " $p\gamma = d$

Die zweyte und vierte dieser Gleichungen werden von der Summe der beiden andern abgezogen, so entsteht die Gleichung,

$$p^4 = ap^3 - bp^2 + cp - d.$$

Die andern Größen werden durch ganz ähnliche Gleichungen bestimmt. Folglich ist, wenn x jede derselben, bedeutet,

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = o.$$

84. Aufg. II. Die Gleichung für die vier Größen zu finden, wenn eine derselben, s, negativ ist.

Aufl. Der Kürze wegen wollen wir nur bemerken, welche Veränderungen in den Vorzeichen der Coefficienten wegen der Veränderung des Vorzeichens von s entstehen.

I. Es werden d und γ negativ. Bleiben a, b, c positiv, so ist

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx - d = o.$$

II. Ist c negativ, da a und b positiv bleiben, so ist

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + cx - d = o.$$

III. Es sey a noch positiv, aber b negativ, so ist entweder α oder β negativ, oder beide sind es zugleich. Ist α negativ, so ist es β nothwendig auch. Es ist also zugleich c negativ, und es ist

$$x^4 - ax^3 - bx^2 + cx - d = o.$$

IV. Ist a negativ, so sind α und β negativ, folglich

$$x^4 + ax^3 - bx^2 + cx - d = o.$$

85. Aufg. III. Es seyn r und s negativ, so bleibt d positiv. Da γ positiv ist, so können α und β nicht beide positiv seyn. Denn daraus würde eine Gleichung wie nach der ersten Aufgabe folgen, welche keine negative Wurzeln haben kann, da für eine negative Wurzel alle Glieder dasselbe Vorzeichen + bekämen.

I. Es sey α positiv, also β negativ. Noch bleibe b positiv, so muß c negativ seyn, aus dem eben angeführten Grunde. Es ist also

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d = o.$$

II. Es bleibe α positiv, aber b sey negativ, so mag c positiv oder negativ seyn. Es ist demnach entweder

$$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + d = o,$$

oder $$x^4 - ax^3 - bx^2 + cx + d = o.$$

III, Es sey α negativ. Bleibt a positiv, so muß einer der Coefficienten b oder c, oder beide negativ werden, welches auf eine der obigen drey Gleichungen führt. Es sey also a negativ. Dabey mögen b und c erstlich beide positiv oder negativ seyn. Die Gleichung wird alsdann

entweder $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = o,$

oder $x^4 + ax^2 - bx^2 + cx + d = o.$

IV. Es sey a negativ und b allein negativ, so ist

$$x^4 + ax^3 - bx^2 - cx + d = o.$$

V. Es sey a negativ, so kann c nicht negativ seyn, wenn b positiv bleibt, weil alsdann alle Vorzeichen + würden, und die Gleichung lauter negative Wurzeln hätte.

86. Aufg. IV. Es seyn drey Wurzeln p, q, r negativ. Dieser Fall entsteht aus dem in der zweyten Aufgabe, wenn man die Vorzeichen von p, q, r, s daher auch von a und c ändert. Es sind daher die verschiedenen Gleichungen für diesen Fall

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - d = o$$
$$x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - d = o$$

$x^4 + ax^3 - bx^2 - cx - d = o$

$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = o.$

Diese Gleichungen haben dieselben Wurzeln der Größe nach, nur entgegengesetzte mit den Gleichungen für die zweyte Aufgabe.

87. Ein directer Beweis für den ersten Fall in der dritten Aufgabe ist folgender. Die Voraussetzung ist I. $p+q-r-s=a$; II. $pq-pr-ps-qr-qs+rs=b$; III. $-pqr-pqs+prs+qrs=c$; IV. $pqrs=d$. Es sey $p+q>r+s$. so daß a positiv ist; ferner $pq+rs>pr+ps+qr+qs$, oder $pq+rs>(p+q)(r+s)$, so daß auch b positiv ist. Also ist $pqr+r^2s>(p+q)(r^2+rs)$, und $pqs+rs^2>(p+q)rs+s^2$, und addirt, $pqr+pqs+r^2s+rs^2>(p+q(r^2+2rs+s^2)$. Es ist $r^2s+rs^2=rs(r+s)$, und $rs<(r^2+s^2)$. Auch ist gesetzt, daß $r+s<p+q$); also ist $rs(r+s)<(r^2+s^2)(p+q)$ oder $r^2s+rs^2<(r^2+s^2)(p+q)$. Folglich ist $pqr+pqs>2rs(p+q)$, und noch mehr ist $pqr+pqs>rs(p+q)$. Also ist c nothwendig negativ.

Auf dieselbe Art wird in dem fünften Falle derselben Aufgabe erwiesen, daß c positiv seyn muß.

88. Es erhellt aus dieser Entwickelung der Gleichungen in den verschiedenen Fällen, daß in jeder biquadratischen Gleichung so viele Abwechslungen der Vorzeichen sind, als positive Wurzeln, und so viele Folgen gleichnamiger Vorzeichen als negative Wurzeln vorhanden sind. Doch müssen alle Wurzeln möglich seyn, weil die Bestimmung der Vorzeichen und die Ungleichheit gewisser Zusammensetzungen auf unmögliche Größen nicht anzuwenden ist, bey welchen auch, wie schon oben bemerkt war, die Beziehung des Entgegengesetzten nicht Statt hat.

89. Die biquadratische Gleichung, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = o$, hat vier Wurzeln p, q, r, s, deren Verhalten gegen die Coefficienten durch die in Aufg. 1. angenommenen Bedingungen ausgedruckt wird. Haben

die Coefficienten, es sey einer oder mehrere, andere Vorzeichen als in dieser Gleichung, so ändern sich dem gemäß die Vorzeichen der Wurzeln. Der Beweis ist wie in (59.)

90. Es ist $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, welchen Werth man auch für x annimmt. Der Beweis, wie in (61.).

91. Eine biquadratische Gleichung hat entweder vier mögliche Wurzeln, oder zwey, oder gar keine. Denn wenn eine mögliche Wurzel, p, gefunden ist, sie mag rational oder irrational seyn, so läßt sich die Gleichung durch den Factor $x-p$ dividiren, so daß dadurch die höchste Potenz von x in dem Quotienten die dritte wird. Ist p rational, so enthält der Quotient rationale Coefficienten, und kann vollständig gefunden werden; ist p irrational, so sind die Coefficienten auch irrational. Der Quotient ist das Product $(x-q)(x-r)(x-s)$; dieses sey $= x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, so ist $x^4 - ax^3 + bx - cx + d = (x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma)(x-p)$. Das Product wird $= 0$, wenn der erstere Factor $= 0$ wird. Dieses ist immer wenigstens durch einen Werth von x möglich (63.). Hat die Gleichung, $x^3 - \alpha x + \beta x = 0$, drey mögliche Wurzeln, so hat die biquadratische Gleichung vier mögliche; hat jene aber nur eine mögliche Wurzel, q, so sind zwey Wurzeln, r, s, unmöglich; und es ist das Aggregat, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$, ein Product aus zwey quadratischen Factoren, $(x^2 - (p+q)x + pq)(x^2 - Ax + B)$, von welchen der zweyte durch keinen möglichen Werth von x null wird. So wie dieser Factor nicht null wird, so kann, nach Beschaffenheit der Coefficienten, a, b, c, d, auch der andere nicht null werden, und alsdann hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln. Die unmöglichen Wurzeln haben die Form $m \mp n\sqrt{-1}$, als die Wurzeln eines quadratischen Factors, der für keinen möglichen Werth von x Null wird (42.)

92. Die Coefficienten in dem cubischen Factor findet man leicht. Es ist (Aufg. I.).

$$\alpha = a - p; \quad \beta = b - p\alpha; \quad \gamma = c - p\beta.$$

Eben so findet man die Coefficienten des Factors $x^2 - Ax + B$, wenn die in dem andern Factor, $x^2 - (p+q)x + pq$ bekannt geworden sind. Es ist $A = a - (p+q)$, und $B = + \frac{d}{pq}$, wobey man auf die hier angenommenen Vorzeichen, und ihre Abänderungen in jedem Falle wohl achten muß. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - Ax + B = o$ sind die beiden andern Wurzeln der biquadratischen Gleichung neben den beiden p und q.

93. Zwey Wurzeln einer biquadratischen Gleichung haben die Form $m + \sqrt{n}$ und $m - \sqrt{n}$; die beiden andern haben eine ähnliche. Dadurch wird in den Coefficienten des Products der zweytheiligen Wurzelfactoren das Irrationale in den Wurzeln, und das Unmögliche, wenn n negativ ist, gehoben.

94. Das zweyte Glied einer biquadratischen Gleichung, $-ax^3$, wegzuschaffen, setze man $x = u + \frac{1}{4}a$, so erhält man eine Gleichung für u, durch deren Auflösung u gefunden wird, welches darauf x giebt. Ist das Vorzeichen des zweyten Gliedes +, so ist $x = u - \frac{1}{4}a$ zu nehmen.

95. Eine biquadratische Gleichung aufzulösen, sind drey vorzügliche Methoden vorhanden, eine von Lodovico Ferrari, die Bombelli bekannt gemacht hat, eine von Descartes, und eine dritte von Euler. Sie folgen hier nach einander.

Lodovico Ferrari (Bombelli's) Verfahren zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

96. Es sey, nach weggeschafftem zweyten Gliede, die Gleichung $x^4 = bx^2 + cx + d$, wo b, c, d auch negativ seyn mögen, und hier nur der Bequemlichkeit wegen gleichnamig gemacht sind. Man suche eine Zahl y von der Beschaffenheit, daß $2x^2y + y^2$ mit dem Gliede auf der rechten Seite der Gleichung ein vollständiges Quas-

die Coefficienten, es ſey einer oder mehrere, andere Vorzeichen als in dieſer Gleichung, ſo ändern ſich dem gemäß die Vorzeichen der Wurzeln. Der Beweis iſt wie in (59.)

90. Es iſt $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, welchen Werth man auch für x annimmt. Der Beweis, wie in (61.).

91. Eine biquadratiſche Gleichung hat entweder vier mögliche Wurzeln, oder zwey, oder gar keine. Denn wenn eine mögliche Wurzel, p, gefunden iſt, ſie mag rational oder irrational ſeyn, ſo läßt ſich die Gleichung durch den Factor $x-p$ dividiren, ſo daß dadurch die höchſte Potenz von x in dem Quotienten die dritte wird. Iſt p rational, ſo enthält der Quotient rationale Coefficienten, und kann vollſtändig gefunden werden; iſt p irrational, ſo ſind die Coefficienten auch irrational. Der Quotient iſt das Product $(x-q)(x-r)(x-s)$; dieſes ſey $= x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$, ſo iſt $x^4 - ax^3 + bx - cx + d = (x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma)(x-p)$. Das Product wird $= 0$, wenn der erſtere Factor $= 0$ wird. Dieſes iſt immer wenigſtens durch einen Werth von x möglich (63.). Hat die Gleichung, $x^3 - \alpha x + \beta x = 0$, drey mögliche Wurzeln, ſo hat die biquadratiſche Gleichung vier mögliche; hat jene aber nur eine mögliche Wurzel, q, ſo ſind zwey Wurzeln, r, s, unmöglich; und es iſt das Aggregat, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$, ein Product aus zwey quadratiſchen Factoren, $(x^2 - (p+q)x + pq)(x^2 - Ax + B)$, von welchen der zweyte durch keinen möglichen Werth von x null wird. So wie dieſer Factor nicht null wird, ſo kann, nach Beſchaffenheit der Coefficienten, a, b, c, d, auch der andere nicht null werden, und alsdann hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln. Die unmöglichen Wurzeln haben die Form $m \mp n\sqrt{-1}$, als die Wurzeln eines quadratiſchen Factors, der für keinen möglichen Werth von x Null wird (42.)

92. Die Coefficienten in dem cubiſchen Factor findet man leicht. Es iſt (Aufg. I.).

$$\alpha = a - p; \quad \beta = b - p\alpha; \quad \gamma = c - p\beta.$$

Eben so findet man die Coefficienten des Factors $x^2 - Ax + B$, wenn die in dem andern Factor, $x^2 - (p+q)x + pq$ bekannt geworden sind. Es ist $A = a - (p+q)$, und $B = + \frac{d}{pq}$, wobey man auf die hier angenommenen Vorzeichen, und ihre Abänderungen in jedem Falle wohl achten muß. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - Ax + B = o$ sind die beiden andern Wurzeln der biquadratischen Gleichung neben den beiden p und q.

93. Zwey Wurzeln einer biquadratischen Gleichung haben die Form $m + \sqrt{n}$ und $m - \sqrt{n}$; die beiden andern haben eine ähnliche. Dadurch wird in den Coefficienten des Products der zweytheiligen Wurzelfactoren das Irrationale in den Wurzeln, und das Unmögliche, wenn n negativ ist, gehoben.

94. Das zweyte Glied einer biquadratischen Gleichung, $-ax^3$, wegzuschaffen, setze man $x = u + \frac{1}{4}a$, so erhält man eine Gleichung für u, durch deren Auflösung u gefunden wird, welches darauf x giebt. Ist das Vorzeichen des zweyten Gliedes +, so ist $x = u - \frac{1}{4}a$ zu nehmen.

95. Eine biquadratische Gleichung aufzulösen, sind drey vorzügliche Methoden vorhanden, eine von Lodovico Ferrari, die Bombelli bekannt gemacht hat, eine von Descartes, und eine dritte von Euler. Sie folgen hier nach einander.

Lodovico Ferrari (Bombelli's) Verfahren zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

96. Es sey, nach weggeschafftem zweyten Gliede, die Gleichung $x^4 = bx^2 + cx + d$, wo b, c, d auch negativ seyn mögen, und hier nur der Bequemlichkeit wegen gleichnamig gemacht sind. Man suche eine Zahl y von der Beschaffenheit, daß $2x^2y + y^2$ mit dem Gliede auf der rechten Seite der Gleichung ein vollständiges Qua-

Die Wurzeln der erstern Gleichung sind $+10 \pm 2$; der zweyten, -10 ± 4. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind eben diese, nämlich $+12$; $+8$; -6; -14.

Nimmt man $y = -92$, so entstehen die Gleichungen

$$x^2 - 6x = +72,$$
$$x^2 + 6x = +112,$$

deren erstere die Wurzeln $+12$, -6; die andere die Wurzeln $+8$; -14 hat.

Exempel II. Die vorgegebene Gleichung sey

$$x^4 = 16x + 12.$$

Hier ist $b = 0$; $c = +16$; $d = +12$. Die Hülfsgleichung ist

$$8y^3 + 96y - 256 = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel $= +2$. Es ist $A = \pm 2$; $B = \pm 4$, und die beiden quadratischen Gleichungen sind,

I. $x^2 - 2x = 2$; II. $x^2 + 2x = -6$.

Die Wurzeln der erstern sind $1 \pm \sqrt{3}$; der zweyten, $-1 \pm \sqrt{-5}$, welche vier Wurzeln der biquadratischen zukommen.

Methode des Descartes.

99. Descartes hat zuerst in seiner Geometrie, 3. Buch, gewiesen, wie eine biquadratische Gleichung in zwey quadratische zerfällt werden könne. Er zeigt aber nicht, wie man die Coefficienten in diesen finde, sondern setzt sie ohne Erläuterung hin. Lambert hat in seinen Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, 2 Th. Art. VIII. diese Methode vorgetragen, aber den Zusammenhang der Hülfsgleichung mit der gegebenen nicht erklärt, welches ich hier thun werde.

100. Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

wo A, B, C auch negativ seyn können, und es zum Theil oder alle sind, wenn x einen positiven Werth hat. Ist $x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$, so müssen a, b, c mögliche Werthe erhalten. Diese sollen nun aus den gegebenen Größen, A, B, C, hergeleitet werden. Das Product entwickelt ist

$$x^4 + (b + c - a^2)x^2 + (ac - ab)x + bc.$$

Also ist

$$A = b + c - a^2 \quad ; \quad B = ac - ab;$$
$$C = bc.$$

Hier ist $b + c = A + a^2$, und $c - b = \frac{B}{a}$,

also $2c = A + \frac{B}{a} + a^2$, und $2b = A - \frac{B}{a} + a^2$.

Nunmehr ist $4bc$, oder $4C = A^2 - \frac{B^2}{a^2} + 2Aa^2 + a^4$,

oder

$$a^6 + 2Aa^4 + (A^2 - 4C)a^2 - B^2 = 0.$$

Dieses ist eine cubische Gleichung für a^2. Sind alle drey Wurzeln möglich, so sind sie, wegen des Gliedes $-B^2$, entweder alle drey, (wenn A negativ und $A^2 > 4C$ ist) oder eine positiv, zufolge (58.). Die Vorzeichen des zweyten und dritten Gliedes mögen auch — seyn. Ist nur eine Wurzel möglich, so ist diese positiv. Denn da der Werth der Gleichung für $a = 0$ ist $-B^2$, und für ein hinlänglich großes positive a positiv wird, so geschieht der Übergang von dem negativen Werthe zum positiven für ein positives aa. In beiden Fällen ist also a eine mögliche Größe, daher auch b und c mögliche Werthe bekommen, und die biquadratische Gleichung läßt sich in zwey quadratische Factoren zerfällen.

101. Die biquadratische Gleichung habe vier mögliche Wurzeln, p, q, r, s, positive oder negative, so hat sie vier mögliche einfache Factoren, $x - p$; $x - q$; $x - r$; $x - s$. Je zwey von diesen geben den einen

quadratiſchen Factor, und die beiden übrigen den andern, daher hat in dem Factor $x^2 - ax + c$ der Coefficient a einen der ſechs Werthe, $p+q$; $p+r$; $p+s$; $q+r$; $q+s$; $r+s$, und es wird für a eine Gleichung vom ſechſten Grade gefunden. Weil aber, wegen des fehlenden zweyten Gliedes in der biquadratiſchen Gleichung, $p+q+r+s=0$ iſt, ſo ſind drey jener Werthe von a den andern gleich und entgegengeſetzt, und daher hat a drey poſitive, und drey eben ſo große negative Werthe, und aa wird durch eine cubiſche Gleichung gegeben, die in dieſem Falle drey mögliche poſitive Wurzeln, als Werthe von aa, hat.

102. Die biquadratiſche Gleichung habe zwey mögliche Wurzeln, p, q, und zwey unmögliche, r, s. Die letztern haben die Form $m+n\sqrt{-1}$ und $m-n\sqrt{-1}$, deren Summe, $2m$, möglich iſt. Nun ſind für a nur zwey mögliche Werthe $p+q$ und $2m = r+s$ vorhanden, da die andern vier Werthe eine unmögliche Größe, $n\sqrt{-1}$, enthalten. Jene beiden Werthe ſind gleich und entgegengeſetzt. Die cubiſche Gleichung für aa hat in dieſem Falle nur eine mögliche poſitive Wurzel.

103. Die biquadratiſche Gleichung habe vier unmögliche Wurzeln. In dieſem Falle werden ihre Factoren x^2+ax+b und x^2-ax+c durch keinen möglichen Werth von x auf 0 gebracht, oder, die Gleichungen $x^2+ax+b=0$ und $x^2-ax+c=0$ haben unmögliche Wurzeln. Die Wurzeln jener bezeichne man durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, die Wurzeln dieſer durch $\gamma \pm \delta\sqrt{-1}$. Die Summe derſelben iſt $=0$, wie die Summe von vier möglichen Wurzeln, alſo $\alpha+\gamma=0$. Nimmt man nun je zwey zuſammen, ſo ſind die Combinationen, I. 2α; II. $(\beta+\delta)\sqrt{-1}$; III. $(\beta-\delta)\sqrt{-1}$; IV. $(\delta-\beta)\sqrt{-1}$; V. $-(\beta+\delta)\sqrt{-1}$; VI. $2\gamma = -2\alpha$. Dieſes ſind die ſechs Werthe von a. Die Quadrate von I. und VI. ſind ſich gleich und poſitiv; die Quadrate von II. und V. ſind ſich gleich, aber beide negativ; ſo auch die Quadrate von III. und IV. Die cubiſche Gleichung für a^2 hat

nun drey mögliche Wurzeln, $4a^2$; $-(\beta+\delta)^2$; $-(\beta-\delta)^2$. Da zwey derselben negativ sind, so hat a nur zwey mögliche, entgegengesetzte, gleiche Werthe.

104. Ist nun a gefunden, so hat man die quadratischen Gleichungen, $x^2+ax+b=0$, und $x^2-ax+c=0$, aufzulösen, welche die Wurzeln der biquadratischen enthalten. Aus der ersten ist

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-b)},$$

aus der zweyten

$$x=+\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-c)}.$$

Es ist $\tfrac{1}{4}a^2-b=\frac{B}{2a}-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{4}a^2$,

$$\tfrac{1}{4}a^2-c=-\frac{B}{2a}+\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{4}a^2.$$

Diese Größen müssen möglich und positiv seyn, wenn x möglich seyn soll.

105. Exempel. Die Gleichung, $x^4-220x^2+240x+8064=0$, aufzulösen.

Die cubische Gleichung ist $a^6-440a^4+16144a^2-57600=0$. Man suche die Wurzeln dieser Gleichung durch Vergleichung je zweyer entgegengesetzter Glieder. Erstlich setze man, daß $16144a^2$ etwas größer als 57600 sey, so ist a^2 etwa $+4$. Diesen Werth versucht, findet sich, daß $+4$ eine Wurzel ist. Nun läßt sich die Gleichung durch a^2-4 dividiren, und dadurch auf eine quadratische herabsetzen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+36$ und $+400$, einerley mit den beiden übrigen Wurzeln der cubischen Gleichung, außer der Wurzel $+4$. Nimmt man $a^2=4$, so ist $b=-168$, und $c=-48$, und die beiden quadratischen Gleichungen sind, $x^2+2x-168=0$; und $x^2-2x-48=0$. Die Wurzeln jener sind $+12$ und -14; die Wurzeln dieser $+8$ und -6. Diese vier Wurzeln sind demnach die Wurzeln der vorgegebenen biquadratischen Gleichung.

Setzt man aa = + 36, so ist b = — 112; c = — 72; $x^2 + 6x - 112 = 0$; und $x^2 - 6x - 72 = 0$. Die Wurzeln der erstern Gleichung sind + 8 und — 14; der zweyten + 12 und — 6.

Setzt man aa = + 400, so ist b = + 84; C = + 96; $x^2 + 20x + 84 = 0$; und $x^2 - 20x + 96 = 0$. Jene Gleichung hat die Wurzeln — 6; — 14: diese, + 12; + 8.

Eulers Auflösung biquadratischer Gleichungen.

106. Euler hat in einer Abhandlung: Conjectatio de formis radicum aequationum, Comm. Petrop vet. T. VI. eine Auflösung biquadratischer Gleichungen gelehrt; die von dem Verfahren bey cubischen Gleichungen hergeleitet ist. Sie besteht darin, die Wurzeln aus drey Stücken, und zwar Quadratwurzeln, zusammen zu setzen. In Eulers Algebra, 2 Th. 1. Abschn. 15. Cap. ist sie auch vorgetragen.

107. Es sey $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo x die Wurzeln der Gleichung bedeutet, und p, q, r, Größen sind, woraus die Coefficienten zusammengesetzt werden sollen, hier aber nicht Wurzeln der Gleichung, wie oben, bedeuten. Es ist

$$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Man setze $p + q + r = f$, so ist

$$x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr},$$

und quadrirt

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Man setze $pq + pr + qr = g$, und $pqr = h$, so ist

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4g + 8(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{h},$$

oder $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$.

Wird diese Gleichung mit einer gegebenen biquadratischen Gleichung, worin der zweyte Terminus fehlt, verglichen, so werden f, g, h durch die Coefficienten in der-

selben bestimmt; es ist also noch nöthig p, q, r aus f, g, h herzuleiten. Da f die Summe derselben, g die Summe der Binionen, nnd h das Product aller drey ist, so sind p, q, r die Wurzeln einer cubischen Gleichung, in welcher die Coefficienten f, g, h, sind, nämlich der Gleichung,

$$y^3 - fy^2 + gy - h = 0.$$

Sind nun die Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so werden daraus die Wurzeln der biquadratischen hergeleitet.

108. Es sey die gegebene biquadratische Gleichung

$$x^4 - ax^2 - bx + c = 0,$$

wo um der bequemen Vergleichung willen die Vorzeichen dieselben mit denen in der vorher aus der angenommenen Form der Wurzel hergeleiteten Gleichung sind. Man lasse beide Gleichungen dieselben seyn, so ist I. $2f = a$, und $f = \frac{1}{2}a$. II. $8\sqrt{h} = b$, also $h = \frac{1}{64}b^2$. III. $f^2 - 4g = c$, also $g = \frac{1}{4}(f^2 - c)$, oder $g = \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{4}c$. Solchergestalt ist die cubische Hülfsgleichung, $y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}aa - c)y - \frac{1}{64}b^2 = 0$, und es kommt nur darauf an, die Wurzeln derselben zu finden.

109. Da die Wurzeln aus p, q, r sowohl negativ als positiv seyn können, so lassen sich aus $\pm\sqrt{p}$; $\pm\sqrt{q}$; $\pm\sqrt{r}$ acht verschiedene Summen machen, wovon aber in jedem Falle nur vier Statt finden, aus folgendem Grunde. Wenn in der biquadratischen Gleichung der Coefficient von x das Vorzeichen — hat, so ist $\sqrt{h}$ oder $\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}$. positiv, also sind die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung $+\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, und $-\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \mp \sqrt{r}$. Hat aber derselbe Coefficient das Vorzeichen +, so ist $\sqrt{h}$ negativ, also sind die vier Wurzeln $+\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, und $-\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$.

Hat die cubische Gleichung drey mögliche positive Wurzeln, so hat die biquadratische vier mögliche Wurzeln. Sind unter den drey möglichen Wurzeln jener negative vorhanden, so sind alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung unmöglich. Hat die cubische Gleichung unmög-

liche Wurzeln, so hat die biquadratische zwey dergleichen. Denn die einzige mögliche Wurzel, p, der cubischen Gleichung ist positiv, wegen des Gliedes h, welches immer positiv ($=\frac{1}{64}b^2$) ist, nach der schon in (100) gemachten Bemerkung. Also ist $\sqrt{p}$ eine mögliche Größe. Das Unmögliche in der Summe der Wurzeln aus den beiden andern $\pm\sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, hebt sich, aber nicht in dem Unterschiede derselben, $\pm\sqrt{q} \mp \sqrt{r}$, da die Summe $q+r$, eine mögliche Größe ist, aber nicht ihr Unterschied. Daher hat die biquadratische Gleichung zwey mögliche Wurzeln.

110. Exempel. $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$. Hier ist $f = 110$; $h = 900$; $g = 1009$. Die cubische Hülfsgleichung ist

$$y^3 - 110y^2 + 1009y - 900 = 0.$$

Diese hat drey positive Wurzeln, wenn alle möglich sind. Sucht man die kleinste, so giebt die Vergleichung der beiden letzten Terminorum für y nahe $+1$. Versucht man diesen Werth, so ist eine Wurzel $= +1$. Die Summe der beiden übrigen ist $= 109$; ihr Product $= 900$. Diese sind also $\frac{109}{2} \pm \sqrt{\frac{8281}{4}} = \frac{109}{2} \pm \frac{91}{2}$, das ist $+100$ und $+9$. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind, wegen des Vorzeichens $+$ in dem Gliede, $+240x$,

$$+1 + 3 - 10 = -6$$
$$+1 - 3 + 10 = +8$$
$$-1 + 8 + 10 = +12$$
$$-1 - 3 - 10 = -14.$$

Warings Methode zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

111. Waring hat in den Philosophical Transactions, 1779, für die Wurzeln der Gleichungen eine Form angegeben, die er für allgemein hält. Hier folgt

die Anwendung, die er auf biquadratische Gleichungen macht, unabhängig von der allgemeinen Form, mit einigen Zusätzen.

112. Die Wurzel einer solchen Gleichung werde aus drey Stücken zusammengesetzt, nämlich $x = p + q + r$, so ist

$$\begin{aligned} x^4 = {} & p^4 + 4p^3 q + 4p^3 r \\ & + q^4 + 4q^3 p + 4q^3 r \\ & + r^4 + 4r^3 p + 4 r^3 q \\ & + 6 p^2 q^2 + 6 p^2 r^2 + 6 q^2 r^2 \\ & + 12 p^2 qr + 12 q^2 pr + 12 r^2 pq, \end{aligned}$$

nämlich alle Combinationen mit Wiederholungen aus den drey Größen p, q, r, mit den als Factoren zugefügten Versetzungszahlen. S. Combination (33.), und polynomischer Lehrsatz.

Diese Partialproducte theile man in drey Theile, ein Product A aus $p + q + r$ in drey eintheilige Factoren, ein Product B aus $(p + q + r)^2$ in zwey solche Factoren, und einen Rest C, um x und x^2 in den Werth von x^4 zu bringen. Dieses kann auf mehr als eine Art geschehen. Es sey

$$A = (4p^2 r + 4q^2 r)(p + q + r)$$
$$B = (4pq + 2r^2)(p + q + r)^2,$$

so ist

$$C = p^4 + q^4 - r^4 + 4pqr^2 - 8p^2 q^2,$$

oder

$$C = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2,$$

und es ist

$$\begin{aligned} x^4 = {} & (4pq + 2r^2)x^2 + 4r(p^2 + q^2)x \\ & + (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2. \end{aligned}$$

112. Die gegebene Gleichung sey

$$x^4 = ax^2 + bx + c,$$

mit jener Normalgleichung identisch, so ist

$$a = 4pq + 2r^2; \quad b = 4r(p^2 + q^2);$$
$$c = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$c = \frac{b^2}{16r^2} - (2r^2 - \tfrac{1}{2}a)^2,$$

und daraus für r die Gleichung

$$r^6 - \tfrac{1}{2}ar^4 + (\tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}c)r^2 - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Die beiden andern Theile, p, q, der Wurzel x haben eine andere Relation zu den gegebenen Grösen a, b, c, und müssen daher durch eine andere Gleichung, als die für r, gefunden werden. Sie selbst haben einerley Relation gegen die Coefficienten, a, b, c, und werden daher durch einerley Gleichung gefunden. Zu jedem Werthe von r gehört ein Werth von p und von q. Bezeichnet man diese überhaupt durch y, so wird die Gleichung für y auf den zwölften Grad steigen müssen, um sowohl die sechs Werthe von p als die von q darzustellen.

Ist r gefunden, so werden p und q durch die Gleichungen, $pq = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r^2$, und $p^2 + q^2 = \frac{b}{4r}$ bestimmt. Es sey, um abzukürzen, $2pq = \alpha$; $p^2 + q^2 = \beta$, so ist

$$p + q = \pm\sqrt{(\beta + \alpha)}$$
$$p - q = \pm\sqrt{(\beta - \alpha)},$$

woraus p und q einzeln bekannt werden.

Zwey gleiche aber entgegengesetzte Werthe von r mit dem zugehörigen Doppelwerthe von $p + q$ verbunden geben die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung.

114. Exempel. Es sey $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$, so ist die Gleichung für r,

$$r^6 - 110r^4 + 1009r^2 - 900 = 0.$$

Die Werthe von r sind ± 1; ± 9; ± 100. Das erste Paar giebt $p^2 + q^2 = \pm 60$; $2pq = +109$. Also ist $p + q = \pm\sqrt{(\pm 60 + 109)}$, oder $p + q = \pm 13$ und ± 7, und die Wurzeln x sind

$+7+1=+8 \qquad +13-1=+12$
$-7+1=-6 \qquad -13-1=-14.$

Die andern beiden Werthe von r geben dieſelben Wurzeln x.

115. Zu dieſer und zugleich zu der Euleriſchen Methode diene als Beyſpiel noch eine Gleichung mit zwey unmöglichen Wurzeln,

$$x^4+14x^2-40x+19=0.$$

Hieraus entſteht die Hülfsgleichung,

$$r^6+7r^4+17r^2-25=0.$$

Ein Paar Wurzeln dieſer Gleichung iſt ± 1. Da $a=-14$; $b=+40$, ſo iſt $epq=-8$; $p^2\mp q^2=\pm 10$; $p+q=\pm\sqrt{(\pm 10-8)}$, und die vier Werthe von x ſind,

$+\sqrt{2}+1 \quad ; \quad +3\sqrt{-2}-1$
$-\sqrt{2}+1 \quad ; \quad -3\sqrt{-2}-1.$

116. Die Gleichung für r^2 iſt dieſelbe mit der nach der Euleriſchen Auflöſung gefundenen für y, wenn man r^2 für y ſetzt, und das Vorzeichen von c ändert. Denn die Wurzeln jener Gleichung ſind die Quadrate von den Theilen, in welche die Wurzeln der biquadratiſchen zerlegt ſind. Aber ſie gilt nicht für die andern beiden Theile p, q, der Wurzel x. Die Coefficienten in der biquadratiſchen Normalgleichung ſind nach der Euleriſchen Normalgleichung anders zuſammen geſetzt, als nach der Waringſchen.

117. Die Zerfällung von $x^4=(p+q+r)^4$ läßt ſich auch folgendergeſtalt vornehmen,

$$x^4=6(p^2+q^2+r^2)x^2-8(p^3+q^3+r^3)x$$
$$-8(p^2+q^2+r^2)^2+6(p^4+q^4+r^4).$$

Dieſe wird aus den Formeln für die Combinationen und Summen der Potenzen von den combinirten Größen (Art. Combination, 43.) leicht hergeleitet, durch Wegſchaffung der Combinationen B und C. Die Combination D iſt hier $=0$.

$$a = 4pq + 2r^2; \quad b = 4r(p^2 + q^2);$$
$$c = (p^2 + q^2)^2 - (r^2 - 2pq)^2.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$c = \frac{b^2}{16r^2} - (2r^2 - \tfrac{1}{2}a)^2,$$

und daraus für r die Gleichung

$$r^6 - \tfrac{1}{2}ar^4 + (\tfrac{1}{16}a^2 + \tfrac{1}{4}c)\,r^2 - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Die beiden andern Theile, p, q, der Wurzel x haben eine andere Relation zu den gegebenen Größen a, b, c, und müssen daher durch eine andere Gleichung, als die für r, gefunden werden. Sie selbst haben einerley Relation gegen die Coefficienten, a, b, c, und werden daher durch einerley Gleichung gefunden. Zu jedem Werthe von r gehört ein Werth von p und von q. Bezeichnet man diese überhaupt durch y, so wird die Gleichung für y auf den zwölften Grad steigen müssen, um sowohl die sechs Werthe von p als die von q darzustellen.

Ist r gefunden, so werden p und q durch die Gleichungen, $pq = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r^2$, und $p^2 + q^2 = \frac{b}{4r}$ bestimmt. Es sey, um abzukürzen, $2pq = \alpha$; $p^2 + q^2 = \beta$, so ist

$$p + q = \pm\sqrt{(\beta + \alpha)}$$
$$p - q = \pm\sqrt{(\beta - \alpha)},$$

woraus p und q einzeln bekannt werden.

Zwey gleiche aber entgegengesetzte Werthe von r mit dem zugehörigen Doppelwerthe von $p + q$ verbunden geben die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung.

114. Exempel. Es sey $x^4 - 220x^2 + 240x + 8064 = 0$, so ist die Gleichung für r,

$$r^6 - 110r^4 + 1009r^2 - 900 = 0.$$

Die Werthe von r sind ± 1; ± 9; ± 100. Das erste Paar giebt $p^2 + q^2 = \pm 60$; $2pq = +109$. Also ist $p + q = \pm\sqrt{(\pm 60 + 109)}$, oder $p + q = \pm 13$ und ± 7, und die Wurzeln x sind

$$+7+1=+8 \qquad +13-1=+12$$
$$-7+1=-6 \qquad -13-1=-14.$$

Die andern beiden Werthe von r geben dieselben Wurzeln x.

115. Zu dieser und zugleich zu der Eulerischen Methode diene als Beyspiel noch eine Gleichung mit zwey unmöglichen Wurzeln,

$$x^4+14x^2-40x+19=0.$$

Hieraus entsteht die Hülfsgleichung,

$$r^6+7r^4+17r^2-25=0.$$

Ein Paar Wurzeln dieser Gleichung ist ± 1. Da $a=-14$; $b=+40$, so ist $epq=-8$; $p^2\mp q^2=\pm 10$; $p+q=\pm\sqrt{(\pm 10-8)}$, und die vier Werthe von x sind,

$$+\sqrt{2}+1 \;;\; +3\sqrt{-2}-1$$
$$-\sqrt{2}+1 \;;\; -3\sqrt{-2}-1.$$

116. Die Gleichung für r^6 ist dieselbe mit der nach der Eulerischen Auflösung gefundenen für y, wenn man r^2 für y setzt, und das Vorzeichen von c ändert. Denn die Wurzeln jener Gleichung sind die Quadrate von den Theilen, in welche die Wurzeln der biquadratischen zerlegt sind. Aber sie gilt nicht für die andern beiden Theile p, q, der Wurzel x. Die Coefficienten in der biquadratischen Normalgleichung sind nach der Eulerischen Normalgleichung anders zusammen gesetzt, als nach der Waringschen.

117. Die Zerfällung von $x^4=(p+q+r)^4$ läßt sich auch folgendergestalt vornehmen,

$$x^4=6(p^2+q^2+r^2)x^2-8(p^3+q^3+r^3)x$$
$$-3(p^2+q^2+r^2)^2+6(p^4+q^4+r^4).$$

Diese wird aus den Formeln für die Combinationen und Summen der Potenzen von den combinirten Größen (Art. Combination, 43.) leicht hergeleitet, durch Wegschaffung der Combinationen B und C. Die Combination D ist hier $=0$.

113. Aufg. Es ist gegeben die Summe von vier Größen, die in geometrischer Progression sind, und die Summe ihrer Quadrate, die Größen zu finden.

Aufl. Es sey das erste Glied $= x$, der Exponent $= u$; die Summe der Glieder $= a$; die Summe der Quadrate $= b^2$, so ist

I. $x\,(1+u+u^2+u^3) = a$

II. $x^2\,(1+u^2+u^4+u^6) = b^2$.

Man multiplicire die erste Gleichung durch $1-u$, die andere durch $1-u^2$, so ist

III. $x\,(1-u^4) = a\,(1-u)$

IV. $x^2\,(1-u^8) = b^2\,(1-u^2)$.

Durch die Division wird

V. $x\,(1+u^4) = \frac{b^2}{a}\,(1+u)$

VI. $\frac{1+u^4}{1-u^4} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1+u}{1-u}$.

VII. $\frac{1+u^4}{1+2u+2u^2+2u^3+u^4} = \frac{b^2}{a^2}$

VIII. $\frac{1+u^4}{2u+2u^2+2u^3} = \frac{b^2}{a^2-b^2}$.

Man setze $\frac{2b^2}{a^2-b^2} = c$, so ist

IX. $u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1 = 0$.

Diese Gleichung aufzulösen ist die Zerfällung derselben in zwey Factoren der bequemste Weg. Man setze

$$u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1 = (u^2 - mu + 1)(u^2 + nu + 1),$$

so ist $m - n = c$, und $mn = c + 2$.

Also ist (34.)

$$m = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + c + 2)}$$

$$n = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + c + 2)}.$$

Die biquadratische Gleichung wird $= 0$, wenn der eine oder der andere ihrer beiden Factoren $= 0$ ist. Setzt man $u^2 - mu + 1 = 0$, so ist $u = \frac{1}{2}m \mp \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$. Wird $u^2 + nu + 1 = 0$ gesetzt, so ist $u = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{(\frac{1}{4}n^2 - 1)}$ Diese sind die vier Wurzeln der Gleichung für u. Sollen sie alle vier möglich seyn, so muß sowohl m^2 als n^2 größer als 4 seyn.

Es ist aber $n^2 = \frac{1}{2}c^2 + c + 2 - c\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + c + 2)}$, also $n^2 - 4 = c(\frac{1}{2}c + 1) - 2 - c\sqrt{((\frac{1}{2}c + 1)^2 + 1)}$. Dieses ist offenbar eine negative Größe, da die Wurzelgröße größer als $\frac{1}{2}c + 1$ ist.

Die Gleichung für u hat also immer wenigstens zwey unmögliche Wurzeln. Die möglichen, wenn solche vorhanden sind, sind in dem Factor $u^2 - mu + 1$, wenn derselbe $= 0$ gesetzt wird, enthalten.

Das Product der beiden möglichen Wurzeln, $\frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$ und $\frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 1)}$ ist $= +1$, eben so wie das Product der beiden unmöglichen Wurzeln; das Product aller ist $= +1$, gleich dem gegebenen Gliede der Gleichung. Ist die eine mögliche Wurzel $= f$, so ist die andere $= \frac{1}{f}$; eben so mit den unmöglichen. Die eine ist das reciproke der andern. Daher heißt die Gleichung eine reciproke. Setzt man in derselben $\frac{1}{z}$ statt u, und multiplicirt alle Glieder mit z, so erhält man dieselbe Gleichung wie für u.

Die Duplicität und Reciprocität der möglichen Wurzel entsteht daher, daß man in einer geometrischen Reihe den Exponenten e umkehren muß, $\frac{1}{e}$ statt e nehmen, wenn die Glieder in entgegengesetzter Folge genommen werden.

Nachdem u gefunden ist, wird x mittelst der Gleichung I. bekannt, oder auch durch die aus I. und IX. hergeleitete Gleichung,

$$(2 + c)x = (1 + c)a - au.$$

Es ist nämlich

$$x(u^4 + u^3 + u^2 + u) = au,$$

und

$$x(u^4 - cu^3 - cu^2 - cu + 1) = 0,$$

also

$$(1 + c)(u^3 + u^2 + u)x - x = au.$$

Die Gleichung I. durch $1 + c$ multiplicirt ist

$$(1 + c)(u^3 + u^2 + u)x + (1 + c)x = (1 + c)a,$$

folglich ist

$$(1 + c)x + x = (1 + c)a - au,$$

oder

$$\frac{2aa}{aa - bb}x = \frac{aa + bb}{aa - bb}a - au.$$

119. Aufg. Es ist gegeben die Summe von fünf Größen, die in geometrischer Progression sind, und die Summe ihrer Quadrate, die Größen zu finden.

Aufl. Es sey das erste Glied $= x$, der Exponent $= u$, die Summe der Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b^2$, so ist

I. $x(1 + u + u^2 + u^3 + u^4) = a$

II. $x^2(1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8) = b^2$

Auf gleiche Art wie in (118.) wird erhalten

$$\frac{1 + u^5}{1 - u^5} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Man dividire die Zähler durch $1 + u$, die Nenner durch $1 - u$, so entsteht

$$\frac{1 - u + u^2 - u^3 + u^4}{1 + u + u^2 + u^3 + u^4} = \frac{bb}{aa}.$$

Hieraus ist

$$\frac{1 + u^2 + u^4}{u + u^3} = \frac{aa + bb}{aa - bb}.$$

Es sey $\frac{aa + bb}{aa - bb} = c$, so ist

$$u^4 - cu^3 + u^2 - cu + 1 = 0.$$

Zerlegt man diese Gleichung in die Factoren $(u^2 - mu + 1)$ $(u^2 + nu + 1)$, so ist $m - n = c$; $mn = 1$, also

$$m = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 1)}$$
$$n = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + 1)},$$

und die vier Wurzeln sind

$$u = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}mm - 1)}$$
$$u = -\tfrac{1}{2}n \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}nn - 1)}.$$

Da $nn = \frac{1}{2}cc + 1 - c\sqrt{(\frac{1}{4}cc + 1)}$, also $nn - 4 = \frac{1}{2}cc - 1 - c\sqrt{(\frac{1}{4}cc + 1)}$, so ist das zweyte Paar Wurzeln unmöglich.

120. Nach dieser Methode kann man die Aufgaben in (118. 119.) für jede Anzahl von Größen auflösen. Es sey allgemein

I. $x(1 + u + u^2 \ldots + u^{r-1}) = a$

II. $x^2(1 + u^2 + u^4 \ldots + u^{2r-2}) = b^2$

und für ein gerades r, $\frac{2bb}{aa - bb} = c$,

so ist

$$u^r - cu^{r-1} - cu^{r-2} \ldots - cu^2 - cu + 1 = 0.$$

Für ein ungerades r sey $\frac{aa + bb}{aa - bb} = c$,

so ist

$$u^{r-1} - cu^{r-2} + u^{r-3} \ldots - cu^3 + u^2 - cu + 1 = 0.$$

121. Von den beiden Aufgaben in (118, 119.) sind in den Anfangsgründen der Algebra von Saunderson, am Ende des ersten Theils andere Auflösungen anzutreffen, die aber daselbst (pag. 260—263 der französischen Übersetzung) vier Seiten groß Quart einnehmen. Zur Erläuterung der Theorie der Gleichungen und zur Übung im Rechnen sind diese Aufgaben nützlich.

122. Man sieht aus der hier geführten Rechnung sehr gut ein, wie die Irrationalität der Coefficien-

ten eine Urſache iſt, daß die Gleichung auf einen Grad ſteigt, der höher iſt, als die Anzahl der geſuchten Größen, wenn die Irrationalität gehoben wird. In beiden Aufgaben läßt die Natur derſelben nur zwey mögliche Werthe der geſuchten Größe zu, aber die Gleichung für dieſe beiden Werthe hat irrationale Coefficienten. Wird ſie mit einem gewiſſen Factor multiplicirt, ſo erhält man zwar rationale Coefficienten, aber zugleich unmögliche Wurzeln.

V. Von den höhern Gleichungen.

123. Die frühzeitige Entdeckung der Methoden zur Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade ließ hoffen, daß man mit der Zeit auch Mittel zur Auflöſung höherer Gleichungen finden würde. Allein in einem Zeitraume von mehr als zweyhundert Jahren iſt alle Bemühung hierin vergeblich geweſen. Man hat die Eigenſchaften der Gleichungen vollſtändiger, allgemeiner und beſtimmter kennen gelernt, iſt aber dadurch nicht zur Auflöſung der Gleichungen in allgemeinen endlichen Ausdrücken gelangt. Die Entwickelung der Wurzeln durch unendliche Reihen, oder durch Kettenbrüche, welche die Analyſis lehrt, die Anwendung der rücklaufenden Reihen, die Hülfsmittel, welche die Differentialrechnung an die Hand giebt, ſind in manchen Fällen brauchbar, aber nicht zur Entdeckung aller Wurzeln einer Gleichung in allen Fällen geeignet. Zur Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade ſind nach den Methoden der italieniſchen Algebraiſten im 16ten Jahrhundert noch andere gefunden; allein dieſe ſcheinen auf höhere Gleichungen nicht anwendbar zu ſeyn, ſo daß die Gleichungen vom vierten Grade der allgemeinen Auflöſung die Gränze ſetzen. Sind die Coefficienten in Zahlen gegeben, ſo kann es mühſam ſeyn, die möglichen Wurzeln einer Gleichung alle zu finden, es iſt aber doch immer möglich.

124. Eigentlich ſind es nur die Gleichungen vom erſten und zweyten Grade, von welchen die Wurzeln

unmittelbar durch die gegebenen Größen vollständig ausgedruckt werden. Bey den cubischen Gleichungen ist dieses nur in dem Falle einer einzigen möglichen Wurzel thunlich. Bey drey möglichen Wurzeln ist die Formel, welche sie darstellt, scheinbar unmöglich. (76.). Formeln für jede derselben setzen eine cubische Gleichung voraus, die ebenfalls drey mögliche Wurzeln hat (77.). Bey den Gleichungen vom vierten Grade werden die Wurzeln nur mittelbar durch die Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade gegeben.

125. Damit man das bisherige Verfahren zur Auflösung der Gleichungen im allgemeinen übersehe, und die Schwierigkeiten bey der Anwendung auf höhere Gleichungen dadurch begreife, wird es gut seyn, die Methoden in der Kürze darzustellen.

Es kommt darauf an, mit der gesuchten Größe, x, eine andere, gleichfalls unbekannte, y, in Verbindung zu bringen, aus der gegebenen Gleichung und der angenommenen zwischen x und y die erstere wegzuschaffen, und eine Gleichung für y zu erhalten, die sich auflösen lasse, worauf man aus der Gleichung zwischen x und y die Werthe von x herleitet. Die Gleichung für y nenne man die Hülfsgleichung, die zwischen x und y die vermittelnde Gleichung. Jene nennt man auch die reducirte Gleichung, und diese die Hülfsgleichung.

126. Eine Gleichung vom zweyten Grade, $xx - ax + b = 0$, aufzulösen, gebraucht man zwar nicht nothwendig eine Hülfsgleichung, allein man kann eine solche in gewissen Fällen mit Vortheil anwenden. Nämlich es sey

$$x = y + \tfrac{1}{2}a,$$

so ist

$$yy + b - \tfrac{1}{4}aa = 0$$
$$y = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - b)},$$

wodurch x gefunden wird.

127. Die cubiſche Gleichung, $x^3 + bx - c = o$, aufzulöſen, ſetze man $x = y - \frac{b}{3y}$, ſo iſt

$$y^3 - c - \frac{b^3}{27y^3} = o,$$

oder $y^6 - cy^3 - \frac{1}{27}b^3 = o$,

eine quadratiſche für y^3. Daraus wird erhalten

$$y^3 = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)}.$$

Man nehme erſtlich das obere Vorzeichen, ſo iſt

$$\frac{1}{y^3} = \frac{27}{b^3}(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c),$$

weil überhaupt $\frac{1}{m+n} = \frac{m-n}{mm-nn}$ iſt. Alſo iſt

$$x = \sqrt[3]{(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} + \tfrac{1}{2}c)}$$
$$- \sqrt[3]{(\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)} - \tfrac{1}{2}c)}.$$

Nimmt man das andere Vorzeichen vor der Wurzelgröße, ſo erhält man denſelben Werth von x, (ſ. 72.).

Vieta hat auf dieſe Art die cubiſchen Gleichungen aufgelöſet, de emendatione aequationum, Cap. VII.

128. Zu der Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen, nach Ferrari's Methode (96.), wird zuerſt die Hülfsgleichung für die eingeführte Größe y gefunden, und darauf die vermittelnde zwiſchen x und y. Dieſes rührt daher, weil die Größe y ſo beſtimmt werden muß, daß dadurch der eine Theil der vorgegebenen Gleichung ein vollſtändiges Quadrat werde, wie es der andere Theil durch den Zuſatz von $2x^2y + y^2$ geworden iſt. Die vorgegebene Gleichung ſey

$$x^4 = bx^2 + cx + d,$$

ſo iſt die Hülfsgleichung

$$8y^3 + 4by^2 + 8dy + 4bd - c^2 = o,$$

und die vermittelnde Gleichung iſt gedoppelt,

$$x^2 + y = \pm x\sqrt{(b + 2y)} \pm \sqrt{(d + y^2)},$$

wo die gleichnamigen Vorzeichen gebraucht werden, wenn c positiv ist, die ungleichnamigen in dem entgegengesetzten Falle. Wenn die beiden Theile der vermittelnden Gleichung quadrirt werden, so ergiebt sich durch Verbindung mit der Hülfsgleichung die Gleichung für x.

129. Wird die biquadratische Gleichung $x^4 + Ax^3 + Bx + C = 0$ in zwey Factoren zerlegt, nach (100.), so führt dieses auf die Hülfsgleichung,

$$y^6 + 2Ay^4 + (A^2 - 4C)y^2 - B^2 = 0,$$

und die vermittelnden Gleichungen sind,

$$x^2 \pm xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}A \mp \frac{B}{2y} = 0.$$

130. Nach der Eulerischen Auflösungsart (106, ff.) ist für die Gleichung,

$$x^4 - ax^2 - bx + c = 0,$$

die vermittelnde Gleichung,

$$x = \sqrt{y'} + \sqrt{y''} + \sqrt{y'''},$$

und die drey Größen, y', y'', y''', sind die Wurzeln der cubischen Hülfsgleichung,

$$y^3 - \tfrac{1}{2}ay^2 + \tfrac{1}{16}(a^2 - 4c)y - \tfrac{1}{64}b^2 = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich in die vorhergehende (129.), wenn für y gesetzt wird $\frac{1}{4}y^2$, und die Coefficienten gehörig vertauscht werden, a mit $-A$; b mit $-B$ und c mit C.

131. Man nehme zur Hülfsgleichung die quadratische, $y^2 - my + n = 0$ und zur vermittelnden die quadratische, $x^2 - pxy + q = 0$, setze aus dieser in jene den Werth von y, so erhält man die biquadratische,

$$x^4 - mpx^3 + (np^2 + 2q)x^2 - mpqx + q^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist keine allgemeine, weil von den Coefficienten des zweyten, vierten und fünften Gliedes einer durch die beiden andern bestimmt wird.

Wenn $q = 1$ ist, so ist die Gleichung eine reciproke, dergleichen in (118. 119.) vorgekommen sind.

131. Die Auflösung höherer Gleichungen wird, wie man aus dem Verfahren für die niedrigern bis zur vierten schließen mag, auf die Erfindung zweyer Gleichungen, einer zwischen der gesuchten x und der neben eingeführten y, und einer Gleichung für y allein ankommen. Die Schwierigkeit ist nur eine Hülfsgleichung zu erhalten, die niedriger ist als die vorgegebene, oder die, wenn sie auf einen höhern Grad steigt, eine niedrigere Gleichung in Rücksicht einer Potenz der unbekannten Größe sey. Die vermittelnde Gleichung, sie mag nun einfach, oder durch die Veränderung der Vorzeichen vielfach seyn, muß durch die verschiedenen Werthe von y alle Werthe der Wurzeln x geben. Die Menge der Combinationen, die hier bey höhern Gleichungen möglich sind, mag auch diese Gleichung auf einen hohen Grad bringen.

132. Tschirnhausen hat in den Actis Erud. für 1683 eine Methode angegeben, wodurch aus der Hülfsgleichung so viele Glieder weggeschafft werden können, als man will, so daß sie eine quadratische werde, oder einer solchen gleichgültig sey, oder gar nur eine zweygliedrige werde. Allein dazu wird oft die Auflösung von Gleichungen eines höhern Grades, als die gegebene ist, erfordert. Daher ist die Methode für Gleichungen über den vierten Grad nicht brauchbar, und selbst für die Gleichungen vom dritten und vierten Grade ist sie viel beschwerlicher als die andern Auflösungsarten.

133. Man setze nämlich in einer für x gegebenen Gleichung $x = m + y$, wo m eine noch unbestimmte Größe ist, so erhält man eine transformirte Gleichung für y, in welcher man m so bestimmen kann, daß einer der Coefficienten Null werde. Setzt man $x^2 = mx + n + y$, so kann man durch gehörige Bestimmung von m und n zwey Coefficienten auf Null bringen, oder zwey Glieder wegschaffen. Setzt man $x^3 = mx^2 + nx + p + y$, so lassen sich m, n, p so annehmen, daß drey Glieder der

transformirten Gleichung wegfallen. Auf diese Art könnte man die Hülfsgleichung für y zu einer zweygliedrigen machen, wenn nicht die Bestimmung der Coefficienten in der Gleichung zwischen x und y zu große Schwierigkeiten entgegensetzte. Die Gleichung für y steigt auf eben den Grad, von welchem die für x gegebene ist. Denn in der vermittelnden Gleichung kann für x jede der Wurzeln der gegebenen Gleichung genommen werden, daher y eben so viele Werthe hat. Durch die Transformation gewinnt man also nichts, wenn nicht zugleich die Auflösung durch die Wegschaffung mehrerer Glieder erleichtert wird.

134. Es sey z. B. die gegebene Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

die vermittelnde,

$$x^2 = mx + n + y.$$

Durch die Elimination von x gelangt man zu einer Gleichung für y von der Form,

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0.$$

In dieser enthält der Coefficient P die ersten Potenzen von m und n; Q die zweyten und ersten nebst dem Producte mn; R die dritten, zweyten und ersten Potenzen nebst den Producten m^2n, mn^2 und mn, wozu in allen dreyen noch gegebene Coefficienten a, b, c, kommen. Sollen nun P und Q jedes = 0 seyn, damit $y^3 = -R$, oder $y = \sqrt[3]{-R}$ werde, so hat man, um m und n zu finden, eine Gleichung vom ersten und eine vom zweyten Grade aufzulösen. Sind diese bestimmt, so ist dadurch R bekannt, also y, und x wird durch die quadratische Gleichung, $x^2 = mx + n + y$, gefunden.

135. Man sieht, daß diese Auflösung einer cubischen Gleichung viel beschwerlicher ist, als die gewöhnliche. Die Auflösung einer biquadratischen ist noch viel mühsamer. La Grange, der über diese Methode sehr tiefsinnige und belehrende Untersuchungen in den Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1770 et 1771. (übersetzt in Michelsens Theorie der Gleichungen) angestellt hat, sagt, daß

die Rechnungen, welche nach derselben bey Gleichungen vom fünften Grade und höhern erfordert werden, so lang und verwickelt seyn würden, daß der unerschrockenste Rechner davon ablassen müßte.

Die Endgleichung zur Bestimmung der Coefficienten m, n, etc. in der vermittelnden Gleichung kann sehr hoch steigen. Wenn die Hülfsgleichung für y vom μten Grade ist, und alle Zwischenglieder weggeschafft werden sollen, so kann jene Endgleichung den Grad $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$ erreichen.

136. Man könnte auch in der vermittelnden Gleichung $y = o$ nehmen. Vereinigt man nun diese und die gegebene Gleichung zu einer einzigen, durch Wegschaffung von x, so kann man in dieser Gleichung zwischen den gegebenen Coefficienten, a, b, c, etc. und den unbestimmten m, n, etc. von den letztern alle bis auf einen so bestimmen, wie es jedesmahl am vortheilhaftesten ist, und dadurch in einzelnen Fällen zu einer Gleichung für x gelangen, die sich bequemer auflösen läßt, als die gegebene. Man muß aber wohl bemerken, daß diese substituirte Gleichung im allgemeinen nur eine Wurzel mit der gegebenen gemein hat.

137. Euler und Bezout haben fast zu gleicher Zeit, jener in den neuen Petersburger Commentarien, T. IX. (für 1762 und 1763) dieser in den Pariser Memoiren für 1765 allgemeine Auflösungsarten vorgetragen, die im wesentlichen einerley sind. (Michelsens: Uebersetzung, S. 365. ff.) Das Verfahren besteht darin, daß man die vermittelnde Gleichung mit der Hülfsgleichung annimmt, und daraus die Gleichung herleitet, die mit der gegebenen identisch gesetzt wird. Z. B. es sey

$$x = a + by + cy^2, \text{ und}$$
$$y^3 = h,$$

so wird hieraus durch schickliche Substitution der Hülfsgröße y eine Gleichung für x gefunden. Diese ist

$$x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - bch)x$$
$$- a^3 + 3abch - b^3h - c^3h^2 = o.$$

Die gegebene Gleichung sey

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = o,$$

so erhält man durch die Vergleichung der Coefficienten in den beiden identischen Gleichungen für x drey Gleichungen zur Bestimmung der vier Größen, a, b, c, h, unter welchen also eine willkührlich ist. Nimmt man c beliebig an, so wird b^2 durch eine quadratische Gleichung gegeben, so daß b zwey Paare gleicher und entgegengesetzter Werthe hat. Daher erhält auch h vier Werthe von dieser Beschaffenheit. Für jeden Werth von h hat y drey Werthe, weil neben der möglichen Wurzel aus einer möglichen Größe noch zwey unmögliche Statt haben, und eine unmögliche Größe drey Wurzeln von dieser Beschaffenheit hat. Die Größe x kann aber nur drey Werthe erhalten. Man sieht, daß auch diese Methode beschwerlicher ist, als die gemeine. Sie giebt inzwischen Anlaß zu guten algebraischen Bemerkungen.

138. Für höhere Gleichungen wird die Rechnung auf diesem Wege so beschwerlich, daß sie so gut wie unausführbar ist. Euler und Bezout haben für die Gleichung vom fünften Grade,

$$x^5 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o,$$

die vermittelnde Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

und die Hülfsgleichung

$$y^5 = h,$$

angenommen, und daraus durch Elimination von y eine Gleichung für x gefunden, deren Vergleichung mit der gegebenen zwar die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung von vier der unbekannten, b, c, d, e, h, giebt, woraus sie aber diese zu scheiden, und jede, außer der willkührlichen, besonders darzustellen, wegen der ungeheuren Rechnung, die es gekostet haben würde, nicht unternommen haben.

139. Die Zusammensetzung der Wurzeln einer Gleichung aus Wurzelgrößen, wie bey der Auflösung cubischer Gleichungen, und nach der Eulerischen Methode

für biquadratische (106.) wird zu keiner Bestimmung derselben verhelfen können. Euler hat es einmahl als eine analogische Muthmaßung vorgetragen, daß die Wurzeln der Gleichungen allgemein eine solche Form haben möchten. De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. vet. Acad. Petrop. T. VI. Wenn $x = p + q$, so wird $p^n + q^n$ durch eine Gleichung vom nten Grade für x, in welcher die Coefficienten Functionen von n sind, und die Potenzen von pq der Folge nach enthalten, gegeben. Setzt man $\sqrt[n]{p}$ für p, und $\sqrt[n]{q}$ für q, so hat die Wurzel die Form $\sqrt[m]{p} + \sqrt[n]{q}$, wie in den Beyspielen (52, 53.)

140. Eine ganz ähnliche Form für die Wurzeln einer Gleichung hat Waring in den Philosophical Transactions, 1779, angegeben. Die Gleichung sey

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + dx^{n-4} - \text{etc.} = 0.$$

Man setze

$$x = py^{\frac{1}{n}} + qy^{\frac{2}{n}} + ry^{\frac{3}{n}} \ldots + vy^{\frac{n-1}{n}},$$

und bilde hieraus die Potenz x^n. In derselben schaffe man die Potenzen von y mit gebrochnen Exponenten durch Substitution von x, x^2, x^3, etc. heraus, so erhält man eine Reihe für x mit ganzen Exponenten, die man mit der gegebenen zu vergleichen hat, um die Werthe von p, q, r, etc. nebst y zu bestimmen. Setzt man $y = 1$, so ist $x = p + q + r + s + \text{etc.}$ welches von Eulers Annahme nur darin verschieden ist, daß x hier aus den formlosen Größen p, q, r, etc. zusammengesetzt wird, dort aber aus den nten Wurzeln solcher Größen. Bey einer Gleichung vom vierten Grade wird q^2 durch eine Gleichung vom dritten gefunden, $y = 1$ gesetzt, dieselbe, welche in (112.) für den durch r bezeichneten Theil gefunden ist.

141. Die Zerfällung einer Gleichung, die über den vierten Grad hinausgeht, in zwey Factoren, wie der biquadratischen, ist nicht anwendbar, weil man dabey auf

Gleichungen von einem nach höhern Grade geräth. Wenn man z. B. eine Gleichung vom fünften Grade in eine Gleichung vom dritten, und eine vom zweyten Grade zerlegen wollte, so haben die Coefficienten in beiden Gleichungen zehnerley Werthe, weil die Gleichung vom fünften Grade fünf Wurzeln hat, woraus sich zu der cubischen Gleichung drey Wurzeln, und zu der quadratischen zwey Wurzeln auf zehnerley Art nehmen lassen. Die Coefficienten werden daher durch Gleichungen vom zehnten Grade gefunden.

142. In besondern Fällen mögen sich Hülfsmittel anbieten, welche die Rechnung im Allgemeinen nicht geben kann. Wenn eine Gleichung nicht unmittelbar gegeben, sondern aus den Bedingungen einer Aufgabe gefunden wird, so ist man von der Beschaffenheit der unbekannten Größe schon vorläufig unterrichtet. Man kann wissen, wie viel mögliche Werthe sie überhaupt haben kann; steigt die Gleichung auf einen höhern Grad, als sie nach dieser Anzahl von möglichen Werthen steigen sollte, so wird man aus dem Gange der Rechnung beurtheilen können, woher dieses entsteht, ob aus der Wegschaffung der Irrationalität der unbekannten Größe oder der Coefficienten. Man wird suchen, ob die Gleichung nicht etwa die Antwort auf einen besondern Fall für die gesuchte Größe enthalte, um alsdann die Zerfällung in Factoren, deren einer den besondern Fall angiebt, zu unternehmen. Man wird, geleitet durch eine deutliche Einsicht in die Beschaffenheit der Untersuchung, vermittelnde Gleichungen entdecken können, die zu einer leichtern Hülfsgleichung führen.

143. Das Unvermögen der Algebra bey den allgemeinen Gleichungen vom fünften Grade an hindert nicht, jede in Zahlen gegebene Gleichung aufzulösen, und die Wurzeln alle, so genau als es erfordert wird, zu finden, wozu mehr als ein Weg vorhanden ist, s. unten IX.

VI. Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen.

144. Es sey die Summe von m Größen, $p+q+r+s+$ etc. $= a$; die Summe aller Producte von je zweyen $= b$; die Summe der Producte von je dreyen $= c$; die Summe der Producte von je vieren $= d$; von je fünfen $= e$; u. s. f. Das Product von allen $= k$, so ist, wenn x irgend eine dieser Größen bedeutet,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} \ldots\ldots \mp k = 0.$$

Bew. Die Summe der Unionen (der einzelnen) ohne eine derselben, wie p, sey $= \alpha$; die Summe der Binionen, in welchen kein p ist, sey $= \beta$; die Summe der Ternionen, die kein p enthalten, $= \gamma$; der Quaternionen ohne p $= \delta$, u. s. w. ist

1) $p + \alpha = a$;	2) $p\alpha + \beta = b$;
3) $p\beta + \gamma = c$;	4) $p\gamma + \delta = d$;
5) $p\delta + \varepsilon = e$;	6) $p\varepsilon + \zeta = f$,
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
$p\vartheta + \iota = i$	$p\iota = k$.

Diese Gleichungen multiplicire man folgeweise durch p^{m-1}; p^{m-2}; p^{m-3}; etc. so ist

1) $p^m + p^{m-1}\alpha$	$= ap^{m-1}$
2) $p^{m-1}\alpha + p^{m-2}\beta$	$= bp^{m-2}$
3) $p^{m-2}\beta + p^{m-3}\gamma$	$= cp^{m-3}$
4) $p^{m-3}\gamma + p^{m-4}\delta$	$= dp^{m-4}$
5) $p^{m-4}\delta + p^{m-5}\varepsilon$	$= ep^{m-5}$
. . . . .	. . . . .
$p^2\vartheta + p\iota$	$= ip$
$p\iota$	$= k$

Man addire die Gleichungen, deren Stellenzahl ungerade ist, und subtrahire davon die Gleichungen von einer geraden Stellenzahl, so ist

$$p^m = ap^{m-1} - bp^{m-2} + cp^{m-3} - dp^{m-4} + ep^{m-5} \ldots \pm ip \mp k.$$

Eine völlig ähnliche Gleichung wird für jede der andern Größen, q, r, s, etc. gefunden. Bezeichnet man sie jede mit dem gemeinschaftlichen Zeichen x, und bringt alle Glieder auf dieselbe Seite, so ist

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - ex^{m-5} + \ldots \mp ip \pm k = 0.$$

Die obern Vorzeichen der letzten Glieder gelten für ein gerades m, die untern für ein ungerades, wenn nämlich alle Größen, p, q, r, etc. positiv sind.

145. Wenn eine oder mehrere der Größen, p, q, r, etc. ihr Vorzeichen ändern oder negativ werden, so wird angenommen, daß dieses in allen Combinationen, worin sie vorkommen, geschieht, daher ändert jede Combination, worin eine ungerade Anzahl negativer Factoren (oder ein einzelner) enthalten ist, das Vorzeichen + in −; da eine Combination, worin eine gerade Anzahl solcher Factoren sich findet, ihr Vorzeichen behält. Ist in der Summe der Combinationen einer Art die Summe der positiven Theile größer als die Summe der negativen, so bleibt das Vorzeichen des Aggregats oder des Coefficienten in der Gleichung, wie in der Normalgleichung (144); ist aber jene Summe kleiner als die letztere, so wird das Vorzeichen das entgegengesetzte. Alles dieses ist aus der Buchstabenrechnung und der Lehre von entgegengesetzten Größen klar, und die Entwickelungen der verschiedenen Fälle an den Gleichungen bis zum vierten Grade geben darüber die völligste Erläuterung.

146. Sind alle m Größen, p, q, r, s, etc. möglich, so ist in der Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, in welcher die

Coefficienten auch negativ seyn mögen, die Anzahl der Abwechslungen zweyer nächsten Vorzeichen (+ — oder — +) so groß als die Anzahl der positiven Wurzeln, und die Anzahl der Folgen gleicher Vorzeichen (+ + oder — —) so groß als die Anzahl der negativen Wurzeln.

Bew. Der für die Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade gebrauchte Beweis dieser Eigenschaft der Gleichungen würde schon für Gleichungen vom fünften Grade viel zu weitläufig und beschwerlich fallen. Der folgende Beweis für Gleichungen vom fünften Grade ist so beschaffen, daß er bey allen höhern angewandt werden kann.

Es seyn p, q, r, s, t fünf mögliche Größen; die Summen ihrer verschiedenen Combinationen seyn a, b, c, d, e, wie vorher erklärt ist, so ist

A) $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0$.

Ferner bedeuten für vier jener Größen, als q, r, s, t, die Symbole, α, β, γ, δ, eben solche Summen, so ist die Gleichung für jede der vier Größen,

B) $x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0$.

Weil $a = p + \alpha$; $b = p\alpha + \beta$; $c = p\beta + \gamma$; $d = p\gamma + \delta$; $e = p\delta$ ist, so ist die Gleichung A) zusammengesetzt aus den beiden Theilen,

C) $x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x$

D) $- px^4 + p\alpha x^3 - p\beta x^2 + p\gamma x - p\delta$ $= 0$

und es entsteht A) aus B) durch die Multiplication mit $x - p$.

Wenn eine oder mehrere der q, r, s, t negativ sind, so werden dadurch einer oder mehrere der Coefficienten, α, β, γ, δ, negativ, und ändern ihre Vorzeichen. Ist p positiv, so sind die Vorzeichen der Reihe D, allemahl denen in der Reihe C bey der nächst höhern Potenz von x entgegengesetzt. Ist aber p negativ, so sind die Vorzeichen in der Reihe D einerley mit denen in der Reihe

C bey der nächst höhern Potenz von x. In beiden Fällen ist die Anzahl der Abwechslungen und der Folgen der Vorzeichen in D dieselbe wie in C oder in B, in dem ersten Falle nur mit durchgängiger Vertauschung von + und —.

Die Vorzeichen in der Reihe A werden durch die Vorzeichen in den beiden Reihen C und D, auf die bekannte Art (Buchstabenrechnung 10.) bestimmt. Sind die Vorzeichen zu einer Potenz in beiden Reihen C, D, einerley, so hat das Glied mit dieser Potenz in A dasselbe Vorzeichen wie das gleichstellige in B; sind sie aber verschieden, so kann dadurch eine Abänderung in der Combination der Vorzeichen in der Reihe A gegen die in B entstehen.

Es sey zuerst p positiv, oder A) entstehe aus B) durch die Multiplication mit x — p.

Man nehme irgend drey auf einander folgende Glieder in B oder in C, und die daraus entspringenden in D, so sind ihre Vorzeichen in einer der folgenden acht Combinationen enthalten.

I.	II.	III.	IV.
+ + +	+ + —	+ — +	+ — —
— — —	— — +	— + —	— + +

V.	VI.	VII.	VIII.
— + +	— + —	— — +	— — —
+ — —	+ — +	+ + —	+ + +

Der Übergang von dem Vorzeichen in der Reihe C zu dem in der Reihe D oder umgekehrt, geschehe bey dem mittlern Gliede jeder derselben, so findet derselbe aus C in D nur Statt in den Combinationen I. II. VII. VIII. Dabey wird immer eine Folge in eine Abwechslung verwandelt. Ein Übergang aus D in C geschieht nur in den Combinationen I. IV. V. VIII. dabey wird entweder eine Folge in eine Abwechslung, oder eine Abwechslung

in eine Folge verwandelt. Nun ist die Anzahl der Übergänge aus C in D nothwendig um Eins grösser als die Anzahl der Rückgänge aus D in C, weil das letzte Glied in D kein zugehöriges in C hat. Folglich ist die Anzahl der Verwandlungen einer Folge in eine Abwechslung nothwendig grösser als die Anzahl der entgegengesetzten Verwandlungen, selbst wenn jeder Rückgang die Vertauschung einer Abwechslung in eine Folge mit sich brächte. Die Gleichung A enthält also wenigstens eine Abwechslung der Vorzeichen mehr als die Gleichung B. Sie kann auch die Abwechslungen in einer noch grössern Anzahl enthalten, wenn die Rückgänge in den Fällen I. und VIII. geschehen.

Es sey zweytens p eine negative Größe, so entsteht, wenn p die absolute Quantität derselben bedeutet, die Gleichung A aus B durch die Multiplication mit $x + p$, oder wird zusammengesetzt aus

C) $x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \delta x = 0,$

D) $+ px^4 - p\alpha x^3 + p\beta x^2 - p\gamma x + p\delta$

Man nehme wiederum drey auf einander folgende Glieder in B oder in C, und die daraus entspringenden in D, so sind die verschiedenen Combinationen der Vorzeichen,

I.	II.	III.	IV.
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −
+ + +	+ + −	+ − +	+ − −

V.	VI.	VII.	VIII.
− + +	− + −	− − +	− − −
− + +	− + −	− − +	− − −

Ein Übergang aus C in D kann in dem mittlern Gliede der obern Reihe nur in den Fällen III. IV. V. VI. erfolgen. Dabey wird immer eine Abwechslung in eine Folge verwandelt. Ein Rückgang aus D in C bey dem mittlern Gliede der untern Reihe geschieht nur in

II. III. VI. VII. Dabey wird entweder eine Folge in eine Abwechslung oder eine Abwechslung in eine Folge verwandelt. Da die Anzahl der Rückgänge um Eins geringer ist, als die der Übergänge aus C in D, so entsteht dadurch in A wenigstens eine Folge der Vorzeichen mehr als in B.

Es sey unter den 5 Größen, p, q, r, s, t, die Anzahl der positiven $= n$, also der negativen $5 - n$. Man nehme p für eine der positiven Wurzeln, so hat die Gleichung B $(n - 1)$ positive Wurzeln und $(5 - n)$ negative Wurzen. Sie hat $(n - 1)$ Abwechslungen der Vorzeichen und $(5 - n)$ Folgen (88.). Die Gleichung A hat daher entweder $(n - 1 + 1)$ Abwechslungen oder mehr. Die überschießende Anzahl derselben über n sey $= u$, so daß die Anzahl der Abwechslungen $N = n + u$ ist. Ferner nehme man p für eine der negativen Wurzeln, so hat die Gleichung B (die nun eine andere als bey der ersten Annahme für p ist) n positive Wurzeln, und $(4 - n)$ negative; also n Abwechslungen, und $(4 - n)$ Folgen der Vorzeichen. Die Gleichung A hat daher entweder $(4 - n + 1)$ Folgen oder noch mehr. Die Anzahl sey $N^1 = 5 - n + v$. Es ist aber $N + N^1 = 5$, also $5 = n + u + 5 - n + v$, folglich $u + v = 0$. Da u und v beide additiv oder gleichnamig seyn müßten, so findet kein anderer Werth für u und v Statt, als 0, und es ist $N = n$; $N^1 = 5 - n$, oder, in einer Gleichung vom fünften Grade ist die Anzahl der Abwechslungen der Vorzeichen gleich der Anzahl der positiven Wurzeln; die Anzahl der Folgen gleich der Anzahl der negativen Wurzeln.

Hieraus läßt sich nun der Satz leicht allgemein erweisen. Gilt er nämlich für eine Gleichung vom mten Grade, so gilt er auch für eine Gleichung vom $(m + 1)$ten Grade, daher auch für eine vom $(m + 2)$ten, u. s. f. Man braucht nur in dem geführten Beweise m statt der bestimmten Zahl 5 zu setzen.

147. Wenn bey der Multiplication einer Gleichung durch $x - p$ die Anzahl der Abwechslungen der Vorzeichen, oder bey der Multiplication durch $x + p$ die Anzahl der Folgen nicht um Eins gröſſer wird als ſie in der multiplicirten Gleichung iſt, ſo zeigt dieſer Widerſpruch gegen den erwieſenen Satz unmögliche Werthe der Wurzeln an. Es ſey die Gleichung, $x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 10x - 50 = 0$. Multiplicirt man dieſe durch $x + 1$, daher die Wurzel -1 hinzu kommt, ſo iſt das Product $x^5 - 7x^4 - x^3 - 3x^2 - 60x - 50 = 0$; dieſe hat zwey Folgen mehr als jene Gleichung, die daher unmögliche Wurzeln enthält. Auch iſt ſie das Product aus $x^2 - 6x - 10$ in $x^3 - 2x + 5$, welcher letztere Factor nicht null werden kann.

148. Wenn ein Glied in der Gleichung fehlt, ſo kann man für daſſelbe ± 0 ſetzen. Haben die beiden nächſten Glieder, das vorhergehende und das folgende, entgegengeſetzte Vorzeichen, ſo darf man daher auf eine poſitive und eine negative Wurzel ſchlieſſen, wenn ſonſt keine Widerſprüche gegen die Möglichkeit in den Coefficienten und ihren Vorzeichen liegen. Haben die beiden nächſten Glieder aber einerley Vorzeichen, ſo ſind wegen des fehlenden Gliedes zwey Wurzeln unmöglich. Denn bey dem Gebrauche des einen Vorzeichens vor 0 werden zwey poſitive, bey dem Gebrauche des andern zwey negative angezeigt. Bey den cubiſchen Gleichungen haben wir z. B. geſehen, daß die Gleichung $x^3 + bx \pm c = 0$ zwey unmögliche Wurzeln hat.

149. Wegen der unmöglichen Wurzeln, die eine Gleichung haben kann, iſt der Satz auf dieſen Fall ſo einzuſchränken, daß eine Gleichung nicht mehr poſitive Wurzeln als Abwechslungen der Vorzeichen, und nicht mehr negative Wurzeln als Folgen gleicher haben könne. Es wird unten gezeigt, daß die Form der unmöglichen Wurzeln iſt $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, ſo daß das Product $x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})$ in $x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})$ iſt $x^2 = 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. Das Product aller unzerleg-

baren Doppelfactoren in einer Gleichung nenne man P, das Product der einfachen von der Form $x - p$ nenne man Q. Wird das Product P mit einem Factor $x - p$ multiplicirt, wo p positiv ist, so kommt zu der Combination der Vorzeichen in P wenigstens eine Abwechslung hinzu; wird P durch $x + p$ multiplicirt, so kommt wenigstens eine Folge gleicher Vorzeichen hinzu. Durch die Multiplication mit allen Factoren von der Form $x - p$ in Q kommen also zu der Combination der Vorzeichen in P wenigstens so viele Abwechslungen als positive Wurzeln vorhanden sind, hinzu, und durch die Multiplication mit Factoren von der Form $x + q$ wenigstens so viele Folgen gleicher Vorzeichen als negative Wurzeln da sind. Die Anzahl der Abwechslungen kann daher wohl größer als die Anzahl der positiven Wurzeln seyn, aber nicht kleiner, so wie die Anzahl der Folgen wohl größer als die Anzahl der negativen Wurzeln seyn kann, aber nicht kleiner.

Daher hat eine Gleichung, in welcher nur eine Abwechslung der Vorzeichen ist, nur eine mögliche positive Wurzel; hat sie nur eine Folge gleicher Vorzeichen, so hat sie nur eine negative Wurzel.

150. Der Satz (146) wird oft Harriots Lehrsatz genannt, aber mit Unrecht, s. Algebra, Th. I. S. 50. Man hat ihn lange Zeit ohne andern Beweis als durch Induction aufgestellt. Saunderson sagt in seiner Algebra §. 434, daß er in keinem Lehrbuche von dieser Wissenschaft einen Beweis dieses Satzes angetroffen habe, ob er gleich fast in allen vorkommt. Er setzt hinzu, daß man wegen der ungeheuren Menge von Fällen, die man durchgehen müßte, schwerlich es versuchen möchte einen allgemeinen Beweis zu finden. Stübner hat zuerst in einer Disputation, Leipzig 1720, den Satz bewiesen, aber auf einem zu beschwerlichen Wege. Der Abbé de Gua hat einen gedoppelten Beweis des Satzes gegeben, in den Mém. de l'Acad. des Scienc. 1741. Segner hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1756,

und in seinen Elem. Anal. Finit. §. 506 — 519 einen Beweis mitgetheilt, der nach Kästners Urtheil aber in große Weitläufigkeit zu führen scheint, wenn man alles darin genau auseinander setzen wollte. Schon in einer akademischen Schrift zu Jena 1718 legte er den nachher weiter ausgeführten Beweis vor. Von Äpinus ist ein Beweis in den Mém. de l'Ac. de Berlin 1758 anzutreffen. Kästner beweiset den Satz durch die Differentialrechnung, mehr scharfsinnig als methodisch, in einer akademischen Schrift 1745, hernach in seiner Analysis des Unendlichen §. 186. Man sehe auch Tempelhoffs Anal. endl. Größen §. 550 ff. Karsten Matheſis theoretica, §. 86 — 92. Der Beweis, den ich hier geführt habe, hat einiges mit dem Segnerischen gemein, ist aber kürzer und einleuchtender, besonders durch die Verbindung mit dem für Gleichungen vom vierten Grade schon geführten Beweise.

151. Die Gleichung $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} \ldots \mp ix \pm k = 0$, hat m Wurzeln, deren Summe $= a$, Summe der Producte nach Binionen $= b$; nach Ternionen $= c$; nach Quaternionen $= d$; u. s. f. Summe von je $(m - 1)$ derselben $= i$; Product aller $= k$ ist, die obern Zeichen gebraucht für ein gerades m, die untern für ein ungerades. Nur müssen, wenn die Wurzeln alle mögliche Größen seyn sollen, alle Bedingungen erfüllt werden, die in der Form der Coefficienten versteckt liegen.

Bew. Denn es werden hier durch die m Coefficienten von dem zweyten Terminus an m Bestimmungen für eben so viele Größen, p, q, r, s, etc. gegeben. Setzt man nämlich ihre Summe $= a$; die Summe der Producte von je zweyen $= b$, u. s. f. wie in (144), so erhält man die vorgegebene Gleichung, und es ist jede der p, q, r, etc. eine der durch x bezeichneten Größen, die der Gleichung ein Genüge thut, das ist, eine Wurzel derselben. Nur muß dabey noch untersucht werden, ob die m Coefficienten alle Bedingungen für die gesuchten Größen

enthalten, oder ob nicht noch in der Form der Coefficienten Bedingungen versteckt liegen.

152. Es ist nämlich, wenn das Aggregat von m möglichen Größen mit einerley oder verschiedenen Vorzeichen gegeben wird, nicht mehr ganz willkührlich, wie man das Aggregat der Producte nach den Combinationen je zweyer oder mehrerer aus ihnen allen annehmen wolle. So ist, wenn a das Aggregat der Größen selbst, und b das Aggregat der Producte je zweyer ist, allemahl $aa > 2b$, da die Summe der Quadrate $= aa - 2b$ ist, also allemahl eine positive Größe bleibt. (Combination, 43. 44. und combinatorische Analysis, 53.). Ist b negativ, so ist die Quantität davon ganz willkührlich, aber nicht, wenn b positiv ist.

Ist c das Aggregat aller Producte nach Ternionen, und d das aller Quaternionen, so ist die Summe der Biquadrate $= a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2 - 4d$, (comb. Anal. 53.), also $a^4 + 2b^2 > 4a^2b - 4ac + 4d$. Die Formeln für die Summen der geraden Potenzen combinirter Größen a. a. O. geben noch mehr solche Bedingungen.

Aus den Formeln für die Summen der Quadrate von den Combinationen (Combination 48.) folgen auch Bedingungen für die Relationen derselben.

Es ist $bb > 2ac - 2d$

$cc > 2bd - 2ae + 2f$

$dd > 2ce - 2bf + 2ag - 2h$

u. s. f.

wo die kleinen Buchstaben statt der großen a. a. O. gesetzt sind.

153. Wenn die in jenen Formeln enthaltenen Bedingungen durch die Coefficienten einer Gleichung nicht erfüllt werden, so sind nothwendig unmögliche Wurzeln vorhanden; allein umgekehrt folgt nicht, daß alle Wurzeln möglich sind, wenn den Bedingungen Genüge geschieht. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 8x^3 + 7x^2$

$-10x-50=0$, die zwey unmögliche Wurzeln hat (147), iſt $a=+8$; $b=+7$; $c=+10$; $d=-50$. Hier iſt $aa>2b$; auch iſt $a^4+2b^2>4a^2b-4ac+4d$; aber es iſt nicht $bb>2ac-2d$, da $bb=+49$; $2ac-2d=160+100$ iſt.

154. Wenn die Gleichung in (151.) lauter mögliche Wurzeln hat, ſo iſt

$$(m-1)\,aa > 2mb;$$
$$2(m-2)\,bb > 3(m-1)\,ac;$$
$$3(m-3)\,cc > 4(m-2)\,bd;$$
$$4(m-4)\,dd > 5(m-3)\,ce;$$
$$5(m-5)\,ee > 6(m-4)\,df;$$

etc.

Der Beweis durch Anwendung der Differentialrechnung iſt in Eulers Differentialrechnung, Th. II. Kap. 13. anzutreffen. Daſelbſt und in dem vorhergehenden Kapitel iſt die Lehre von der Entdeckung unmöglicher Wurzeln umſtändlich vorgetragen. Man ſehe auch noch ſeine Abhandlung: Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoſcendi. Comm. novi Ac. Retrop. T. XIII. Newtons Regel dazu, in der Arithm. universali, pag. 184. gründet ſich auf die hier zuletzt angeführten Bedingungsformeln. Den Beweis der Newtoniſchen Regel hat Campbell in den Philoſ. Trans. nr. 404. geführt, woraus er Newtons Arithm. univ. von dem Herausgeber s'Graveſand angehängt iſt. Er hat noch eine künſtliche Regel beygefügt, wodurch man finden kann, wie viele unmögliche wenigſtens Wurzeln in einer Gleichung enthalten ſind. S. Algebra, Th. I. S. 62.

155. Die Betrachtung quadratiſcher Gleichungen hat gezeigt, daß in dem Falle eines Widerſpruches gegen die Bedingungen über die Relationen der Coefficienten dennoch eine Form der Wurzeln ſich ergiebt, durch welche ſie in Verbindung mit einander eben ſo die Coeffi-

cienten hervorbringen, wie es bey möglichen Wurzeln geschieht. Bey cubischen und biquadratischen Gleichungen entstehen aus der Verbindung unmöglicher Wurzeln mit möglichen die Coefficienten eben so, wie sie aus möglichen zusammengesetzt werden. Diese Form ist $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$. Die unmöglichen Wurzeln sind in den bisher betrachteten Gleichungen paarweise vorhanden. Dadurch wird ihre Summe etwas mögliches, so auch das Product $\alpha^2 + \beta^2$, und die Summe der Producte aus jeder in die übrigen möglichen Wurzeln.

156. Solchergestallt erhellt, wie unter der Bedingung, daß die unmöglichen Wurzeln paarweise, von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ genommen werden, aus den Combinationen derselben sowohl unter einander als mit möglichen Größen eben eine solche Gleichung entsteht, als für den Fall, da alle combinirten Größen möglich sind. Inzwischen darf man doch fragen, ob jede gegebene Gleichung entweder auf die eine oder die andere Art hervorgebracht werde, und ob nicht auch in gewissen Fällen selbst die Form, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, unbrauchbar seyn könne.

157. Diesen Zweifel zu heben, bemerke man, daß bey der Aufnahme unmöglicher Größen von der Form, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, die Zusammensetzungen der Combinationen nicht mehr den Bedingungen unterworfen bleiben, welche bey möglichen Größen die relative Quantität derselben einschränken, und ihr gewisse Gränzen anweisen. Diese Bedingungen sind als Gleichungen neben denjenigen anzusehen, welche die Coefficienten, als Summen von Combinationen der Wurzeln, geben. Werden jene Bedingungen bey Seite gesetzt, so erhält man aus einer Gleichung vom $m$ten Grade aus den m Coefficienten (den von der höchsten Potenz der Einheit gleich genommen) eben so viele unbedingte Gleichungen, wodurch m Wurzeln der Gleichung, nicht mehr und nicht weniger, bestimmt sind, unter welchen aber Paare von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, vorhanden seyn können. Bey der Multiplication erdich-

ter oder eingebildeter Größen, $\beta\sqrt{-1}$, werden die Regeln für die Vorzeichen der Producte möglicher Größen umgeändert, daher auch die einfach geraden Potenzen einer solchen Größe das Vorzeichen — erhalten. Bey diesen Annahmen steht nichts im Wege, den Satz (151.) als allgemein aufzustellen.

Die Anwendung dieser Bemerkungen auf Gleichungen vom zweyten, dritten und vierten Grade wird sie hinlänglich erläutern und bestätigen.

158. Die beiden möglichen Wurzeln der quadratischen Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, seyn $\alpha + \beta = p$, und $\alpha - \beta = q$, so ist $a = 2\alpha$; $b = \alpha^2 - \beta^2$. Also ist $4b < a^2$, und $2b < p^2 + q^2$. Setzt man $\beta\sqrt{-1}$ statt β, also $-\beta^2$ statt $+\beta^2$, oder β^2 statt $-\beta^2$, so ist $4b > a^2$, und $2b > p^2 + q^2$.

159. Die drey möglichen Wurzeln der cubischen Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, seyn $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$, und r, so ist $a = 2\alpha + r$; $b = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha r$; $c = (\alpha^2 - \beta^2)\, r$. Hieraus ist

$$a^2 - 2b = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + r^2,$$
$$a^2 - 3b = (\alpha - r)^2 + 3\beta^2,$$
$$b^2 - 3ac = (\alpha^2 - \beta^2 - \alpha r)^2 + 3r^2\beta^2.$$

Sind alle drey Wurzeln möglich, so ist nicht allein nothwendig $aa > 2b$, sondern auch $aa > 3b$, und dann auch $bb > 3ac$. Setzt man $\beta\sqrt{-1}$ für β, wodurch $-\beta^2$ statt $+\beta^2$ zu stehen kommt, so kann von jenen Sätzen das Gegentheil Statt haben. Findet sich dieses Gegentheil, so sind zwey Wurzeln unmöglich.

160. Die Gleichung, $x^3 + bx - c = 0$, hat nothwendig unmögliche Wurzeln, wenn b positiv ist, da alsdann eine Summe von Quadraten negativ ist. Aber die Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, giebt, $2\alpha + r = 0$; daher $b = 3\alpha^2 + \beta^2$; $c = 2\alpha(\beta^2 - \alpha^2)$. Hieraus ist

$$4b^3 - 27c^2 = 4\beta^2(9\alpha^2 - \beta^2)^2.$$

In dem Falle dreyer möglichen Wurzeln ist nothwendig $4b^3 > 27c^2$, so wie in dem Falle, da zwey Wurzeln unmöglich sind, $4b^3 < 27c^2$ ist. Daher auch umgekehrt sind alle drey Wurzeln möglich, wenn $4b^3 > 27c^2$ ist; und zwey unmöglich, wenn $4b^3 < 27c^2$ ist. Dieses rührt daher, daß β^2 ein Factor der Bedingungsformel ist.

161. Die biquadratische Gleichung $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, habe die möglichen Wurzeln, $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$; $\gamma + \delta = r$; $\gamma - \delta = s$, so ist

I. $a = 2\alpha + 2\gamma$

II. $b = 4\alpha\gamma + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2$

III. $c = 2(\alpha^2 - \beta^2)\gamma + 2(\gamma^2 - \delta^2)\alpha$

IV. $d = (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2)$.

Die Summe der Quadrate der Wurzeln, oder $aa - 2b$, ist $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2$, eine nothwendig positive Größe. Auch ist $3aa - 8b$ positiv. Denn $3aa = 12.(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2$, also $3aa - 8b = 4\alpha^2 - 8\alpha\gamma + 4\gamma^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2 = 4(\alpha - \gamma)^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2$. Nimmt man $\beta\sqrt{-1}$ statt β, oder $\delta\sqrt{-1}$ statt δ, oder beides, so können beide Formeln negativ werden.

162. Man sieht hieraus, warum die Erfüllung der Bedingung wegen des positiven Werthes einer Formel nicht nothwendig mögliche Wurzeln anzeigt. Denn das Quadrat der unmöglichen Größe kann klein genug seyn, um eine Formel positiv zu lassen.

163. Der Beweis des Satzes, daß die Wurzeln einer jeden Gleichung, in welcher die Exponenten der unbekannten Größe alle ganze Zahlen sind, entweder mögliche Größen, oder unmögliche von der Form, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, sind, ist auf mehrere Arten versucht worden. Zuerst von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746, dessen Beweis auch in dem Traité du Calcul

intégral par Bougainville, T. I. p. 47. angetroffen wird. Ein Nachtrag, worin d'A. auf eine ihm gemachte Bedenklichkeit anwortet, ſteht in ſeinen Opuſcules mathém. T. IV. Mem. XXVIII. Euler hat zweyerley Methoden den Satz zu erweiſen angegeben, in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1749. Foncenex, der bey dem erſten Euleriſchen Beweiſe einen Anſtoß fand, hat in den Miſcellaneis philoſophico - mathematicis ſocietatis Taurinenſis, T. I. (Taurini 1759) ſelbſt einen Beweis zu geben geſucht. Nachher hat la Grange hierüber Unterſuchungen angeſtellt, in dem Nouveaux Mém. de l'Acad. de Berlin, 1772, worin er insbeſondere zwey Mängel des erſten Euleriſchen Beweiſes hebt. In den Actis Acad. Petrop. für 1781 iſt ein Beweis von Fuß enthalten. la Place hat in dem Journal de l'école normale einen Beweis mitgetheilt, den la Croix in ſeinem Traité du calcul diff. et int. T. I. nr. 162. 163. eingerückt hat. la Grange, der in ſeiner Schrift über die Auflöſung numeriſcher Gleichungen S. 181. ff. einen Abriß der vornehmſten Beweisarten unſers Satzes giebt, ſagt von dem letzten Beweiſe, dem von la Place, daß er bloß als Beweis betrachtet vollkommen genüge, aber daß es ſo gut als unmöglich ſey, nach der dabey angewandten Analyſis eine Gleichung in mögliche Factoren von zwey Dimenſionen zu zerlegen. Gauß hat in einer kleinen Schrift: Demonſtratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel ſecundi gradus reſolvi poſſe, Helmſtadii 1799, 4. die mehreſten der vorher angezeigten Beweiſe mit Scharfſinn geprüft, und giebt am Ende einen neuen Beweis, der aber auf trigonometriſchen Hülfsſätzen beruht, alſo nicht rein algebraiſch iſt. Alle die hier angeführten Beweiſe ſind ſchwer zu faſſen, wenn man auch ſchon einige Übung in analytiſchen Unterſuchungen hat. Die vorher (157.) gemachte Bemerkung erklärt den Urſprung und die Form der unmöglichen Wurzeln unmittelbar aus der Natur der Combinationen der Wurzeln. Die Vorzeichen

In dem Falle dreyer möglichen Wurzeln ist nothwendig $4b^3 > 27c^2$, so wie in dem Falle, da zwey Wurzeln unmöglich sind, $4b^3 < 27c^2$ ist. Daher auch umgekehrt sind alle drey Wurzeln möglich, wenn $4b^3 > 27c^2$ ist; und zwey unmöglich, wenn $4b^3 < 27c^2$ ist. Dieses rührt daher, daß β^2 ein Factor der Bedingungsformel ist.

161. Die biquadratische Gleichung $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, habe die möglichen Wurzeln, $\alpha + \beta = p$; $\alpha - \beta = q$; $\gamma + \delta = r$; $\gamma - \delta = s$, so ist

$$\text{I. } a = 2\alpha + 2\gamma$$

$$\text{II. } b = 4\alpha\gamma + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2$$

$$\text{III. } c = 2(\alpha^2 - \beta^2)\gamma + 2(\gamma^2 - \delta^2)\alpha$$

$$\text{IV. } d = (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2).$$

Die Summe der Quadrate der Wurzeln, oder $aa - 2b$, ist $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2$, eine nothwendig positive Größe. Auch ist $3aa - 8b$ positiv. Denn $3aa = 12(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2$, also $3aa - 8b = 4\alpha^2 - 8\alpha\gamma + 4\gamma^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2 = 4(\alpha - \gamma)^2 + 8\beta^2 + 8\delta^2$. Nimmt man $\beta\sqrt{-1}$ statt β, oder $\delta\sqrt{-1}$ statt δ, oder beides, so können beide Formeln negativ werden.

162. Man sieht hieraus, warum die Erfüllung der Bedingung wegen des positiven Werthes einer Formel nicht nothwendig mögliche Wurzeln anzeigt. Denn das Quadrat der unmöglichen Größe kann klein genug seyn, um eine Formel positiv zu lassen.

163. Der Beweis des Satzes, daß die Wurzeln einer jeden Gleichung, in welcher die Exponenten der unbekannten Größe alle ganze Zahlen sind, entweder mögliche Größen, oder unmögliche von der Form, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, sind, ist auf mehrere Arten versucht worden. Zuerst von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746, dessen Beweis auch in dem Traité du Calcul

intégral par Bougainville, T. I. p. 47. angetroffen wird. Ein Nachtrag, worin d'A. auf eine ihm gemachte Bedenklichkeit anwortet, ſteht in ſeinen Opuſcules mathém. T. IV. Mem. XXVIII. Euler hat zweyerley Methoden den Satz zu erweiſen angegeben, in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1749. Foncenex, der bey dem erſten Euleriſchen Beweiſe einen Anſtoß fand, hat in den Miſcellaneis philoſophico - mathematicis ſocietatis Taurinenſis, T. I. (Taurini 1759) ſelbſt einen Beweis zu geben geſucht. Nachher hat la Grange hierüber Unterſuchungen angeſtellt, in dem Nouveaux Mém. de l'Acad. de Berlin, 1772, worin er insbeſondere zwey Mängel des erſten Euleriſchen Beweiſes hebt. In den Actis Acad. Petrop. für 1781 iſt ein Beweis von Fuß enthalten. La Place hat in dem Journal de l'école normale einen Beweis mitgetheilt, den la Croix in ſeinem Traité du calcul diff. et int. T. I. nr. 162. 163. eingerückt hat. La Grange, der in ſeiner Schrift über die Auflöſung numeriſcher Gleichungen S. 181 ff. einen Abriß der vornehmſten Beweisarten unſers Satzes giebt, ſagt von dem letzten Beweiſe, dem von la Place, daß er bloß als Beweis betrachtet vollkommen genüge, aber daß es ſo gut als unmöglich ſey, nach der dabey angewandten Analyſis eine Gleichung in mögliche Factoren von zwey Dimenſionen zu zerlegen. Gauß hat in einer kleinen Schrift: Demonſtratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel ſecundi gradus reſolvi poſſe, Helmſtadii 1799, 4. die mehreſten der vorher angezeigten Beweiſe mit Scharfſinn geprüft, und giebt am Ende einen neuen Beweis, der aber auf trigonometriſchen Hülfsſätzen beruht, alſo nicht rein algebraiſch iſt. Alle die hier angeführten Beweiſe ſind ſchwer zu faſſen, wenn man auch ſchon einige Übung in analytiſchen Unterſuchungen hat. Die vorher (157.) gemachte Bemerkung erklärt den Urſprung und die Form der unmöglichen Wurzeln unmittelbar aus der Natur der Combinationen der Wurzeln. Die Vorzeichen

der Producte und Potenzen den Regeln, die bey möglichen Größen gelten, zuwider setzen, heißt unmögliche Größen einführen.

164. Die unmöglichen Wurzeln können auch andere Formen zu haben scheinen, als die, $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, aber dergleichen lassen sich immer auf diese bringen. D'Alembert hat dieses an einigen Beyspielen gezeigt, sur la cause des vents, pag. 102. Man sehe auch la Grange a. a. O. S. 182. und la Croix a. a. O. nr. 164 — 188. Davon noch in dem Artikel, unmögliche Größen.

165. Die Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, habe lauter mögliche Wurzeln, p, q, r, s, etc. an der Zahl m. Für x werde irgend ein Werth, positiver oder negativer, gesetzt, und der Werth des Aggregats aller Glieder, oder der Werth der Gleichung sey $= y$, so ist

$$(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)\text{ etc.} = y.$$

Bew. Es sey nach Absonderung einer der Wurzeln, als p, das Aggregat der übrigen $= \alpha$; das Aggregat ihrer Binionen $= \beta$; ihrer Ternionen $= \gamma$; ihrer Quaternionen $= \delta$; u. s. f. und $x^{m-1} - \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} - \gamma x^{m-4} + \delta x^{m-5} - \text{etc.} = z$. Diese Function von x werde multiplicirt durch $x - p$, so ist

$$x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} - \text{etc.}$$
$$- p.. + \alpha p.. - \beta p.. + \gamma p.. - \text{etc.}$$
$$= (x-p)z.$$

Nun ist $\alpha + p$ das Aggregat aller Wurzeln der vorgegebenen Gleichung; $\beta + \alpha p$ das Aggregat ihrer Binionen; $\gamma + \beta p$ ihrer Ternionen; $\delta + \gamma p$ ihrer Quaternionen, u. s. f. wie in dem Beweise (144.). Da nun a, b, c, d, etc. eben diese Aggregate sind, so ist $y = (x-p)z$. Nimmt man statt p eine der andern Wurzeln, q, r, s, etc. so ergiebt sich auf gleiche Art, daß die Function y auch die Factoren, $(x-q)$, $(x-r)$, $(x-s)$, u. s. f. enthält. Die Anzahl aller dieser Facto-

ren nebst dem zuerst genommenen, $x - p$, ist $= m$, und die höchste Potenz von x in dem Producte ist x^m. Folglich enthält y nicht mehr Factoren als die m Factoren von der Form $x - p$.

166. Die Gleichung, $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$, habe zwey unmögliche Wurzeln, $p = A + B\sqrt{-1}$; $q = A - B\sqrt{-1}$, die übrigen möglichen seyn r, s, t, etc. Für irgend einen Werth von x sey der Werth der Gleichung $= y$, es ist

$$(x^2 - (p+q)x + pq)(x-r)(x-s)(x-t)\,\text{etc.} = y.$$

Bew. Man setze das Aggregat der möglichen Wurzeln $= \alpha$; ihrer Binionen $= \beta$; ihrer Ternionen $= \gamma$, u. s. f. daraus formire man die Function,

$$x^{m-2} - \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} - \gamma x^{m-5} + \delta x^{m-6} + \text{etc.} = z.$$

Diese werde mit $x^2 - (p+q)x + pq$ multiplicirt, so ist

$$\begin{array}{l} x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} - \text{etc.} \\ \quad -p.. \quad +\alpha p.. \quad -\beta p.. \quad +\gamma p.. \\ \quad -q.. \quad +\alpha q.. \quad -\beta q.. \quad +\gamma q.. \\ \qquad\quad +pq.. \quad -\alpha pq.. \quad +\beta pq.. \\ = (x^2 - (p+q)x + pq)z. \end{array}$$

Die Coefficienten sind mögliche Größen, weil $p + q = 2A$; $pq = A^2 + B^2$ ist. Sie sind die Aggregate der Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. f. von den Wurzeln, p, q, r, s, etc. wie es a, b, c, d, etc. sind (151.). Also ist $y = (x^2 - (p+q)x + pq)(x-r)(x-s)$ etc.

167. Die Gleichung, $x^{m-2} - \alpha x^{m-3} + \beta x^{m-4} - \text{etc.} = 0$, habe zwey unmögliche Wurzeln r, s, so hat sie den Factor, $(x^2 - (r+s)x + rs)$, und die Gleichung, $y = 0$, hat zwey solche quadratische mögliche Factoren. Auf diese Art erhellt, daß die Gleichung, $y = 0$, so viele mögliche quadratische Factoren

enthält, als Paare unmöglicher Wurzeln in ihr vorhanden sind.

Daher gilt der Satz (165.) auch für den Fall, da eine Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

168. Exempel. Es sey $x^6 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind, $+2$, $+3$, -4, $+3 \pm 2\sqrt{-1}$. Daher ist der Werth der Gleichung $= (x-2)(x-3)(x+4)(x^2 - 6x + 13)$. Der Werth der Gleichung so wie des Products für $x = +5$ ist $= +432$, für $x = +1$ ist der Werth beider $= +80$; für $x = -2$ ist der Werth $= +1160$; für $x = -5$ ist der Werth $= -3808$.

169. Ist für eine Gleichung eine mögliche Wurzel, p, oder ein Paar unmöglicher Wurzeln, $A \pm B\sqrt{-1}$, gefunden, so läßt sich die Gleichung durch die Division mit $x - p$, oder mit $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, um einen Grad, oder um zwey Grade erniedrigen.

170. Exempel. Es sey $x^4 - ax^3 - bx^2 + ax - (1-b) = 0$. Diese Gleichung hat die beiden Wurzeln, ± 1, und läßt sich daher durch $x - 1$ und $x + 1$, oder durch $x^2 - 1$ dividiren. Der Quotient ist $x^2 - ax + (1-b) = 0$. Jene beiden Wurzeln lassen sich gar nicht als Antworten auf die Frage, deren Beantwortung in der Gleichung enthalten ist, ansehen. Denn die Wurzeln, welche diese Antworten sind, müssen von den gesammten Coefficienten, als den durch die Frage gegebenen Größen, abhangen. Diese echten Wurzeln sind $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b + 1)}$.

Die Frage von der Zeit des Jahrs oder dem Orte der Sonne, bey welchen die Dämmerung am kleinsten ist, führt auf diese Gleichung. Die gesuchten Wurzeln sind Sinus der Declination der Sonne. (Kästners astronom. Abh. I. S. 434. Fuß im astron. Jahrb. 1787. S. 233.). Wenn die Frage auch allgemeiner

abgefaßt würde, so sind die Wurzeln ± 1 doch unbrauchbar, weil die Frage für einen Stern in dem einen oder dem andern Weltpole nicht gethan werden kann; es würde daraus folgen, daß ein Cosinus unendlich groß sey. Nur für die Gleichung in abstracto können sie als Wurzeln gelten.

171. Man unterscheide die wesentlichen (echten) und fremden (zufälligen) Wurzeln einer Gleichung. Jene sind die, welche von allen Coefficienten, oder von allen Größen, woraus diese zusammengesetzt sind, abhangen; die fremden hängen nur von einigen dieser Größen ab. Joh. Bernoulli nennt dergleichen Wurzeln radices peregrinas, die wesentlichen genuinas. Opp. T. IV. p. 42. Die fremden Wurzeln gelten also für einen besondern Fall der Frage, oder die Gleichung hat durch Multiplicationen bey der Wegschaffung der Irrationalität, oder bey der Elimination der andern gesuchten Größen einen höhern Grad erhalten, als sie nach der Anzahl der möglichen Werthe für die unbekannte Größe haben sollte. In dem Falle, daß man auf eine Gleichung mit fremden Wurzeln geräth, wird man sich nach einer solchen Auflösung umzusehen haben, welche diese erspart. Bey der Frage von der kürzesten Dämmerung ist eine solche Auflösung möglich. Noch zwey Beyspiele, wo durch Quadrirung zufällige oder fremde Wurzeln in die Gleichung gekommen sind, sehe man in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie, 12; 14.

172. Eine Gleichung kann mögliche Wurzeln enthalten, welche in einem besondern Falle nicht anwendbar sind, weil dieser noch eine Bedingung enthält, die durch diese Wurzeln nicht erfüllt wird. Z. B. man suche aus dem Umfange und dem Inhalte eines gleichschenklichten Dreyecks das Dreyeck zu bestimmen, so kommt man auf eine cubische Gleichung für die Schenkel des Dreyecks, wiewohl es nur zwey Dreyecke von der gegebenen Beschaffenheit giebt. Denn die eine Wurzel ist größer als der halbe Umfang, welches nicht möglich ist.

173. Wenn der Werth einer Gleichung für einen Werth von x positiv, und für einen andern negativ ist, so liegt zwischen diesen beiden Werthen von x eine mögliche Wurzel, oder auch eine ungerade Anzahl von Wurzeln. Sind zwey Werthe der Gleichung gleichnamig, so liegt zwischen den zugehörigen Werthen von x entweder gar keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln.

Bew. Der Werth der Gleichung ist, wenn p, q, r, s, etc. die Wurzeln, sowohl die möglichen, als die unmöglichen, bedeuten, =

$$(x - p)(x - q)(x - r)(x - s), \text{ etc.}$$

in welchem Product je zwey zusammengehörige unmögliche Factoren ein mögliches Product geben (166.). Jeder mögliche Factor kann positiv, oder negativ, oder null seyn; die unmöglichen sind keins von diesen. Das Product zweyer zusammengehörigen, $x - A - B\sqrt{-1}$ und $x - A + B\sqrt{-1}$, nämlich $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$, wird für keinen Werth von x null, weil sonst dasselbe zwey mögliche Factoren hätte, und ist immer positiv. Man gedenke sich die möglichen Factoren nach der Größe der dazu gehörigen Wurzeln geordnet, so daß p die größte positive Wurzel, q die nächst folgende kleinere, u. s. f. bedeute. Unter den negativen Wurzeln sehe man die absolut kleinere, als eine relativ größere an. Es erhalte x erstlich einen positiven Werth, der größer als die größte positive Wurzel ist, so ist der Werth der Gleichung positiv. Von diesem Werthe an gedenke man sich eine stetige Reihe von positiven Werthen für x bis zu 0, und ferner eine solche Reihe von negativen bis über die kleinste (absolut größte) negative hinaus, und nehme alle mögliche Wurzeln unter einander ungleich an. Jedem Werthe von x ist ein Werth der Gleichung, der y heiße, zugeordnet. So oft der Werth von x eine Wurzel der Gleichung ist, ist der zugehörige Factor der Gleichung = 0, also auch y = 0, und es geschieht für die Werthe von y ein Übergang ins Entgegengesetzte. Nämlich, wenn x größer als p ist, so sind alle Factoren der

Gleichung positiv, und y ist es auch. Für alle Werthe von x zwischen p und q ist ein Factor negativ, also sind alle zugehörigen Werthe von y negativ. Für alle Werthe von x zwischen q und r sind zwey Factoren negativ, aber dadurch sind die Werthe von y positiv. Die Werthe von x zwischen r und s machen drey Factoren der Gleichung negativ, und dadurch wird y wieder negativ. Solchergestalt geschieht in der Reihe der Werthe von y ein Übergang vom positiven zum negativen, oder vom negativen zum positiven, wenn $y = o$ wird, indem x eine Wurzel der Gleichung ist. Dieses ereignet sich auch in der Reihe der y, die zu negativen Werthen von x gehören. Die negativen Wurzeln der Gleichung seyn $-p'$, $-q'$, $-r'$, etc. nach der Folge ihrer absoluten Quantität von der kleinsten an, so entstehen daraus die Factoren, $x + p'$; $x + q'$; $x + r'$, etc. Jeder dieser ist positiv, wenn der absolute Werth des negativen x darin kleiner ist als die darin enthaltene Wurzel, aber negativ in dem entgegengesetzten Falle. Bey den Werthen von x, die eine Wurzel der Gleichung sind, und $y = o$ machen, geschieht also ebenfalls ein Übergang der Werthe der Gleichung zum Entgegengesetzten.

Die Gleichung habe zwey gleiche Wurzeln, q, die nächst größere sey p, die nächst kleinere r, so entstehen daraus die Factoren $(x - p)(x - q)(x - q)(x - r)$. Bey dem Übergange des Werthes x von q zu r (wenn x zwischen p und r fällt), ändert sich das Vorzeichen von y nicht, oder es ist kein Übergang zum Entgegengesetzten, weil zwey Factoren zugleich negativ werden. Eben so bey jeder geraden Anzahl gleicher Wurzeln.

Hingegen bey einer ungeraden Anzahl gleicher Wurzeln geschieht in den Werthen der Gleichung ein Übergang zum Entgegengesetzten, wenn x einer solchen Wurzel gleich ist.

Man mag für jede der gleichen Wurzeln auch einen Übergang zum Entgegengesetzten sich gedenken, nur daß bey einer geraden Anzahl alle Übergänge unmittelbar auf-

einander folgen und dadurch sich aufheben, eben so wie bey einer ungeraden Anzahl alle bis auf einen.

Umgekehrt ist aus einer entgegengesetzten Beschaffenheit zweyer Werthe einer Gleichung zu schließen, daß zwischen den zugehörigen Werthen von x eine Wurzel oder eine ungerade Anzahl derselben liege. Denn es kann in der Reihe der Werthe von y kein Übergang zum Entgegengesetzten anders geschehen, als wenn ein Factor Null wird.

Hingegen ist eine gleichnamige Beschaffenheit zweyer Werthe einer Gleichung nur dadurch möglich, daß entweder zwischen den dazu gehörigen Werthen von x keine Wurzel liegt, oder daß eine gerade Anzahl von Übergängen geschieht, indem zwischen den zugehörigen Werthen von x zwey, vier, oder irgend eine gerade Anzahl Wurzeln, auch gleicher, liegt.

174. Da das Product zweyer unmöglichen Wurzeln positiv ist, so mag man sie in dem Producte aller Wurzeln so gut zu den positiven als zu den negativen rechnen. In einer Gleichung eines ungeraden Grades sey das letzte Glied $= + k$, so ist $- k$ das Product aller Wurzeln, und die Gleichung hat eine ungerade Anzahl negativer Wurzeln, also wenigstens eine solche. Sie mag aber gar keine positive haben. Ist das letzte Glied $= - k$, so ist $+ k$ das Product aller Wurzeln, und die Anzahl der positiven ist ungerade, so daß es wenigstens eine mögliche positive giebt, dagegen die negativen alle fehlen können.

Die Gleichung sey von einem geraden Grade, und das letzte Glied $= + k$, so ist eben dieses das Product aller Wurzeln, die daher alle unmöglich seyn können. Ist das letzte Glied $= - k$, so hat die Gleichung eine ungerade Anzahl sowohl positiver als negativer Wurzeln, letztere wegen des Vorzeichens $-$, und dadurch eine ungerade Anzahl positiver, weil der Grad der Gleichung gerade ist, und die unmöglichen nur paarweise vorhanden sind.

175. Der Übergang von zwey möglichen, einander zunächst liegenden Wurzeln, zu zwey unmöglichen, durch die dazu dienliche Veränderung der Coefficienten, geschieht durch zwey einander gleiche Wurzeln. Zwischen zwey Wurzeln p und q liegen zwey mögliche $m + n$ und $m - n$, und keine andere. Wird $n = 0$ genommen, so entstehen daraus zwey gleiche, m, m, und wenn $n\sqrt{-1}$ statt n gesetzt wird, die unmöglichen $m \pm n\sqrt{-1}$. Die Summe ist für jedes Paar $= 2m$. Das Product jener erstern ist $= mm - nn$; das Product der gleich großen $= mm$, dasjenige der unmöglichen $= mm + nn$. Der Werth der Gleichung macht keinen Übergang zum entgegengesetzten, wenn der zugehörige Werth von x zwischen p und q genommen wird, sowohl in dem Falle zweyer gleichen Wurzeln als zweyer unmöglichen.

Dieses und das nächst vorhergehende kann man sich durch eine Zeichnung der Werthe einer Gleichung als Ordinaten einer Curve zu den Werthen von x als Abscissen sehr erläutern, nach der Anweisung in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

176. Wenn für die unbekannte Größe in einer Gleichung die Glieder einer arithmetischen Reihe gesetzt werden, so sind in einer Gleichung vom zweyten Grade die zweyten Unterschiede der Werthe der Gleichung unveränderlich, in einer Gleichung vom dritten Grade die dritten Unterschiede, allgemein in einer Gleichung vom mten Grade die mten Unterschiede der Werthe der Gleichung.

Der Satz ist schon in dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen, 24, erwiesen. Man kann den Satz auch aus der allgemeinen Form der Glieder arithmetischer Reihen irgend einer Ordnung herleiten.

177. Es sey y ein Glied einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung, die Stelle desselben x, das Anfangsglied der Reihe sey A, die Anfangsglieder der Differenzreihen, nach ihrer Folge, a, b, c, d, etc. so ist (a. a. O. 7.)

$$y = A + x.a + \frac{x.x-1.}{1.2}b + \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}c$$
$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4}d \ldots\ldots,$$
$$+ \frac{x.x-1.\ldots x-m+1}{1.2.\ldots\ldots m}m',$$

wo m' das beständige Differenzglied der mten Differenzreihe bedeutet. Entwickelt man die Glieder durch wirkliche Multiplication, und ordnet das Aggregat nach den Potenzen von x, so erhält y die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots Mx^m,$$

das ist, eben diejenige, welche der Werth einer Gleichung vom mten Grade mit ganzen Exponenten der unbekannten Größe hat. Dieser Werth ist also ein Glied einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung, deren mte Differenzreihe beständige Glieder enthält. Ist x eine ganze, positive, oder negative Zahl, so ist y ein Glied der Reihe, zu welcher die Differenzreihen mit den Anfangsgliedern, a, b, c, d, ... m' gehören; ist x eine gebrochne Zahl, so ist y ein eingeschaltetes Glied. Sind die Stellen der Glieder der erweiterten Reihe in einfacher arithmetischer Fortschreitung, so sind die mten Unterschiede ebenfalls beständig, wie in der ursprünglichen Reihe (a. a. O. §5. ff.).

178. Vergleicht man die Coefficienten einer Gleichung mit den Coefficienten von x in dem entwickelten Werthe des Gliedes einer arithmetischen Reihe, so ergeben sich die Anfangsglieder der Differenzreihen, auf die Art, wie das folgende Beyspiel zeigt.

Die Gleichung sey

$$o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

Man nehme die Werthe dieser Gleichung für die positiven Werthe 1, 2, 3, 4, 5 von x, und setze diese den Werthen der Glieder einer arithmetischen Reihe der fünften Ordnung für dieselben Werthe von x gleich, so ist

I. $A+B+C+D+E+F=A+a$

II. $A+2B+4C+8D+16E+32F=A+2a+b$

III. $A+3B+9C+27D+81E+243F=A+3a+3b+c.$

IV. $A+4B+16C+64D+256E+1024F=A+4a+6b+4c+d$

V. $A+5B+25C+125D+625E+3125F=A+5a+10b+10c+5d+e.$

Hieraus ergiebt sich nach der Reihe ganz leicht

$a=B+C+D+E+F$

$b=2C+6D+14E+30F$

$c=6D+36E+150F$

$d=24E+240F$

$e=120F$

In diesen Formeln liegen auch die für niedrige Gleichungen gehörige.

179. Exempel. Die Gleichung sey $x^4-10x^3+20x^2-4x-140=0$, so ist $A=-140$; $B=-4$; $C=+20$; $D=-10$; $E=+1$; $F=0$. Daraus ist $a=+7$; $b=-6$; $c=-24$; $d=+24$. Die Reihe der Werthe der Gleichung mit den Gliedern der Differenzreihen für die ganzen Werthe x von $+8$ bis -2 enthält die folgende Tafel

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
— 2	+ 44	— 149	+ 114	— 72	+ 24
— 1	— 105	— 35	+ 42	— 48	+ 24
0	— 140	+ 7	— 6	— 24	+ 24
+ 1	— 133	+ 1	— 30	0	+ 24
+ 2	— 132	— 29	— 30	+ 24	+ 24
+ 3	— 161	— 59	— 6	+ 48	+ 24
+ 4	— 220	— 65	+ 42	+ 72	+ 24
+ 5	— 285	— 23	+ 114	+ 96	+ 24
+ 6	— 308	+ 91	+ 210	+ 120	+ 24
+ 7	— 217	+ 301	+ 330	+ 144	+ 24
+ 8	+ 84	+ 631	+ 474	+ 168	+ 24

180. Durch Hülfe der Differenzreihen lassen sich die Werthe einer numerischen Gleichung für eine Folge der x bequem berechnen, woraus man, mittelst des Vorzeichenwechsels die Zahlen erfährt, zwischen welchen Wurzeln liegen. In dem Exempel fällt eine Wurzel zwischen + 7 und + 8; eine zwischen — 1 und — 2. Die Beschaffenheit der Glieder in der Hauptreihe und in den Differenzreihen zeigt, daß die Gleichung nicht mehr als diese beiden möglichen Wurzeln haben kann.

181. Die Vorzeichenwechsel in der Reihe der $\Delta^4 y$ geschehen da, wo die Werthe von y am größten sind, in Beziehung auf die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder. Hätte die Gleichung vier mögliche Wurzeln, so müßte bey dem mittlern Wechsel der Vorzeichen in der Reihe Δy der Werth der Gleichung positiv seyn, (das Vorzeichen + haben), da er hier negativ ist. S. Größtes und Kleinstes.

VII. Von Gleichungen, in welchen zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich sind.

182. Die cubische Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, habe zwey gleiche Wurzeln, so ist diejenige,

welche ihr zweymahl zukommt, eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung, $3x^2 - 2ax + b = 0$.

Bew. Die Wurzeln der cubischen Gleichung seyn p, p, q, so ist I. $2p + q = a$; II. $p^2 + 2pq = b$ (59.). Jene werde mit 2p multiplicirt, und darauf die zweyte abgezogen, so ist $3pp = 2ap - b$. Diese Gleichung giebt zwey Werthe für p, welches daher rührt, daß von den drey Wurzeln einer cubischen Gleichung, p, q, r, sowohl p und q als q und r gleich groß gesetzt werden können, wenn p, q, r die Folge der Wurzeln nach ihrer Größe und Beziehung ist. Da dies aber nicht zugleich geschehen kann, wenn nur zwey Wurzeln einander gleich seyn sollen, so giebt die quadratische Gleichung mit der gesuchten Wurzel noch eine fremde verbundene. Setzt man x statt p, so ist $3x^2 - 2ax + b = 0$.

183. Die Wurzel, welche der biquadratischen Gleichung, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$, zweymahl zukommt, ist eine der Wurzeln der cubischen Gleichung, $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0$.

Bew. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung seyn p, p, q, r, so ist (89.)

I. $2p + q + r = a$

II. $p^2 + 2p(q + r) + qr = b$

III. $p^2(q + r) + 2pqr = c$.

Daraus ist

I. $6p^3 + 3p^2(q + r) = 3ap^2$

II $2p^3 + 4p^2(q + r) + 2pqr = 2bp$

III $p^2(q + r) + 2pqr = 0$.

Aus diesen folgt sogleich

IV. $4p^3 = 3ap^2 - 2bp + c$.

Diese Gleichung für p steigt auf den dritten Grad, weil von den vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung

jede ihrer nächſten gleich geſetzt werden kann. Da aber nur zwey Wurzeln gleich groß ſeyn ſollen, ſo ſind mit der geſuchten Wurzel noch zwey fremde verbunden, und p iſt eine der Wurzeln der Gleichung

$$4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0.$$

Man bemerke, daß hier wie bey der quadratiſchen Gleichung die Coefficienten die Exponenten der vorgegebenen Gleichung mit zwey gleichen Wurzeln ſind.

184. Die biquadratiſche Gleichung habe drey gleichgroße Wurzeln, p, p, p, nebſt einer andern q, ſo iſt die Wurzel p eine der Wurzeln der quadratiſchen Gleichung, $6x^2 - 3ax + b = 0$.

Denn es iſt $3p + q = a$, und $3pp + 3pq = b$, woraus $6pp = 3ap - b$, ſo daß p eine der Wurzeln der Gleichung, $6x^2 - 3ax + b = 0$, iſt.

Dieſe Gleichung hat mit der in (183.) gefundenen cubiſchen Gleichung, $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = 0$, die Wurzel gemein, welche derſelben zweymahl zukommt. Denn ſie entſteht daraus durch die Multiplication der Coefficienten mit den Exponenten von x, und Diviſion aller durch die Zahl 2. Die cubiſche Gleichung hat daher in dieſem Falle zwey gleich große Wurzeln mit der biquadratiſchen gemein. Von den vier Wurzeln einer biquadratiſchen Gleichung laſſen drey ſich nächſte auf zweyerley Art ſich gleich ſetzen.

185. Es ſey gegeben die Gleichung,

$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0$, (A),

und es ſey zugleich $mx^{m-1} - (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} - (m-3)cx^{m-4} + (m-4)dx^{m-5} - \text{etc.} = 0$, (B), ſo hat die Gleichung (A) zwey gleich große Wurzeln, von welchen eine der Gleichung (B) zukommt.

Iſt zugleich $m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)ax^{m-3} + (m-2)(m-3)bx^{m-4} - (m-3)(m-4)cx^{m-5} + (m-4)(m-5)dx^{m-6} - \text{etc.} = 0$, (C),

so hat die Gleichung (A) drey gleiche Wurzeln, von welchen zwey der Gleichung (B) gehören, und eine in der Gleichung (C) enthalten ist.

Ist noch zugleich $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$
$-(m-1)(m-2)(m-3)ax^{m-4}$
$+(m-2)(m-3)(m-4)bx^{m-5}$
$-(m-3)(m-4)(m-5)cx^{m-6} + \text{etc.} = 0$,
(D), so hat die Gleichung (A) vier gleiche große Wurzeln, von welchen drey in (B), zwey in (C) enthalten sind, und eine in (D).

Bew. I. Es sey p eine der Wurzeln in der Gleichung (A), eine andere $= p + u$, so ist

$$p^m - ap^{m-1} + bp^{m-2} - cp^{m-3} + dp^{m-4} - \text{etc.} = 0$$

und

$$(p+u)^m - a(p+u)^{m-1} + b(p+u)^{m-2} - c(p+u)^{m-3} + d(p+u)^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

II. Entwickelt man die Potenzen des Binomium (binomischer Lehrsatz, 1.), und zieht die erste Gleichung von der zweyten ab, ordnet auch die Glieder nach den Potenzen von u, so entsteht eine Gleichung von der Form,

$$Pu + Qu^2 + Ru^3 + Su^4 \ldots + u^m = 0, \text{ (M)}.$$

III. Die Coefficienten sind

$$P = mp^{m-1} - (m-1)ap^{m-2} + (m-2)bp^{m-3} - (m-3)cp^{m-4} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{m \cdot m-1.}{1 \cdot 2} p^{m-2} - \frac{m-1 \cdot m-2.}{1 \cdot 2} ap^{m-3} + \frac{m-2 \cdot m-3.}{1 \cdot 2} bp^{m-4} - \frac{m-3 \cdot m-4.}{1 \cdot 2} cp^{m-5} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3}p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3}ap^{m-4}$$
$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3}bp^{m-5} - \text{etc.}$$

$$S = \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4}p^{m-4} - \frac{m-1..m-4.}{1..4}ap^{m-5}$$
$$+ \frac{m-2..m-5.}{1..4}bp^{m-6} - \text{etc.}$$

u. s. f.

IV. Die Gleichung (M) ist $= o$, entweder dadurch, daß $u = o$ ist, oder dadurch, daß

$$P + Qu + Ru^2 + Su^3 \ldots . u^{m-1} = o, \quad (N)$$

ist. Die Gleichung (N) steigt auf den $(m - 1)$ten Grad, weil der Unterschied einer Wurzel p in (A) von den übrigen $m - 1$ Wurzeln der Gleichung $m - 1$ Werthe hat. Der Unterschied der Wurzel p von ihr *selbst*, oder $p - p = o$, giebt die Wurzel $u = o$ der Gleichung (M).

V. Da die Gleichung (A) m Wurzeln hat, so entstehen m Gleichungen wie (N), und dadurch werden $m(m - 1)$ Werthe für u erhalten. Es sind so viele Unterschiede je zweyer Wurzeln in (A) vorhanden, als Paare von Wurzeln genommen werden können, also $\frac{1}{2}m(m - 1)$. Die Unterschiede können sowohl positiv als negativ seyn, wodurch $m(m - 1)$ Unterschiede entstehen.

VI. Es sey $P = o$, aber nicht $Q = o$, so wird in (N) eine Wurzel $u = o$, also ein Werth von $p + u = p$, und die Gleichung (A) hat zwey gleich große Wurzeln. Die Annahme, $P = o$, giebt

$$o = mp^{m-1} - (m - 1)ap^{m-2} + (m - 2)bp^{m-3}$$
$$- (m - 3)cp^{m-4} + (m - 4)dp^{m-5} - \text{etc.} \quad (P).$$

Dieſe Gleichung ſteigt auf den (m — 1)ten Grad, weil es m — 1 Fälle giebt, wie unter m Wurzeln zwey gleiche ſeyn können. Ordnet man ſie nämlich nach ihrer Größe, die größte poſitive voran, bis zu der kleinſten poſitiven, dann die abſolut kleinſte negative, bis zu der abſolut größten, ſo können die erſte und zweyte, oder die dritte und vierte, u. ſ. f. gleich groß ſeyn.

VII. So viele Paare gleicher Wurzeln (A) hat, ſo viele Wurzeln hat ſie mit der Gleichung (P) gemein. Für jede andere Wurzel in (A), die keine ihr gleiche hat, findet die Gleichung (N) nicht Statt, als welche darauf beruht, daß der Unterſchied zwiſchen zwey Wurzeln, p und p + u, Null ſey. Die andern Wurzeln in (P), außer den mit (A) gemeinſchaftlichen, ſind daher als fremde Wurzeln zu betrachten.

VIII. Da P = o geſetzt iſt, ſo verwandelt die Gleichung (N) ſich in folgende,

$$Q + Ru + Su^2 + Tu^3 \ldots . u^{m-2} = o,$$

welche m — 2 Werthe von u, die nicht = o ſind, enthält. Es ſey Q = o, aber nicht R = o, ſo hat die Gleichung (N) zwey Wurzeln, die = o ſind. Unterſcheidet man die Wurzeln dieſer Gleichung durch die Bezeichnungen u′, u″, u‴, etc. nach der Folge ihrer Quantität, ſo werden von den Wurzeln in (A), die nun durch p, p + u′, p + u″, p + u‴, etc. bezeichnet werden, die drey hier zuerſt geſetzten gleich groß. Die Annahme, Q = o, giebt

$$o = \frac{m.m-1.}{1.2} p^{m-2} - \frac{m-1.m-2.}{1.2} a p^{m-3}$$

$$+ \frac{m-2.m-3.}{1.2} b p^{m-4} - \frac{m-3.m-4.}{1.2} c p^{m-5}$$

$$+ \text{etc. (Q).}$$

Die Gleichung ſteigt auf den (m — 2)ten Grad, weil es (m — 2) Fälle giebt, daß unter m Wurzeln drey gleich große vorhanden ſind, als die erſte, zweyte und

dritte, oder die zweyte, dritte und vierte, u. s. f. So oft (A) drey gleiche Wurzeln enthält, so viele Wurzeln hat (Q) mit (A) gemein.

IX. Die Gleichung $Q = o$ entsteht aus der, $P = o$, auf gleiche Art, wie diese aus der, $A = o$, entsteht. Es hat also die Gleichung, $P = o$, zwey gleich große Wurzeln (oder Paare gleicher), von welchen eine (oder so viele als jene Paare) der Gleichung $Q = o$ zukommt. Jene beiden sind daher zwey von den drey gleichen in der Gleichung, $A = o$.

X. Da P und $Q = o$ gesetzt sind, so verwandelt die Gleichung (N) sich in diese,

$$R + Su + Tu^2 \ldots u^{m-3} = o,$$

welche $m - 3$ Werthe von u, die nicht $= o$ sind, enthält. Ist $R = o$, aber S nicht $= o$, so hat die Gleichung (N) drey Wurzeln $= o$, und die Gleichung (A) hat vier gleiche Wurzeln. Diese Annahme giebt

$$o = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3} a p^{m-4}$$

$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3} b p^{m-5} - \text{etc.} \quad (R.)$$

So vielmahl (A) vier gleiche Wurzeln enthält, so viele Wurzeln hat (A) mit (R) gemein. Die Gleichung, $P = o$, enthält je drey von jenen Wurzeln, und die Gleichung, $Q = o$, je zwey von denselben.

XI. Auf dieselbe Art werden die Gleichungen gefunden, welche von n gleichen Wurzeln der Gleichung (A) enthalten $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, . . . 2, 1 Wurzeln.

XII. Multiplicirt man die gefundenen Gleichungen jede mit dem gemeinschaftlichen Theiler ihrer Glieder, und setzt x statt p, so erhält man die in dem Satze aufgeführten derivirten Gleichungen, welche mit der gegebenen Gleichung (A) eine Wurzel gemein haben, entweder einfach oder mehrfach.

Dieſe Gleichung ſteigt auf den (m — 1)ten Grad, weil es m — 1 Fälle giebt, wie unter m Wurzeln zwey gleiche ſeyn können. Ordnet man ſie nämlich nach ihrer Größe, die größte poſitive voran, bis zu der kleinſten poſitiven, dann die abſolut kleinſte negative, bis zu der abſolut größten, ſo können die erſte und zweyte, oder die dritte und vierte, u. ſ. f. gleich groß ſeyn.

VII. So viele Paare gleicher Wurzeln (A) hat, ſo viele Wurzeln hat ſie mit der Gleichung (P) gemein. Für jede andere Wurzel in (A), die keine ihr gleiche hat, findet die Gleichung (N) nicht Statt, als welche darauf beruht, daß der Unterſchied zwiſchen zwey Wurzeln, p und p + u, Null ſey. Die andern Wurzeln in (P), außer den mit (A) gemeinſchaftlichen, ſind daher als fremde Wurzeln zu betrachten.

VIII. Da P = o geſetzt iſt, ſo verwandelt die Gleichung (N) ſich in folgende,

$$Q + Ru + Su^2 + Tu^3 \ldots . u^{m-1} = o,$$

welche m — 2 Werthe von u, die nicht = o ſind, enthält. Es ſey Q = o, aber nicht R = o, ſo hat die Gleichung (N) zwey Wurzeln, die = o ſind. Unterſcheidet man die Wurzeln dieſer Gleichung durch die Bezeichnungen u′, u″, u‴, etc. nach der Folge ihrer Quantität, ſo werden von den Wurzeln in (A), die nun durch p, p + u′, p + u″, p + u‴, etc. bezeichnet werden, die drey hier zuerſt geſetzten gleich groß. Die Annahme, Q = o, giebt

$$o = \frac{m.m-1.}{1.2} p^{m-2} - \frac{m-1.m-2.}{1.2} a p^{m-3}$$

$$+ \frac{m-2.m-3.}{1.2} b p^{m-4} - \frac{m-3.m-4.}{1.2} c p^{m-5}$$

$$+ \text{etc. (Q).}$$

Die Gleichung ſteigt auf den (m — 2)ten Grad, weil es (m — 2) Fälle giebt, daß unter m Wurzeln drey gleich große vorhanden ſind, als die erſte, zweyte und

dritte, oder die zweyte, dritte und vierte, u. s. f. So oft (A) drey gleiche Wurzeln enthält, so viele Wurzeln hat (Q) mit (A) gemein.

IX. Die Gleichung $Q = o$ entsteht aus der, $P = o$, auf gleiche Art, wie diese aus der, $A = o$, entsteht. Es hat also die Gleichung, $P = o$, zwey gleich große Wurzeln (oder Paare gleicher), von welchen eine (oder so viele als jene Paare) der Gleichung $Q = o$ zukommt. Jene beiden sind daher zwey von den drey gleichen in der Gleichung, $A = o$.

X. Da P und $Q = o$ gesetzt sind, so verwandelt die Gleichung (N) sich in diese,

$$R + Su + Tu^2 \ldots u^{m-3} = o,$$

welche $m - 3$ Werthe von u, die nicht $= o$ sind, enthält. Ist $R = o$, aber S nicht $= o$, so hat die Gleichung (N) drey Wurzeln $= o$, und die Gleichung (A) hat vier gleiche Wurzeln. Diese Annahme giebt

$$o = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} p^{m-3} - \frac{m-1.m-2.m-3.}{1.2.3} a p^{m-4}$$

$$+ \frac{m-2.m-3.m-4.}{1.2.3} b p^{m-5} - \text{etc.} \quad (R.)$$

So vielmahl (A) vier gleiche Wurzeln enthält, so viele Wurzeln hat (A) mit (R) gemein. Die Gleichung, $P = o$, enthält je drey von jenen Wurzeln, und die Gleichung, $Q = o$, je zwey von denselben.

XI. Auf dieselbe Art werden die Gleichungen gefunden, welche von n gleichen Wurzeln der Gleichung (A) enthalten $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, . . . 2, 1 Wurzeln.

XII. Multiplicirt man die gefundenen Gleichungen jede mit dem gemeinschaftlichen Theiler ihrer Glieder, und setzt x statt p, so erhält man die in dem Satze aufgeführten derivirten Gleichungen, welche mit der gegebenen Gleichung (A) eine Wurzel gemein haben, entweder einfach oder mehrfach.

XIII. Die Gleichung $P = o$ ist der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x} = o$, wenn y der Werth der Gleichung (A) ist. Ferner ist die Gleichung $Q = o$, der Differentialquotient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$; die Gleichung $R = o$, der Differentialquotient $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = o$, u. s. f. S. Größte und kleinste Werthe einer Function.

186. Die Gleichung (N) enthält die Relation irgend einer Wurzel von (A) und ihrem Unterschiede von jeder der übrigen Wurzeln. Verbindet man beide Gleichungen mit einander, so läßt sich x herausschaffen, und es ergiebt sich eine Gleichung zwischen u und den gegebenen Größen der Gleichung. Diese steigt aber auf den $m(m-1)$ten Grad, weil der Unterschied u so viele Werthe hat, als Binionen zweyer Wurzeln, positiv oder negativ ($p - q$ oder $q - p$) möglich sind, (185. V.) Wegen des gedoppelten Vorzeichens, $\mp$, sind in der Gleichung für u bloß die geraden Potenzen davon vorhanden.

187. Die Coefficienten dieser absoluten Gleichung für u werden auf dem Wege der Elimination sehr mühsam gefunden. La Grange hat eine sinnreiche Methode in den Mem. de l'Ac. de Berlin 1767. p. 330, sur la resolution des équations numériques, angegeben, die sich auf die Lehrsätze von der Relation der Summen der Combinationen und der Potenzen einer Anzahl Größen gründet. Sie kann aber nicht in der Kürze vorgetragen werden, daher hier die Anzeige für den geübten Leser genügen muß. Man findet sie auch in der vermehrten Ausgabe dieser beiden Abhandlungen à Paris An. VI. pag. 9. ff. p. 24. ff. und p. 118. ff. und in Michelsens Theorie der Gleichungen, S. 66. ff.

188. Wenn die Gleichung für u^2 gefunden ist, so dient sie zu entdecken, wie viele Paare gleich großer Wurzeln die Gleichung (A) hat. Sind zwey gleiche Wurzeln in derselben, so ist ein Werth von $u^2 = 0$, also das gegebene Glied $= 0$. Sind zwey Paare gleicher Wurzeln in (A), so ist zugleich der Coefficient von $u^2 = 0$. Sind drey gleiche Wurzeln, oder drey Paare gleicher Wurzeln vorhanden, so sind außer dem gegebenen Gliede, die Coefficienten von u^2 und von $u^4 = 0$, u. s. w.

189. Auch dient die absolute Gleichung für u zur Entdeckung und Bestimmung der unmöglichen Wurzeln, s. Mém. de l'Acad. de Berlin 1768. p. 113. ff. in den Zusätzen zu den angeführten Abh. von la Grange. Jeder positive Werth von u^2 zeigt zwey mögliche Wurzeln in (A) an. Ein negativer möglicher Werth von u^2 zeigt zwey unmögliche zusammengehörige Wurzeln $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ an. Ein unmöglicher Werth von u^2 entsteht aus dem Unterschiede einer möglichen und unmöglichen Wurzel, oder zweyer unmöglichen nicht zusammengehörigen. Allein wegen der Höhe der Gleichung für u, wenn (A) noch eine mäßige Höhe hat, ist es nicht leicht sich derselben zu diesen Absichten zu bedienen.

190. Wie die mehrfachen Wurzeln und die dazu erforderliche Relation der Coefficienten gefunden werden, zeigt das Verfahren an den niedrigern Gleichungen, durch Elimination der höhern Potenzen von x.

Die cubische Gleichung,

$$\text{I. } x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

habe zwey gleiche Wurzeln, so ist

$$\text{II. } 3x^2 - 2ax + b = 0,$$

zufolge (182.). Aus beiden wird

$$\text{III. } ax^2 - 2bx + 3c = 0.$$

Aus II. und III. entsteht

$B = 4(m+n)(m-n)^2$; $C = 4mn(m-n)^2$; dann noch $\alpha = 4mn(m-n)^2$; $\beta = 4mn(m+n)(m-n)^2$; $\gamma = 4m^2n^2(m-n)^2$. Folglich ist $A\gamma = C\alpha$; und $A\beta = B\alpha$; auch $B\gamma = C\beta$. Die beiden Gleichungen VI. und VII. in (191.) sind, nach geschehener Division durch die gemeinschaftlichen Factoren ihrer Glieder,

$$x^2 - (m+n)x + mn = 0.$$

Diese Gleichung enthält die beiden Wurzeln, m, n, welche in der biquadratischen Gleichung beide zweymahl vorhanden sind.

195. Hat die biquadratische Gleichung die Wurzeln, p, p, p, q, so ist sie

$$x^4 - (3p+q)x^3 + 3p(p+q)x^2 - p^2(p+3q)x + p^3q = 0.$$

Aus den Coefficienten dieser Gleichung wird ebenfalls $A\beta = B\alpha$; $A\gamma = C\alpha$; $B\gamma = C\beta$, und die Gleichungen IV. V. in (191.) sind jede $x^2 - 2px + p^2 = 0$.

196. Die gleichen Wurzeln lassen sich auch dadurch finden, daß man den gemeinschaftlichen Theiler der gegebenen Gleichung und der abgeleiteten sucht, auf ähnliche Art wie bey Zahlen (s. Theiler gemeinschaftlicher). Die Form dieses Theilers ist durch die Voraussetzung wegen der Gleichheit der Wurzeln gegeben. Wenn $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$ ist, so haben C und B den gemeinschaftlichen Factor, den A und B enthalten. Ist ferner $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$, so haben D und C denselben gemeinschaftlichen Factor wie B und C, also auch wie B und A, u. s. f.

Man kann auch zu A, B, C und D irgend welchen Factor setzen, oder von jedem einen in den andern nicht enthaltenen Factor absondern, ohne dadurch in Rücksicht der gemeinschaftlichen Factoren etwas zu ändern.

197. Exempel. Die cubische Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, und die daraus hergeleitete, $3x^2 - 2ax + b = 0$, haben eine Wurzel gemeinschaftlich. Also haben die beiden Functionen,

A) $x^3 - ax^2 + bx - c$

B) $x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3}b$,

einen gemeinschaftlichen Factor, $x - p$; worin p die gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen ist. Multiplicirt man beyde mit 3, und dividirt 3(A) durch 3(B), so ist der erste Rest $= -ax^2 + 2bx - 3c$, wofür man auch das entgegengesetzte nehmen kann. Mit diesem dividire man die Function a(B), so ist der erste Rest $= -(2aa - 6b)x + (ab - 9c)$, oder auch $(2aa - 6b)x - (ab - 9c)$, das ist, $\left(x - \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}\right)(2aa - 6b)$.

Der gemeinschaftliche Factor, $x - p$, der beiden Functionen, A, B, ist es auch von diesem Reste; also ist $x - p$ gleich dem Factor des Restes, der dieselbe Form hat; folglich ist $p = \frac{ab - 9c}{2aa - 6b}$.

198. Die beiden Functionen,

P) $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$

Q) $4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c$,

haben eine gemeinschaftliche Wurzel, p, wodurch jede derselben Null wird, oder P und $\frac{1}{4}$Q haben den gemeinschaftlichen Factor, $x - p$. Um p zu finden, dividire man 4P durch Q, so ist der erste Rest

R) $-ax^3 + 2bx^2 - 3cx + 4d$.

Das entgegengesetzte nehme man zum Divisor 4Q, so ist der erste Rest entgegengesetzt genommen

S) $(3aa - 8b)x^2 - (2ab - 12c)x + (ac - 16d)$.

Nimmt man bey der Diviſion den niedrigſten Theil, + 4d, zum erſten Theil, ſo iſt der erſte Reſt

T) $+ (8abd - 3ac^2)x - (12aad - 2abc)x^2 + (16ad - aac)x^3$,

wovon die Factoren a und x abgeſondert werden können. So wird dieſer Reſt, entgegengeſetzt genommen,

T) $(ac - 16d)x^2 - (2bc - 12ad)x + (3cc - 8bd)$.

Dieſer Reſt hat wie S den Factor $x - p$. Gebraucht man die in (10) gemachten Bezeichnungen, ſo iſt

S) $Ax^2 - Bx + C$.

T) $\alpha x^2 - \beta x + \gamma$.

Multiplicirt man S durch α, und dividirt durch T, ſo iſt der Reſt, entgegengeſetzt genommen,

U) $(A\beta - B\alpha)x - (A\gamma - C\alpha)$,

oder

$$\left(x - \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}\right)(A\beta - B\alpha).$$

Da U den Factor $x - p$ hat, ſo iſt $x - p$ gleich dem Factor von derſelben Form, und daher

$$p = \frac{A\gamma - C\alpha}{A\beta - B\alpha}.$$

Dividirt man T durch S, ſo erhält man für $x - p$ daſſelbe Reſultat. Nimmt man aber zum erſten Theil des Diviſors das niedrigſte Glied von T, nämlich γ, und multiplicirt C mit γ, ſo wird der Reſt

V) $- (B\gamma - C\beta)x + (A\gamma - C\alpha)x^2$,

oder nach Abſonderung des Factors x,

$$(A\gamma - C\alpha)x - (B\gamma - C\beta).$$

Hieraus folgt $p = \frac{B\gamma - C\beta}{A\gamma - C\alpha}$.

199. Hat die biquadratische Gleichung zwey verschiedene Paare gleicher Factoren, so haben die Functionen P und $\frac{1}{4}Q$ einen quadratischen Factor, $x^2-(m+n)x+mn$, gemein. Dieser ist in dem Reste S enthalten. Man gebe diesem, mit den abgekürzten Bezeichnungen, die Form,

$$\left(x^2-\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)A,$$

so ist $m+n=\frac{B}{A}$; $mn=\frac{C}{A}$.

Eben derselbe ist aber auch in T enthalten. Dieser Rest giebt $m+n=\frac{\beta}{\alpha}$; $mn=\frac{\gamma}{\alpha}$. Dadurch ist $A\beta=B\alpha$; und $A\gamma=C\alpha$.

Hat die biquadratische Gleichung zwey gleiche Paare gleicher Wurzeln, das ist, drey gleiche, so ist $m=n$, und $2m=\frac{B}{A}$; $m^2=\frac{C}{A}$, wo m die dreymahl vorhandene Wurzel bedeutet.

200. Der Satz (185.) oder eigentlich der umgekehrte läßt sich auch auf eine andere Art aus dem binomischen Lehrsatze herleiten, wozu folgender Vorbereitungssatz nöthig ist.

Es ist

$$(p+x)^n=p^n+{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x+{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^2+{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^3+{}^n\mathfrak{D}p^{n-4}x^4\ldots+x^n,$$

wo die Binomial-Coefficienten auf die Th. I. S. 308, angegebene Art bezeichnet sind. Die Glieder der Reihe rechter Hand multiplicire man folgeweise durch 0, 1, 2, 3, 4 . . n, so wird sie

$$1.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x+2.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^2+3.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^3+4.{}^n\mathfrak{D}p^{n-4}x^4\ldots+nx^n$$

Es ist

$$^{n}\mathfrak{A} = n;\quad 2.{}^{n}\mathfrak{B} = n.n-1 = n.{}^{n-1}\mathfrak{A};$$

$$3.{}^{n}\mathfrak{C} = \frac{n.n-1.n-2}{1.2} = n.{}^{n-1}\mathfrak{C};\ 4{}^{n}\mathfrak{D}$$

$$= \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3} = n.{}^{n-1}\mathfrak{D};\ \text{u. s. f.}$$

Also ist diese Reihe =

$$nx(p^{n-1} + {}^{n-1}\mathfrak{A}p^{n-2}x + {}^{n-1}\mathfrak{B}p^{n-3}x^2 + {}^{n-1}\mathfrak{C}p^{n-4}x^3$$
$$+ {}^{n-1}\mathfrak{D}p^{n-4}x^4 \ldots + x^{n-1}) = nx(p+x)^{n-1}.$$

201. Man multiplicire die Glieder der entwickelten Reihe für $(p+x)^n$ folgeweise mit den Zahlen r, $r+1$, $r+2$, $r+3$; . . . $r+n$, so ist dieses so viel als sie alle mit r, und sie dann noch folgeweise durch $0, 1, 2, 3 \ldots n$ multiplicirten. Es ist also die Summe der folgeweise durch r, $r+1$; $r+2 \ldots r+n$ multiplicirten Glieder $= (nx + r(p+x))(p+x)^{n-1}$.

202. Die Function,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots + x^m,$$

sey ein Product aus den Factoren $(p+x)^n$ und $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots + x^{m-n}$, so enthält die Function,

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots + mx^{m-1}$$

den Factor $(p+x)^{n-1}$; ferner

$$1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 \ldots (m-1)mx^{m-2}$$

den Factor $(p+x)^{n-2}$; ferner

$$1.2.3D + 2.3.4Ex \ldots + (m-2)(m-1)mx^{m-3}$$

den Factor $(p+x)^{n-3}$; u. s. f.

Bew. Man entwickele das angegebene Product folgendergestalt,

$$ap^n + a.{}^{n}\mathfrak{A}p^{n-1}x + a.{}^{n}\mathfrak{B}p^{n-2}x^2 + a.{}^{n}\mathfrak{C}p^{n-3}x^3$$
$$\ldots\ldots + ax^n$$
$$+ bp^n x + b.{}^{n}\mathfrak{A}p^{n-1}x^2 + b.{}^{n}\mathfrak{B}p^{n-2}x^3 + b.{}^{n}\mathfrak{C}p^{n-3}x^4$$
$$\ldots\ldots + bx^{n+1}$$

$$+cp^n x^2 + c.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x^3 + c.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^4 + c.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^5$$
$$\ldots\ldots + cx^{n+2}$$
$$+dp^n x^3 + d.{}^n\mathfrak{A}p^{n-1}x^4 + d.{}^n\mathfrak{B}p^{n-2}x^5 + d.{}^n\mathfrak{C}p^{n-3}x^6$$
$$\ldots\ldots + dx^{n+3}$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Glieder der ersten Reihe multiplicire man folgeweise durch 0, 1, 2, 3 ... n; die Glieder der zweyten eben so durch 1, 2, 3 .. n + 1; die Glieder der dritten durch 2, 3, 4 ... n + 2; die Glieder der vierten durch 3, 4, 5 ... n + 3, u. s. f. Dadurch entsteht aus der

ersten Reihe die Function	$nx(p+x)^{n-1}a$
zweyten Reihe	$(nx+p+x)(p+x)^{n-1}bx$
dritten Reihe	$(nx+2(p+x))(p+x)^{n-1}cx^2$
vierten Reihe	$(nx+3(p+x))(p+x)^{n-1}dx^3$

u. s. f.

Die Glieder jener Reihen, welche zu derselben Potenz von x gehören, werden mit derselben Zahl multiplicirt. Die Glieder der Function, $A + Bx + Cx^2 \ldots + x^m$, bestehen aus solchen Gliedern jener Reihen, welche mit ihnen dieselbe Potenz von x enthalten; die vorgenommene Multiplication der Glieder in diesen Reihen giebt daher eben das Resultat, als die Multiplication der Glieder in

$$A + Bx + Cx^2 \ldots + x^m$$

durch die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... m folgeweise wie die Glieder genommen. Die Summe aller dieser Producte, nämlich

$$0.A + 1.Bx + 2.Cx^2 + 3.Dx^3 \ldots + m\,x^m$$

ist daher der Summe der vorher gefundenen Functionen gleich. Sie enthält folglich den Factor $(p+x)^{n-1}$, der in allen diesen Functionen enthalten ist, oder die Function

$$B + 2Cx + 3Dx^2 \ldots + mx^{m-1}$$

hat den Factor $(p + x)^{n-1}$.

Daraus folgt nun eben ſo, daß

$$2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 \ldots + (m - 1)mx^{m-2}$$

den Factor $(p + x)^{n-2}$ enthält, und ſo weiter bis daß n Factoren, $p + x$, abgeſondert ſind.

VIII. Von den Verwandlungen der Gleichungen.

203. Die gewöhnlichſte Verwandlung der Gleichungen iſt, daß man für die unbekannte Größe x eine andere, $k + y$, ſetzt, in welcher das Stück k willkührlich, nach einer beſondern Abſicht, beſtimmt wird, als um das zweyte Glied wegzuſchaffen, oder y einen Werth, kleiner als die Einheit zu geben. Bey der Aufſuchung der Gränzen der Wurzeln bedient man ſich auch dieſer Subſtitution.

204. Die gegebene Gleichung ſey

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0.$$

Setzt man $x = k + y$, ſo iſt (binomiſcher Lehrſatz) wenn die Binomial-Coefficienten nach (Binomial-Coefficienten, 1.) bezeichnet werden,

$$\begin{aligned}
x^m &= y^m + {}^m\mathfrak{A}ky^{m-1} + {}^m\mathfrak{B}k^2y^{m-2} + {}^m\mathfrak{C}k^3y^{m-3} + \text{etc.}\\
-ax^{m-1} &= -a\,. + -{}^{m-1}\mathfrak{A}ak\,. - {}^{m-1}\mathfrak{B}ak^2\,. - \text{etc.}\\
+bx^{m-2} &= +b\,. + {}^{m-2}\mathfrak{A}bk\,. + \text{etc.}\\
-cx^{m-3} &= -c\,. - \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Soll das zweyte Glied weggeſchafft werden, ſo hat man ${}^m\mathfrak{A}k - a = 0$, das iſt, $k = \frac{1}{m}a$, zu ſetzen. Sollte das dritte Glied wegzuſchaffen ſeyn, ſo hätte man

eine quadratiſche Gleichung für k. aufzulöſen; um das vierte wegzuſchaffen, eine Gleichung vom dritten Grade u. ſ. f.

205. Durch gehörige Annahme von k kann man allen Gliedern entweder wechſelsweiſe verſchiedene, oder durchgehends dieſelben Vorzeichen geben, wodurch in jenem Falle alle Wurzeln y poſitiv, in dieſem alle negativ werden. Dieſes geſchieht am leichteſten durch ſucceſſive Verſuche.

206. Wenn zwey Glieder zugleich weggeſchafft werden ſollen, ſo muß man ſetzen $x^2 + \alpha x = \beta + y$, wobey die Größen, α, β, ſo zu beſtimmen ſind, daß zwey gewiſſe Glieder in der neuen Gleichung für y wegfallen. Dieſes muß durch Elimination der Größe x geſchehen. Die Rechnung wird aber ſchon für niedrige Gleichungen weitläufig.

207. Es ſey die gegebene Gleichung

I. $x^5 - ax^2 + bx - c = o$.

Mit dieſer verbinde man folgende,

II. $x^2 - \alpha x + \beta = o$,

welche mit jener eine Wurzel gemein habe. Aus der Verbindung beider wird erhalten,

III. $(a - \alpha)x^3 - (b - \beta)x + c = o$.

Aus dieſer und II. folgt

IV. $(a\alpha - \alpha^2 - b + \beta)x - a\beta + \alpha\beta + c = o$,

$$\text{und } x = \frac{(a - \alpha)\beta - c}{(a - \alpha)\alpha - b + \beta}.$$

Aus II. und III. wird durch Wegſchaffung der gegebenen Glieder erhalten,

V. $((a - \alpha)\beta - c)x + c\alpha - (b - \beta)\beta = o$.

$$\text{alſo } x = \frac{(b - \beta)\beta - c\alpha}{(a - \alpha)\beta - c}.$$

Aus diesen beiden Werthen von x ergiebt sich die Relation zwischen α und β. Es ist

VI. $\beta^5 - (a\alpha - aa + 2b)\beta^4$
$+ (b\alpha\alpha - (ab - 3c)\alpha - 2ac + bb)\beta$
$- c\alpha^3 + ac\alpha^2 - bc\alpha + c^2 = 0.$

Wird α hier willkührlich angenommen, so ist β gegeben, aber wieder durch eine cubische Gleichung. Es kann nämlich jede der drey Wurzeln der cubischen Gleichung mit einer andern Wurzel in der quadratischen verbunden werden.

208. Nun setze man β + y statt β, so wird eine cubische Gleichung für y erhalten, worin die zwey Größen α und β zu bestimmen bleiben. Diese Gleichung hat die Form,

$$y^5 + My^2 + Ny + P = 0.$$

Der Werth dieser Gleichung für irgend ein y sey = z. Für y = 0, ist z = P, dem Werthe der Gleichung VI. Nun wird z aus P, wenn β + y statt β gesetzt wird. Also ist

$$z = P + \frac{\partial P}{\partial \beta} y + \frac{\partial^2 P}{2\partial\beta^2} y^2 + \frac{\partial^3 P}{6\partial\beta^3} y^3,$$

s. Differenzenrechnung, 17, 38. wo für x, fx, u, f(x+u) hier kommen β, P, y, z. Wird z = 0 gesetzt, so ist

$$N = \frac{\partial P}{\partial \beta}; \quad M = \frac{\partial^2 P}{2\partial\beta^2}; \quad 1 = \frac{\partial^3 P}{6\partial\beta^3}$$

Es ist also

$P = \beta^3 - (a\alpha - aa + 2b)\beta^2 + (b\alpha\alpha - (ab - 3c)\alpha$
$- 2ac + bb)\beta - c\alpha^3 + ac\alpha^2 - bc\alpha + c^2$

$N = 3\beta^2 - 2(a\alpha - aa + 2b)\beta$
$+ b\alpha^2 - (ab - 3c)\alpha - 2ac + b^2,$

$M = 3\beta - a\alpha + aa - 2b$

Setzt man $M = 0$; $N = 0$, so sind dadurch die Werthe von α und β bestimmt, und jeder wird unmittelbar durch eine quadratische Gleichung gefunden. Durch die Werthe von α und β ist P gegeben, also $y = -\sqrt[3]{P}$, und daraus endlich x mittelst der quadratischen Gleichung, $x^2 - \alpha x + \beta + y = 0$.

Dieses ist eine Probe von der Tschirnhausischen Methode, die in (132.) erwähnt ist. Nach dieser Probe wird man sich derselben zu bedienen schwerlich Lust haben.

209. Eine andere Verwandlung ist, $x = \frac{k}{y}$ zu setzen. Dadurch werden die grössern Wurzeln in kleinere, und die kleinern in grössere verwandelt. Ist $k = 1$, so treten dadurch in die Stelle der Wurzeln x, die eigentliche Brüche sind, in der verwandelten Gleichung alle y, die grösser als die Einheit sind. Hat die Gleichung für x keine Wurzeln zwischen $+1$ und -1, so hat die Gleichung für y alle ihre Wurzeln zwischen diesen Gränzen. Sind die ganzen Zahlen g und $g + 1$ zwey Gränzen für eine oder mehrere Wurzeln x, so setze man $x = g + \frac{1}{y}$, und die Gleichung für y enthält so viele Wurzeln, grösser als $+1$, als so viele x zwischen g und $g + 1$ liegen. Dieses Verfahren wird unten zur Entdeckung der mehrern Wurzeln zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen angewandt werden.

210. Wenn in einer Gleichung die höchste Potenz der unbekannten Grösse einen Coefficienten hat, wie in der Gleichung, $ax^m - bx^{m-1} + cx^{m-2} - dx^{m-3} + \text{etc.} = 0$, so dividire man, um diesen Coefficienten wegzuschaffen, die ganze Gleichung durch a, oder man setze $x = \frac{y}{a}$, und multiplicire die dadurch entstandene Gleichung mit a^{m-1}, so ist die transformirte,

$y^m - by^{m-1} + acy^{m-2} - a^2dy^{m-3} + a^3ey^{m-4} - \text{etc.} = 0$.

211. Die Gleichung,

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} \ldots \pm k = 0,$$

werde durch das letzte gegebene Glied dividirt, so erhält sie die Form,

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots . \mp \frac{a}{k} x^{m-1} \pm \frac{1}{k} x^m = 0.$$

Sind die Wurzeln jener Gleichung, p, q, r, s, t etc. so sind die Wurzeln in der zweyten Form noch dieselben, aber der Werth der Gleichung für irgend einen Werth von x nach der zweyten Form ist =

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$

$$\left(1 - \frac{x}{t}\right). \text{ etc.}$$

Denn in der erstern Form ist (165. 167.) der Werth der Gleichung das Product

$$(x - p)\ (x - q)\ (x - r)\ (x - s).\ \text{etc.}$$

Das gegebene Glied $\pm k$ ist das Product aus allen, den Wurzeln entgegengesetzten Grösßen, oder $(-p)\ (-q)\ (-r)\ (-s)$ etc. Wird die Gleichung durch $\pm k$ dividirt, so wird ihr Werth, oder das Product, $(x-p)(x-q)$ etc. auch dadurch dividirt. Dieses geschieht dadurch, daß man jeden Factor durch das entgegengesetzte der zugehörigen Wurzel dividirt. Dadurch ist der Quotient =

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$$

$$\left(1 - \frac{x}{t}\right). \text{ etc.}$$

so wie der Quotient von der Division der Gleichung durch $\pm k$ ist

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots . \pm \frac{1}{k} x^m.$$

212. In der zweyten Form ist I. α die Summe aller reciproken Wurzeln, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$ + etc. II. β die Summe aller Producte der reciproken Wurzeln nach Binionen, $\frac{1}{pq}+\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}+$ etc. III. γ die Summe aller Producte nach Ternionen, $\frac{1}{pqr}$ $+\frac{1}{prs}+\frac{1}{qrs}+$ etc. IV. δ die Summe aller Producte nach Quaternionen, als $\frac{1}{pqrs}$, etc. u. s. w.

Der Beweis ist schon in dem Artikel, Buchstabenrechnung, 19. gegeben.

Hievon wird bey unendlichen Reihen, als Gleichungen von einem unendlich hohen Grade, oder Werthen solcher Gleichungen, Gebrauch gemacht, um die Relationen ihrer Wurzeln zu den Combinationen nach Producten zu finden.

213. Gleichungen, worin gebrochne Potenzen der unbekannten Größe vorkommen, rational zu machen, setze man die höchste Radikalgröße auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, die übrigen Glieder alle auf die andere, und erhebe jene auf die Potenz des gleichen Grades wie die Wurzel. Dann bringe man die Radikalgröße, welche nun von dem höchsten Grade ist, auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, und mache sie durch Erhebung rational. So fahre man fort, bis alle irrationale Größen aufgehoben sind.

214. Exempel. Es sey $a - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$. Auf beiden Seiten quadrirt, ist $a^2 - 2a\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$. Es ist hier die Erhebung auf die vierte Po-

tenz nicht nöthig, weil nur bloß die zweyte und vierte Wurzel vorkommen, wovon jene das Quadrat dieser ist. Ferner ist

$$a^2 + x = (2a + x)\sqrt{x}, \text{ also}$$
$$a^4 + 2a^2x + x^2 = 4a^2x + 4ax^2 + x^3,$$

oder

$$x^3 + (4a - 1)x^2 + 2a^2x - a^4 = 0.$$

215. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in einer Gleichung vorhanden sind, und die Irrationalität bloß von der Ausziehung der Quadratwurzel herrührt, so kann man die gezeigte Methode auch bey denselben anwenden; aber nicht, wenn höhere Wurzelgrade vorkommen.

216. In einer Gleichung M) verwandle man die Vorzeichen aller ungeraden Potenzen in die entgegengesetzten, so sind in der neuen Gleichung N) die Wurzeln denen in M) gleich, aber entgegengesetzt. Ist das höchste Glied eine ungerade Potenz, so verwandle man darauf in N) alle Vorzeichen durchgehends in die entgegengesetzten, um dem höchsten Gliede das Vorzeichen + zu lassen. Oder, man verwandle in diesem Falle gleich anfangs die Vorzeichen der geraden Potenzen in M) in die entgegengesetzten.

217. Die beiden Gleichungen,

M) $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.} = 0,$

N) $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0,$

welche dieselben, aber entgegengesetzte Wurzeln haben, multiplicire man in einander, so entsteht daraus die Gleichung,

P) $o = x^{2m} + 2bx^{2m-2} + 2dx^{2m-4} + 2fx^{2m-6} + \text{etc.}$
$\quad - aa \;..\; - 2ac \;..\; - 2ae \;..$
$\quad + bb \;..\; + 2bd \;..$
$\quad - cc \;..$

Die Gleichung P) enthält die Wurzeln von M) und N) zusammen, oder m Paare gleicher und entgegengesetzter Wurzeln.

218. Den Unterschied der Exponenten setze man $\frac{2}{2}$, wodurch die Gleichung M) Quadratwurzeln enthält, auch sey m eine ganze Zahl, oder habe die Form $\frac{1}{2}(2n+1)$. Durch die Verwandlung von M) in die Gleichung P) wird jene Gleichung eine rationale.

Der Unterschied der Exponenten sey $\frac{4}{4}$, und 4m eine ganze Zahl, so enthält die Gleichung M) theils Quadratwurzeln, theils Biquadratwurzeln. Sie werde zuerst in eine Gleichung P) verwandelt, die nun noch bloß Quadratwurzeln enthält, und diese darauf in eine Gleichung Q), die ganz rational ist.

219. Exempel. Wie in (214.) sey

$$M)\; o = x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{4}} - c.$$

Hier ist die Einheit für die Exponenten $\frac{1}{4}$, so daß das dritte Glied fehlt. Mit dieser Gleichung verbinde man die Gleichung,

$$N)\; o = x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{2}{4}} + c,$$

so entsteht daraus

$$P)\; o = x^{\frac{6}{4}} - x^{\frac{4}{4}} + 2cx^{\frac{3}{4}} - c^2.$$

Diese multiplicire man durch die Gleichung,

$$Q)\; o = x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{4}} + 2cx^{\frac{1}{4}} + c^2,$$

so entsteht die rationale Gleichung,

$$S)\; o = x^3 + (4c - 1)x^2 + 2c^2x - c^4,$$

wie oben.

220. Die Gleichung

$$M)\ 0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + dx^{m-4} - \text{etc.}$$

multiplicire man mit der

$$N)\ 0 = x^{2m} - \alpha x^{2m-1} + \beta x^{2m-2} - \gamma x^{2m-3} + \delta x^{2m-4} - \text{etc.}$$

so entsteht daraus die Gleichung

$$\begin{array}{llllll} P)\ 0 = x^{3m} & - ax^{3m-1} & + bx^{3m-2} & - cx^{3m-3} & + dx^{3m-4} \\ & - \alpha x\ .\ . & + a\alpha\ .\ . & - b\alpha\ .\ . & + c\alpha\ .\ . \\ & & + \beta\ .\ . & - a\beta\ .\ . & + b\beta\ .\ . \\ & & & - \gamma\ .\ . & + a\gamma\ .\ . \\ & & & & + \delta\ .\ . \\ & & & + \text{etc.} & \end{array}$$

Man setze hier die Coefficienten derer Glieder, worin die Exponenten von x durch 3 nicht theilbar sind, $= 0$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$Q)\ 0 = x^{3m} - Ax^{3m-3} + Bx^{3m-6} - Cx^{3m-9} + \text{etc.}$$

deren Coefficienten durch die Werthe von α, β, γ, δ, etc. gefunden werden. Für diese Größen, deren Anzahl $2m$ ist, sind eben so viele Gleichungen des ersten Grades vorhanden, wodurch sie eine nach der andern bestimmt werden.

Da die Gleichung Q bloß Potenzen von x^3 enthält, so dient sie eine Gleichung von der Form

$$0 = x^{\frac{m}{3}} - ax^{\frac{m-1}{3}} + bx^{\frac{m-2}{3}} - cx^{\frac{m-3}{3}} + \text{etc.}$$

rational zu machen.

221. Exempel. Es sey

$$M)\ x^{\frac{2}{3}} - ax^{\frac{1}{3}} + b = 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} 0 &= a + \alpha \\ 0 &= b + a\alpha + \beta \\ 0 &= b\beta + a\gamma + \delta \\ 0 &= b\gamma + a\delta \end{aligned}$$

indem hier

$$N)\ o = x^{\frac{6}{3}} - \alpha x^{\frac{4}{3}} + \beta x^{\frac{2}{3}} - \gamma x^{\frac{1}{3}} + \delta$$

ist.

Daraus ist

$$\alpha = -a; \qquad \beta = aa - b$$
$$\gamma = -ab; \qquad \delta = +bb,$$

Hieraus ist

$$A = b\alpha + a\beta + \gamma = a^3 - 3ab$$
$$B = b\delta = b^3,$$

also

$$Q)\ x^3 - (a^3 - 3ab)x + b^3 = o.$$

222. Exempel in Zahlen. Es sey $\sqrt[3]{x} = y$, und $y^6 - 7y + 10 = o$. Diese Gleichung auf den sechsten Grad erhöht, so daß sie einer quadratischen gleichgültig bleibe, ist

$$y^6 - 133y^3 + 1000 = o,$$

oder

$$(y^3)^2 - 133\,(y^3) + 1000 = o.$$

Die Wurzeln jener sind $+2$ und $+5$; die Wurzeln von der erhöheten, aber als einer quadratischen, sind die Cubi von 2 und 5, oder $+8$ und 125.

223. Man sehe über diese Elevations-Methode, Lamberts Beyträge zur Mathematik, 2 Th. VIII. Fischers Aufsätze über die Wegschaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen, in Hindenburgs Archiv der Mathematik, 6tes und 8tes Heft. Haubers Auflösung des Elevationsproblems für Gleichungen, in Hindenburgs Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. Von Fermats Methode, irrationale complexe Größen wegzubringen, in dem Artikel Irrational.

224. Die erhöhte Gleichung enthält alle Wurzeln der niedrigern M), und noch dazu die Wurzeln der Gleichung N). Dieses sind fremde Wurzeln, die nicht zu den in der Frage gesuchten gehören, und nur durch die Wegschaffung der Irrationalität eingeführt sind. Die erhöhte Gleichung ist ein Product aus zwey Gleichungen, von welchen eine nur eine solchergestalt angenommene ist, so daß sie gewissen Bedingungen Genüge thut.

225. Wie die Brüche aus den Coefficienten wegzuschaffen sind, zeigt folgendes Beyspiel.

Die Gleichung sey

$$x^3 - \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{n}x - \frac{c}{p} = 0.$$

Man nehme die kleinste Zahl h, worin die Nenner m, n, p, aufgehen, und setze $x = \frac{y}{h}$, so ist

$$\frac{y^3}{h^3} - \frac{ay^2}{mh^2} + \frac{by}{nh} - \frac{c}{p} = 0.$$

Multiplicirt man mit h^3, so ist

$$y^3 - \frac{ah}{m}y^2 + \frac{bh^2}{n}y - \frac{ch^3}{p} = 0,$$

wo die Coefficienten zufolge der gemachten Bedingung für die Zahl h alle ganze Zahlen sind.

IX. Auflösung numerischer Gleichungen.

226. Die Gleichungen mit numerischen Coefficienten können alle entweder ganz genau, oder so genau als es nöthig ist, durch Näherung aufgelöset werden; selbst die unmöglichen Wurzeln lassen sich zufolge (189.) durch die Hülfsgleichung für die Unterschiede je zweyer Wurzeln bestimmen.

227. Eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind, und der zu dem höchsten Gliede gehörige = 1 ist, hat keine rationale gebrochne Wurzeln.

In der quadratischen Gleichung, $x^2 - ax + b = 0$, seyn die Coefficienten ganze Zahlen. Wäre eine Wurzel der rationale Bruch $\frac{p}{m}$, in den kleinsten Zahlen ausgedruckt, so wäre die andere $= a - \frac{p}{m} = \frac{ma - p}{m}$, gleichfalls in den kleinsten Zahlen. Das Product $\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{m}$ zweyer auf die kleinsten Zahlen gebrachten Brüche kann nicht eine ganze Zahl, b, seyn, da kein Factor von m in p und in q enthalten ist.

Die cubische Gleichung, $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ habe bloß ganze Zahlen zu Coefficienten. Man setze, daß sie rationale Brüche zu Wurzeln habe. Nun zerlege man sie in das Product,

$$(x^3 - \alpha x - \beta)\left(x - \frac{p}{m}\right),$$

wo $\frac{p}{m}$ eine der Wurzeln ist. Dieses Product entwickelt ist

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \frac{p}{m} \ldots + \frac{\alpha p}{m} \ldots - \frac{\beta p}{m}.$$

Hier ist $\alpha + \frac{p}{m}$ eine ganze Zahl, also α ein Bruch, $\frac{q}{m}$, der sich nicht verkleinern läßt, (denn der Factor von m, der in q aufgeht, müßte auch in p aufs

gehen), und $\frac{\alpha p}{m} = \frac{pq}{mm}$, eben ein solcher Bruch.

Da b eine ganze Zahl ist, so ist β ein Bruch, $\frac{r}{mm}$, der sich nicht verkleinern läßt. Das gegebene Glied des Products ist nun eben ein solcher Bruch, $\frac{pr}{m^3}$, welcher nicht dem als eine ganze Zahl angesetzten Gliede, c, gleich seyn kann.

Auf dieselbe Art wird für alle Gleichungen gezeigt, daß sie keine rationale Brüche zu Wurzeln haben, wenn die Coefficienten alle ganze Zahlen sind.

228. Ist eine solche Gleichung gegeben, so suche man zuerst, ob sie nicht ganze Zahlen zu Wurzeln habe. Da das gegebene Glied das Product aller Wurzeln ist, so versuche man alle ganze Factoren desselben mit beiderley Vorzeichen. Die Arbeit ist langwierig, wenn das gegebene Glied viele Factoren hat. Sie wird durch folgendes Verfahren sehr abgekürzt. In der gegebenen Gleichung A) setze man $y + 1$ und $y - 1$ für x, so erhält man zwey neue Gleichungen B) und C). Hat A eine ganze Zahl (oder mehrere) zur Wurzel, so muß das letzte Glied in B) einen Factor enthalten, der um 1 kleiner ist als einer der Factoren des letzten Gliedes in A), wenn diese mit beiden Vorzeichen genommen werden. Hingegen das gegebene Glied in C) muß einen Factor enthalten, der um 1 größer ist, als eben dieser Factor des letzten Gliedes in A). So viele Wurzeln in A) ganze Zahlen sind, so oft muß dieses eintreffen. Um das letzte Glied von B) zu finden, hat man nur nöthig für x zu setzen + 1, und um denselben in C) zu erhalten, $x = -1$ zu setzen.

229. Exempel. Es sey $x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 95x^2 - 326x + 312 = 0$. Man setze $x = +1$, so ist das Aggregat der Glieder $= +80$; setzt man

$x = -1$, so ist es $= +720$. Die absoluten Factoren von 312 sind

einfache . . . 1, 2, 2, 2, 3, 13
zweyfache . . . 4, 6, 26, 39
dreyfache . . . 8, 12, 52, 39
vierfache . . . 24, 104, 156
die Zahl . . . 312.

Von der Zahl 80 braucht man unmittelbar nur die einfachen Factoren, 1, 2, 2, 2, 2, 5, und von der Zahl 720 ebenfalls nur diese, nämlich 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, anzuzeichnen. Unter den Factoren der Zahl 312 sind nur folgende, welche um 1 vermindert einen Factor von 80 geben, $+2$, $+3$, $+6$, -1, -3, -4, -39. Folgende um 1 vergrößert geben Factoren von 720, nämlich $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+39$, $+8$, -2, -3, -13, -4, -5. Von diesen Factoren der Zahlen 80 und 720 können nur die gemeinschaftlichen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung seyn, also $+2$, $+3$, -3, -4. Da hier nur vier Wurzeln gefunden sind, und fünf sich zeigen müßten, wenn alle möglich wären, so ist eine von den gefundenen vier Zahlen keine Wurzel. Diese ist, wie die Probe mit den Zahlen zeigt, die Zahl -3. Die möglichen Wurzeln sind $+2$, $+3$, -4.

Man sehe Newtons Arithm. univerf. p. 37, de inventione divisorum. Auch Clairauts Algebra, III. Theil, und mehrere Schriftsteller von der Algebra.

230. Ist eine Wurzel, die p heiße, in ganzen Zahlen gefunden, so wird die Gleichung durch den Factor $x - p$, wodurch sie theilbar ist, dividirt, und dadurch um einen Grad erniedrigt. So viele Wurzeln gefunden sind, so viele Divisionen.

231. Die irrationalen Wurzeln einer Gleichung, es sey der gegebenen unmittelbar, oder der erniedrigten, zu finden, suche man zuerst die Gränzen sämmtlicher Wurzeln in ganzen Zahlen. Dieses geschieht dadurch, daß

man in der Gleichung für x zuerst setzt $x = y - g$, und g so bestimmt, daß alle Wurzeln der Gleichung für y positiv sind, oder daß die Vorzeichen alle abwechseln, für $x = y - g + 1$ aber eine einzige Folge gleichnamiger Vorzeichen entstehe. Zweytens setzt man $x = y + h$, und sucht einen Werth von h, wodurch alle Wurzeln in der Gleichung für y negativ werden, indem alle Vorzeichen gleichnamig sind, so aber daß $x = y + h - 1$ eine Abwechslung der Vorzeichen gebe, also eine Wurzel positiv wird.

Die erste Bestimmung, $x = y - g$ giebt $y = x + g$, also ist, wenn jede Wurzel y positiv ist, g größer als jede negative Wurzel x. Ist aber $x + g = 1$ zugleich negativ, so zeigt dies an, daß $g - 1$ kleiner als die größte negative Wurzel, absolut genommen, ist.

Die zweyte Bestimmung $x = y + h$ giebt $y = x - h$: also ist, wenn jede Wurzel y negativ ist, h größer als jede positive Wurzel x. Da aber zugleich $x - h + 1$ ein positives y giebt, so ist $h - 1$ kleiner als die größte positive Wurzel x.

232. Hierauf setze man für x die Glieder einer arithmetischen Reihe, welche zwischen den beiden Gränzen, g, h, enthalten ist, und berechne die zugehörigen Werthe y der Gleichung. Für eine Gleichung vom dritten Grade hat man nur vier Werthe von y unmittelbar zu berechnen nöthig, für eine Gleichung vom vierten Grade fünf, u. s. f. Aus diesen finde man die ersten Unterschiede, daraus die zweyten, und so weiter, bis zu dem beständigen Unterschiede. Hat man diesen gefunden, so erhält man daraus rückwärts die vorletzten Unterschiede, aus diesen die nächst vorhergehenden, u. s. w. bis daß man auf die Werthe y selbst kommt. Werden für x die ganzen Zahlen nach der Reihe gesetzt, so bediene man sich der Formeln für die Anfangsglieder der Differenzreihen, (178.), wie in (179.) geschehen ist.

233. Zwischen denjenigen Werthen von x, bey welchen die Vorzeichen von y wechseln, liegt eine Wurzel

der Gleichung; finden sich so viele Zeichenwechsel als die Gleichung Wurzeln haben kann, so ist weiter nichts nöthig, als die Wurzeln genauer zu bestimmen. Sonst aber muß man suchen, wo zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen Wurzeln versteckt seyn mögen, ob es gleiche Wurzeln gebe, oder ob unmögliche vorhanden seyn müssen.

234. Für $x = p$, einer ganzen Zahl, sey der Werth der Gleichung $= \pm A$; für $x = p + 1$ sey der Werth $= \mp B$, wo A und B bloß die Quantität bedeuten. Da $A + B$ die Veränderung des Werthes der Gleichung für die Veränderung 1 von x ist, so ist $\frac{A}{A+B}$ beynahe die Veränderung von $x = p$, wodurch der Werth der Gleichung $= 0$ wird, und $p + \frac{A}{A+B}$ ist der erste genäherte Werth der Wurzel.

235. Man setze $p + \frac{A}{A+B} = q$, und die Wurzel $x = q + u$. Diesen Werth setze man in der Gleichung für x, so erhält man eine Gleichung für u, zwar von demselben Grade wie die für x, worin aber eine Wurzel ein Bruch ist, daher die Glieder, worin das Quadrat und die höhern Potenzen von u enthalten sind, wenigen Einfluß auf den Werth von u haben, es müßten denn die Coefficienten groß seyn. Der Werth von u wird also beynahe durch eine einfache Gleichung gefunden. Den genäherten Werth von u setze man r, und $u = r + v$, so erhält man durch die Substitution von $r + v$ für u eine Gleichung für v, worin v ein kleinerer Bruch als die Wurzel in der Gleichung für u ist. Auf diese Art hat man fortzufahren, so weit als es zur Bestimmung der Wurzel x nach den Umständen erforderlich ist.

236. Bequemer behält man die Gleichung für x bey, und setzt folgerweise die genäherten Werthe von u in die Glieder mit den höhern Potenzen, wodurch der Werth

von u immer genauer bestimmt wird. Ein Beyspiel wird dieses ohne umständliche Vorschriften deutlich machen.

237. Exempel. Die Wurzeln der Gleichung $x^5 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$ zu finden.

I. Man setze $x = y - g$, so ist

$$\begin{array}{rcl} x^5 = & y^5 - 5gy^4 + 10g^2y^3 - 10g^3y^2 + 5g^4y - g^5 \\ -9x^2 = & -9 \quad +18g \quad -27g^2 \quad +18g^3 \quad -9g^4 \\ -4x = & \quad -4 \quad +8g \quad -12g^2 \quad +8g^3 \quad -4g^4 \\ +100 = & \quad +100 \end{array}$$

Damit je zwey Vorzeichen wechseln, ist es nur nöthig, das letzte Glied subtractiv zu machen. Für $g = 3$ ist es $+4$; für $g = +4$ ist es -92. Die Gränze der negativen Wurzeln ist daher -4.

II. Man setze $x = y + g$, so ist

$$\begin{array}{rcl} x^5 = & y^5 + 5gy^4 + 10g^2y^3 + 10g^3y^2 + 5g^4y + g^5 \\ -9x^2 = & -9 \quad -18g \quad -27g^2 \quad -18g^3 \quad -9g^4 \\ -4x = & \quad -4 \quad -8g \quad -12g^2 \quad -8g^3 \quad -4g^4 \\ +100 = & \quad +100 \end{array}$$

Nun nehme man g so, daß alle Vorzeichen $+$ werden. Wegen des zweyten Gliedes ist $g > 3$; wegen des dritten ist $g > 6$; wegen des letzten ist $g > 7$, und $+8$ ist die Gränze der positiven Wurzeln.

III. Da die dritte Wurzel sich aus den zwey andern ergiebt, so ist es nicht nöthig, eine Folge von Werthen der Gleichung zu berechnen.

IV. Der Werth der Gleichung für $x = +7$ ist $= -26 = -A$; und für $x = +8$ ist der Werth $= +4 = +B$. Also $\frac{A}{A+B} = \frac{26}{30} = 0,9$ beynahe. Es sey $x = 7,9 + u$, so ist

$$x^5 = +493{,}039 + 187{,}23\,u + 23{,}7\,u^2 + u^5$$
$$-9x^2 = -561{,}690 - 142{,}20\,u - 9{,}0\,u^2$$
$$-4x = -31{,}600 - 4{,}00\,u$$
$$+100 = +100$$

$$0 = -0{,}251 + 41{,}08\,u + 14{,}7\,u^2 + u^5$$

oder

$$41{,}03\,u = +0{,}251 - 14{,}7\,u^2 - u^5 \ldots$$

Demnach $u = 0{,}006$ nahe. Dieser Werth in die beiden höchsten Glieder gesetzt, giebt

$$41{,}08\,u = +0{,}251 - 0{,}0005292 - 0{,}000000216$$
$$= 0{,}250471 \ldots$$

Daher $u = 0{,}006104$, weil das in dem ersten Werthe von u weggelassene Stück, 0,0001 einen Fehler von nicht 0,00002 giebt, daher man die Division bis zu der vierten Ziffer des Quotienten fortsetzen darf. Setzt man nun für u^2 und u^5 die verbesserten Werthe, so wird u noch viel genauer gefunden. Es genüge $u = 0{,}006104$, so ist $x = 7{,}906104$.

V. Die hier einzige negative Wurzel fällt zwischen -3 und -4. Es ist $+A = +4$; $-B = -92$, also $\frac{A}{A+B} = \frac{4}{96}$, und $x = -3{,}04 - u$. Demnach ist

$$x^5 = -28{,}094464 - 27{,}7248\,u - 9{,}12\,u^2 - u^5$$
$$-9x^2 = -83{,}1744 - 54{,}72\,u - 9{,}00\,u^2$$
$$-4x = +12{,}16 + 4{,}00\,u$$
$$+100 = +100{,}00$$

$$0 = +0{,}891136 - 78{,}4448\,u - 18{,}12\,u^2 - u^5$$

oder

$$78{,}4448\,u = 0{,}891136 - 18{,}12\,u^2 - u^3,$$

und $u = 0{,}0113$ beynahe, da das zweyte Glied in der dritten Decimalstelle anfängt. Setzt man diesen Werth in das zweyte und dritte Glied des zweyten Theils der Gleichung, so wird $u = 0{,}0113305$, also $x = -3{,}0513305$.

VI. Die dritte Wurzel wird aus dem Coefficienten von x^2 gefunden. Es ist 9 die Summe der drey Wurzeln, also ist die dritte Wurzel $= +9 - 7{,}906104 + 3{,}051330 = +4{,}145226$.

VII. Zur Probe der Rechnung dient das gegebene Glied der Gleichung. Das Product der drey Wurzeln, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, ist $= 100$. Nun ist

log. $7{,}906104 = 0{,}8979625$

log. $4{,}145226 = 0{,}6175482$

log. $3{,}051330 = 0{,}4844892$

log. Products $= 1{,}9999999$

also das Product sehr nahe $= 100$.

238. Ob zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen zwey oder mehrere ungleiche Wurzeln liegen, wird auf folgende Art gefunden.

Es seyn diese ganze Zahlen p und $p + 1$; die Gleichung sey

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} \ldots \pm k = 0.$$

Man setze $x = p + \frac{1}{z}$, und multiplicire die verwandelte Gleichung durch z^m, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$Az^m - Bz^{m-1} + Cz^{m-2} \ldots \pm K = 0.$$

Da einer oder mehrere Werthe von x sind $p + \frac{1}{z}$, wo $\frac{1}{z}$ ein eigentlicher Bruch ist, so hat die Gleichung für z wenigstens eine positive Wurzel, die größer als die Einheit ist. Setzt man nun in dieser Gleichung die ganzen positiven Zahlen von 0 an für z, so giebt der Vorzeichenwechsel die nächsten ganzen Zahlen für z. So viele positive Wurzeln über 1 die Gleichung für z hat, so viele Wurzeln zwischen p und p + 1 hat die Gleichung für x. Man muß auch darauf Acht haben, ob auch zwey oder mehrere Wurzeln z zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen liegen, wenn zu der Gleichung für x noch nicht die Gränzen aller Wurzeln in ganzen Zahlen gefunden sind.

239. Exempel. Es sey

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0.$$

Die Werthe dieser Gleichung für $x = +2; +3; +4; +5$ sind $-56; -3; -8; -35$. Es ist leicht möglich, daß zwischen + 3 und + 4 zwey Wurzeln liegen. Man setze $x = 3 + \frac{1}{z}$, so ist die verwandelte Gleichung

$$0 = -3 + \frac{80}{z} - \frac{30}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^4},$$

oder

$$0 = 3z^4 - 80z^3 + 30z^2 - 4z - 1.$$

Die Werthe dieser Gleichung für $z = +1; +2; +3; +4; +5$, sind folgende: + 8; − 1; − 40; − 49; + 104, so daß zwey positive Wurzeln z größer als 1 vorhanden sind, eine zwischen + 2 und + 3; die andere zwischen + 4 und + 5. Daher liegen zwey Wurzeln x zwischen + 3 und + 4, die eine ist etwas kleiner als $3 + \frac{1}{2}$, die andere als $3 + \frac{1}{4}$. Nun setze man $x = 3{,}25 - u$, und dann auch $x = 3{,}5 - u$, so erhält man nach dem obigen

Verfahren die beiden Werthe von x so genau als es erforderlich seyn mag.

240. Wie die gleichen Wurzeln für Gleichungen, die den vierten Grad nicht übersteigen, gefunden werden, ist in dem VII. Abschnitte gezeigt. Bey höhern Gleichungen hat man sich der daselbst (187.) angezeigten Methode von la Grange zu bedienen.

241. In der Abhandlung über die numerische Auflösung der Gleichungen von la Grange ist, von der Gleichung für die Unterschiede je zweyer Wurzeln einer Gleichung die Anwendung gemacht, eine Zahl zu finden, die kleiner als der kleinste Unterschied irgend zweyer Wurzeln ist, zu dem Ende, daß man in der arithmetischen Reihe der Werthe von x die Unterschiede weder unnöthiger weise zu klein nehme, welches die Berechnung zu weitläufig macht, noch auch sie zu groß setze, wobey zwey oder mehr Wurzeln übersehen werden könnten. Allein man muß, um das schicklichste Intervall der Werthe von x zu erhalten, eine Gleichung bilden, die auf einen hohen Grad steigen kann, auf den $\frac{m(m-1)}{2}$ ten Grad, wenn die für x vom mten ist. Die Gleichung zu finden, und die Gränzen der Wurzeln zu suchen ist mühsamer als eine beträchtliche Anzahl Werthe einer Gleichung zu berechnen. Wenn man auf das Zunehmen und Abnehmen der Werthe der Gleichung und die Beschaffenheit der Glieder in den verschiedenen Differenzreihen Acht giebt, so wird man leicht merken, wo zwey oder mehr Wurzeln innerhalb eines Intervalls liegen können, und hier die Intervalle in der Reihe der x kleiner machen. Da man die Anzahl der möglichen und unmöglichen Wurzeln zusammen genommen weiß, so kann man keine aus Unvorsichtigkeit aus der Acht lassen.

242. Die Wurzeln lassen sich auch in Form von Kettenbrüchen, die wechselnd größer und kleiner als der

genaue irrationale Werth der Wurzel sind, darstellen. Davon in dem Artikel, Kettenbrüche.

Die Glieder rücklaufender Reihen dienen auch zur Erfindung der größten und kleinsten Wurzel, s. rücklaufende Reihe.

X. Auflösung literaler Gleichungen.

243. Die literalen Gleichungen, in welchen die Coefficienten allgemeine Größen sind, lassen sich, wie schon bemerkt ist, außer denen von den ersten drey Graden, nicht so auflösen, daß die Wurzeln durch endliche Formeln dargestellt würden. Durch Reihen mit einer unendlichen Anzahl von Gliedern ist es zwar möglich; es ist aber unbequem, daß solche Reihen oft wenig convergiren, oder gar divergiren, und daß sie unmögliche Größen in einer möglichen Gestalt geben. Weil die Entwickelung der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung mittelst ihrer Coefficienten auf der Lehre von der Umkehrung der Reihen beruht, so wird dieselbe erst in dem Artikel, Umkehrung der Reihen, vorgetragen werden können.

244. Der Taylorsche Lehrsatz dient zur Auflösung der Gleichungen, wenn für eine Wurzel schon ihre nächsten Gränzen in ganzen Zahlen gefunden sind. Die Gleichung

$$x^m + ax^{m-2} + bx^{m-3} + cx^{m-5} + dx^{m-6} \ldots + k = o$$

werde als eine Function einer veränderlichen Größe x betrachtet, und der Werth dieser Function für irgend ein x sey $= y$, also $= o$, wenn x eine der Wurzeln ist. Man bezeichne diese Relation durch $\varphi x = y$, wo φ das Functionszeichen ist (s. Function). Es verändere sich x um u, so ist (Differenzenrechnung, 38.)

$$\varphi(x+u) = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 \varphi x}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Wenn hier x von einer der Wurzeln wenig verschieden ist, so erhält man eine solche Formel, wie in (237.) zur Annäherung an den Werth der Wurzel gebraucht ist. In dem Exempel daselbst ist $x = 7{,}9$; $\varphi x = -0{,}251$.

245. Es sey $x + u$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $\varphi(x+u) = 0$, und

$$0 = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Der Kürze wegen setze man die Differentialquotienten nach der Folge p, q, r, s, etc. und $\varphi x = y$, so ist

$$0 = y + pu + \tfrac{1}{2}qu^2 + \tfrac{1}{6}ru^3 + \tfrac{1}{24}su^4 + \text{etc.}$$

Um hieraus den Werth von u herzuleiten, setze man u aus einer Reihe von Theilen, A, B, C, D, etc. zusammen, deren jeder gegen den vorhergehenden so klein sey, daß B sich nur mit A A vergleichen lasse, C mit A^3 und AB; D mit A^4, A^2B, AC, B^2, u. s. f. Nun setze man in der Gleichung für u den Werth

$$u = A + B + C + D + \text{etc.}$$

so ist

$$\begin{aligned}
y &= y \\
pu &= Ap + Bp + Cp + Dp + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{2}qu^2 &= \quad + A^2q + ABq + ACq + \text{etc.} \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}B^2q + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{6}ru^5 &= \quad + \tfrac{1}{6}A^3r + \tfrac{1}{2}A^2Br + \text{etc.} \\
\tfrac{1}{24}su^4 &= \quad + \tfrac{1}{24}A^4s + \text{etc.} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Glieder rechter Hand zusammengenommen sind Null. Da sie von verschiedenen Ordnungen der Größe sind, so kann dieses nur erhalten werden, wenn die Größen von einerley Ordnung der Größe, die unter einander gesetzten, sich aufheben, zufällige Modificationen durch die Coefficienten, und durch die Voraussetzung selbst nicht geachtet. Dadurch werden folgende Bestimmungen erhalten.

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{q}{2p^3}y^2$$

$$C = -\frac{q^2}{2p^5}y^3 + \frac{r}{6p^4}y^3$$

$$D = -\frac{5q^3}{8p^7}y^4 + \frac{5qr}{12p^6}y^4 - \frac{s}{24p^5}y^4$$

etc.

246. Exempel. Die Gleichung, $x^5 + 2x - 2 = 0$, aufzulösen. Hier ist

$$y = x^5 + 2x - 2;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p = 5x^4 + 2; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = 20x^3;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = 60x^2; \qquad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s = 120x;$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = t = 120.$$

Für $x = 0$ ist $y = -2$, für $x = +1$ ist $y = +1$, also ist, wenn $x = +1$ genommen wird, der Werth von u klein und negativ. Dadurch ist $p = +7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$; $t = 120$, und

$$u = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \left(\frac{200}{7^6} - \frac{10}{7^4}\right)$$

$$- \left(\frac{5.1000}{7^7} - \frac{5.100}{7^6} + \frac{5}{7^5}\right) - \text{etc.}$$

oder

$$u = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{230}{7^5} - \frac{1745}{7^7} - \text{etc.}$$

das ist $u = -0{,}18$ nahe, und die Wurzel $x + u = 1 - 0{,}18 = +0{,}82$ nahe. Wird dieser Werth für x in die Gleichung gesetzt, so wird daraus durch eine neue Rechnung der Unterschied von der Wurzel sehr genau gefunden werden können.

247. Man kann x auch als eine Function von y ansehen, so daß $x = \varphi y$, und $x - u = \varphi(y - z)$. Nun ist

$$\varphi(y-z) = \varphi y - \frac{\partial x}{\partial y}.z + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{z^2}{1.2}$$

$$- \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}.\frac{z^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 x}{\partial y^4}.\frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Ist $x - u$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $y - z = 0$, und $y = z$, also

$$x - u = x - \frac{\partial x}{\partial y}y + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{y^2}{1.2} - \text{etc.}$$

oder

$$u = \frac{\partial x}{\partial y}.y - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}.\frac{y^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}.\frac{y^3}{1.2.3}$$

$$- \frac{\partial^4 x}{\partial y^4}.\frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Man hat nun für einen Werth von x, welcher einer Wurzel nahe kommt, den zugehörigen Werth der Gleichung y, und die Werthe der Differentialquotienten zu suchen, und die daraus entstehenden Glieder mit Beobachtung der Vorzeichen, die sie erhalten müssen, zusammen zu neh-

men, so wird der Werth von u, dem Unterschiede der Wurzel und des gesetzten Werthes von x, dadurch mehr oder weniger genau gefunden, nachdem die Reihe schneller oder langsamer convergirt. In dem letztern Falle hat man den durch die erste Rechnung verbesserten Werth von x statt des zuerst gebrauchten zu nehmen.

248. Exempel. Die Gleichung sey, $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, so daß

$$y = x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4; \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{4(x^3 - x + 1)^2}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{3x^2 - 1}{16(x^3 - x + 1)^3};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^2 \partial x} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{16(x^3 - x + 1)^4};$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{64(x^3 - x + 1)^5}, \text{ etc.}$$

Also ist

$$u = \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} + \frac{(3x^2 - 1)y^2}{32(x^3 - x + 1)^3} + \frac{(7x^4 - 4x^2 - 2x + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = +1$, so ist $y = -5$; setzt man $x = +2$, so ist $y = -8$; also liegt die Wurzel näher an $+2$ als an $+1$. Man setze $x = 1,6$, so ist $y = -0,1664$, und

$$\left.\begin{array}{l} u = x - 0,0118993 \\ \quad + 0,0001353 \\ \quad - 0,0000023 \end{array}\right\} = -0,0117663.$$

da die Wurzel ist $x - u$, so ist sie sehr nahe $= 1{,}6117663$.

In Eulers Differentialrechnung, 2 Th. S. 563, woraus die Methode mit dem Exempel genommen ist, ist der dritte Differentialquotient im Zähler unrichtig. Dieser ist daselbst $21x^4 - 12xx - 3$. Die Wurzel findet Euler $= 1{,}6117632$. Er hat aber $x = 1{,}61$ gesetzt. Lange nachher hat Euler diese Methode dahin erweitert, daß sie dient, jede Potenz einer Wurzel und ihren natürlichen Logarithmen zu finden. Nova Acta Petrop. T. VI.

249. Die Formel für die Wurzel (247.) hat Euler im J. 1740. an die Pariser Akademie der Wissenschaften ohne Beweis geschickt. S. eine Abhandlung von dem Marquis de Courtivron, sur une maniere de resoudre par approximation les équations de tous les degrés. Mem. de l'Ac. 1744. Courtivron verwandelt die Gleichung für x in eine für u, wenn $x = k + u$, und u klein ist. Diese kehrt er um, so daß u durch eine Reihe dargestellt wird. Seine Formel findet er, wie es nothwendig ist, mit der Eulerischen übereinstimmend.

250. Eine andere allgemeine Methode, die noch nicht angewandt worden, ist folgende:

I. Die gegebene Gleichung für x werde in eine Gleichung für u verwandelt, so daß eine Wurzel derselben kleiner als 1 sey, wenn jene Gleichung nicht selbst so beschaffen ist. Die verwandelte Gleichung sey

$$a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + \text{etc.} = 0.$$

Man multiplicire sie durch eine unbestimmte Function,

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$

so ist das Product =

$$\begin{array}{l} a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + \text{etc.} \\ \quad + a\alpha .. + b\alpha .. + c\alpha .. + d\alpha .. + e\alpha .. + \text{etc.} \\ \qquad + a\beta .. + b\beta .. + c\beta .. + d\beta .. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + a\gamma .. + b\gamma .. + c\gamma .. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad + a\delta .. + b\delta .. + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a\varepsilon .. + \text{etc.} \end{array}$$

In diesem Producte setze man die Coefficienten von u^2, u^3, u. s. f. $= 0$, so erhält man dadurch Bestimmungen von α, β, γ, etc. und es ist nahe $a + (b + a\alpha)u = 0$, also $u = -\frac{a}{b + a\alpha}$, nahe.

II. Zuerst setze man nur die beiden Coefficienten von u^2 und u^3 Null, so ist

$$c + b\alpha + a\beta = 0$$
$$d + c\alpha + b\beta + a\gamma = 0.$$

Da hier eine unbestimmte Größe mehr ist, als Gleichungen vorhanden sind, so ist eine willkührlich anzunehmen. Man setze $\gamma = 0$, und zugleich δ, ε, etc auch $= 0$, so ist die multiplicirende Function $= 1 + \alpha u + \beta u^2$. Aus jenen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Wegschaffung von β der Werth von α, nämlich $\alpha = \frac{ad - bc}{bb - ac}$, also

$$u = -\frac{a(bb - ac)}{b(bb - ac) + a(ad - bc)}.$$

251. Exempel. Die gegebene Gleichung sey $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$. Eine Wurzel derselben fällt zwischen $+7$ und $+8$, näher an 8 (137.). Man setze $x = 8 - u$, so ist die transformirte Gleichung,

$$0 = +4 - 44u + 15u^2 - u^3,$$

also

$$a = +4;\ b = -44;\ c = +15;\ d = -1.$$

Ji

Diese Werthe in die Formel für u gesetzt, geben $u = +\frac{73904}{799200} = \frac{938}{9950} = 0{,}093894$, folglich die gesuchte Wurzel $x = 7{,}906106..$ Die mühsamere Rechnung a. a. O. gab 7,906104.

252. Wenn es nöthig ist, kann man den gefundenen Werth leicht verbessern. Das fünfte Glied des Products ist $= (d\alpha + c\beta)u^4$, da γ, δ, etc. $= 0$ gesetzt sind. In diesem setze man für u den gefundenen Werth, und addire dieses Glied zu a, worauf man u aufs neue berechnet. Es ist $\beta = -\frac{cc - bd}{bb - ac}$.

253. Nun nehme man zum Multiplicator der Gleichung die Function, $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$, und setze die Coefficienten von u^2, u^3, u^4 jeden Null, so ist

I. $c + b\alpha + a\beta = 0$

II. $d + c\alpha + b\beta + a\gamma = 0$

III. $e + d\alpha + c\beta + b\gamma = 0$.

Die Gleichungen II. und III. geben durch die Wegschaffung von γ.

IV. $bd - ae + (bc - ad)\alpha + (bb - ac)\beta = 0$.

Diese und I. geben durch die Wegschaffung von β

V. $(bb - ac)c - (bd - ae)a + (bb - ac)b\alpha - (bc - ad)a\alpha = 0$.

Also

$$\alpha = \frac{(ad - bc)b - (ae - cc)a}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}.$$

$$b + a\alpha = \frac{2(ad - bc)ab - (ac - bb)bb - (ae - cc)aa}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$u = \frac{(ad - bc)aa - (ac - bb)ab}{(ac - bb)bb - 2(ad - bc)ab + (ae - cc)aa}$$

254. Exempel. Es sey in der Gleichung (239.),

$$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0,$$

die an + 13 nächste Wurzel zu finden. Setzt man $x = 3\frac{1}{3} + u$, so ist die verwandelte Gleichung

$$0 = 3 - 20u + 30u^2 - 4u^3 - u^4,$$

wo $a = +3$; $b = -20$; $c = +30$; $d = -4$; $e = -1$ ist. Ferner ist $(ad - bc)aa = 5292$; $(ac - bb)ab = +18600$; $(ac - bb)bb = -124000$; $2(ad - bc)ab = -70560$; $(ae - cc)aa = -8127$. Daher

$$u = \frac{13888}{64197} = 0,216155\ldots$$

und $x = 3,216155\ldots$

255. Um mit Sicherheit die Gränze zu bestimmen, bis auf welche nach diesem Verfahren die Wurzel gefunden wird, muß das erste der weggelassenen Glieder des Products, nämlich $(e\alpha + d\beta + c\gamma)u^5$ berechnet werden, wenn nämlich zu dem Multiplicator vier Glieder genommen sind. Es ist

$$\alpha = \frac{(ad - bc)b - (ae - cc)a}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$\beta = \frac{(ae - bd)b - (ad - bc)c}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

$$\gamma = \frac{(bd - cc)c - (ad - bc)d + (ac - bb)e}{(ad - bc)a - (ac - bb)b}$$

256. Anstatt den genäherten Werth von u durch eine einfache Gleichung zu finden, kann man auch eine quadratische anwenden. Man setze die Coefficienten von u^5 und mehrere folgende gleich Null. Der Multiplicator der Gleichung sey $1 + \alpha u + \beta u^2$, so erhält man die Gleichungen,

$$\text{I.}\quad d + c\alpha + b\beta = 0$$

$$\text{II.}\quad e + d\alpha + c\beta = 0,$$

wodurch α und β, also die Coefficienten der Näherungs-Gleichung,

$$a + (b + a\alpha)u + (c + b\alpha + a\beta)u^2 = 0,$$

bestimmt werden.

Nimmt man den Multiplicator, $1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3$, so kann man drey Coefficienten Null setzen, die von u^3, u^4, u^5, wodurch die quadratische Gleichung noch viel genauer den Werth von u giebt.

257. Hat u zwey Werthe, die kleiner als die Einheit sind, so findet man sie mittelst der quadratischen Gleichung beide. Die einfache Gleichung giebt nur den kleinern Werth, der die gemachte Voraussetzung am nächsten erfüllt, wie in dem zweyten Exempel (254.), worin zwey Wurzeln x zwischen + 3 und + 4 fallen.

258. Auf eine ähnliche Art kann man eine Näherungsgleichung vom dritten, oder einem noch höhern Grade sich verschaffen, es sey nun eine Gleichung zu erniedrigen, oder die mehrern Wurzeln, die zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen liegen, zu finden.

259. Auch für große u läßt sich eine Annäherungsgleichung nach der für kleine u gebrauchten Methode finden. Es sey die Gleichung

$$0 = u^m + a u^{m-1} + b u^{m-2} + c u^{m-3} + d u^{m-4} + \text{etc.}$$

Diese werde durch $1 + \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{\gamma}{u^3} + \frac{\delta}{u^4} +$ etc. multiplicirt. Das Product ist $= 0 =$

$$\begin{array}{lllllll}
u^m + & a u^{m-1} + & b u^{m-2} + & c u^{m-3} + & d u^{m-4} + & \text{etc.} \\
+ \alpha \,.. & + a\alpha \,.. & + b\alpha \,.. & + c\alpha \,.. & + \text{etc.} & & \\
& + \beta \,.. & + a\beta \,.. & + b\beta \,.. & + \text{etc.} & & \\
& & + \gamma \,.. & + a\gamma \,.. & + \text{etc.} & & \\
& & & + \delta \,.. & + \text{etc.} & & \\
& & & & \text{etc.} & &
\end{array}$$

Man nehme den Multiplicator $1 + \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2}$, und setze die Coefficienten von u^{m-2} und u^{m-3} Null, so ist

I. $b + a\alpha + \beta = 0$

II. $c + b\alpha + a\beta = 0$.

Hieraus ist $\alpha = \frac{c - ab}{aa - b}$, also ist

$$u = a + \alpha = \frac{a^3 - 2ab + c}{aa - b} \text{ nahe.}$$

Auch ist $\beta = \frac{bb - ac}{aa - b}$, und

$$c\alpha + b\beta = \frac{cc - 2abc + bbb}{aa - b}.$$

Aus dem Werthe von $c\alpha + b\beta$ ist der Grad der Annäherung zu beurtheilen. Das erste der weggelassenen Glieder ist $\left(d + \frac{cc - 2abc + bbb}{aa - b}\right) u^{m-4}$.

260. Die durch die Multiplication mit einer Function von u entstandene Gleichung ist in beiden Fällen eine Hülfsgleichung von einem höhern Grade als die vorgegebene. Weil aber einige Glieder in ihr fehlen, und die darauf folgenden gegen die ersten klein sind, so ist sie leicht aufzulösen, mit einem größern oder geringern Grade der Genauigkeit.

* * *

Zu den Abhandlungen algebraischen Inhalts von Euler sind hier noch einige aus den **Novis Actis Acad. Petrop.** beyzufügen.

In dem IV. Bande sind zwey Abhandlungen, welche beide die Darstellung der Wurzeln einer Gleichung oder irgend welcher Potenzen derselben durch Reihen betreffen. In der ersten wird aus der

Gleichung $Z^n = Z^{n-\alpha} + CZ^{n-\beta}$ eine Reihe für Z hergeleitet, deren Glieder Functionen des Exponenten n sind, woraus ferner Reihen für die Potenzen der Wurzeln von Gleichungen mit mehr Gliedern hergeleitet werden. Die Reihen sind sehr zusammengesetzt, daher Euler sie auch in der Aufschrift der Abhandlung maxime abstrusas nennt. Mit derselben ist eine frühere Abhandlung in den Actis Petrop. T. III a. a. 1779. zu verbinden, worin Betrachtungen über eine von Lambert entwickelte Reihe zur Auflösung einer trinomischen Gleichung angestellt sind.

In der zweyten Abhandlung wird die Methode zur Entwickelung der Wurzeln und ihrer Potenzen durch Reihen, welche der Verfasser schon in dem XV. Bande der neuen Commentarien (1771) gelehrt hatte, besser begründet.

In dem VI. Bande sind zwey Abhandlungen, von welchen die erstere zeigt, wie die Werthe der Wurzeln durch Annäherung gefunden werden, wenn sie schon einigermaßen bekannt sind. Es ist die von dem Verfasser schon vor langer Zeit angegebene, und in dem letzten Abschnitte dieses Artikels erklärte Methode, mit Erweiterung auf Potenzen der Wurzeln.

In der zweyten Abhandlung des VI. Bandes wird gezeigt, wie unzählige Formen von Gleichungen angegeben werden können, die alle auflösbar sind.

In dem XII. Bande wird die Entwickelung der Wurzeln und ihrer Potenzen noch einmahl vorgenommen, nach der Methode, die in den Comm. novis, T. XV. gezeigt war, aber mit Erweiterung und Verbesserungen.

Eulers Algebra ist von Bernoulli ins Französische übersetzt, und von la Grange mit Anmerkungen bereichert. Diese gehen die unbestimmte Analytik an. Eine neue vermehrte Ausgabe dieser Übersetzung ist zu Lyon 1795. in zwey Octavbänden erschienen. Die Zusätze von la Grange hat Kaußler besonders übersetzt geliefert, Frankfurt am Mayn, 1796.

Unter den ältern Lehrbüchern zeichnet sich die Algebra von dem tiefsinnigen Maclaurin durch Deutlichkeit wie durch Gründlichkeit aus. Treatise of Algebra, the second edition, London 1756. 8.

Wer viele Beyspiele und Erläuterungen verlangt, findet sie in Saundersons Elements of Algebra, Cambridge, 1740. 2 vol. in 4. Übersetzt ins Französische von Joncourt. Amsterdam, 1756.

Clairauts Algebra, die zuerst 1746 herauskam, ist mehrmahls aufgelegt. Neuerlich ist sie von Lacroix neu herausgegeben, und mit Anmerkungen von la Grange und la Place ausgestattet, 2 vol. in 8. Eine deutsche Übersetzung ist von Mylius 1752 gemacht, von welcher Tempelhof 1778 eine zweyte Auflage mit Zusätzen besorgt hat.

Die deutschen Lehrbücher von Segner, Kästner, Tempelhof, Pasquich, werden den Liebhabern der Mathematik bekannt genug seyn. Anfängern ist zu empfehlen Busse erster Unterricht in der algebraischen Auflösung arithmetischer und geometrischer Aufgaben. Dessau 1782. 2 Bde in 8.

Glied (terminus) ist ein einzelnes Stück einer Gleichung, Reihe oder Function. Das lateinische Wort, membrum, bedeutet alle Glieder einer Gleichung, die auf derselben Seite des Gleichheitszeichens stehen. Weil das Wort terminus im deutschen sich nicht gut gebrauchen läßt, so muß man es durch Glied geben, und membrum durch Theil.

Gnomon in der Geometrie ist eine Figur, die in einem Parallelogramm übrig bleibt, wenn ein kleineres Parallelogramm, dessen Diagonale in der Diagonale jenes liegt, weggenommen wird. In Fig. 26. Tab. X. worin B H und E D jede einer Seite des Parallelogramms parallel ist, ist Gnomon die Figur, welche aus den beiden Complementen A C, A K zu den Parallelogrammen A F, A G längs der Diagonale F G, und einem dieser Parallelogram-

me selbst besteht, nämlich ABCGKEA, oder ADCFKHA. Euklides gebraucht das Wort in seinen Anfangsgründen, 2. Buch. Es bedeutet auch ein Winkelmaaß, daher die Anwendung auf die geometrische Figur.

Gnomon ist an einer Sonnenuhr der Zeiger, der durch seinen Schatten die Stunden zeigt. Hier ergiebt sich die Herleitung von dem griechischen Stammworte, erkennen, noch deutlicher.

Gnomon in der Astronomie ist eine besondere Vorrichtung, Höhen der Sonnen zu beobachten.

Goniometrie ist der Inbegriff der Sätze und Aufgaben, welche die Vergleichung der Winkel mittelst der von den Winkeln abhängigen Linien, und die Relationen dieser Linien selbst betreffen. Das Wort Goniometrie ist in dieser weiten Bedeutung sonst nicht gewöhnlich, sondern man versteht darunter nur die Methoden Winkel zu messen. In diesem Verstande gebraucht de Lagny den Ausdruck in einigen Abhandlungen der Pariser Akademie von den J. 1724, 1725, 1729. Von seinem Verfahren, Winkel ohne Transporteur oder Maaßstab zu messen, wird in dem Artikel, Winkelmessung, Anzeige geschehen. Das Wort Goniometrie ist im Griechischen dasselbe was Winkelmessung im deutschen. So wie aber Geometrie eine Wissenschaft ist, welche alle Arten von Vergleichungen ausgedehnter Größen begreift, ohngeachtet das Wort nur Landmessung andeutet, so mag auch Goniometrie die Benennung für ein System seyn, das viel mehreres in sich schließt, als das Wörtliche zu erkennen giebt. In einer kleinen Schrift, betitelt Anfangsgründe der Goniometrie von Dazel, München 1800, bedeutet das Wort Trigonometrie und Polygonometrie zusammen.

2. Die Goniometrie pflegt als ein Theil der Trigonometrie angesehen zu werden. Ihre Grundlehren werden auch in dieser Wissenschaft gebraucht, um die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreyecke, und der

daraus zusammengesetzten Figuren herzuleiten. Die Trigonometrie bekommt durch sie einen weitern Umfang als die Wortbedeutung angiebt. Vieles in der Goniometrie betrifft bloß Vergleichungen der Winkel, ohne Rücksicht auf Dreyecke oder Figuren; anderes bezieht sich auf die Kreismessung; selbst in der Analysis, wo auch keine geometrische Größen betrachtet werden, kommen oft Functionen von Winkeln vor. In einer vollständigen Abhandlung von der Trigonometrie darf zwar die Goniometrie nicht fehlen; allein in diesem Wörterbuche würde jene durch diese einen zu weitläuftigen Artikel ausmachen. Um aber auch nicht die Materie von der Vergleichung der Winkel zu zerstückeln, werden alle dahin gehörigen Formeln hier in einem Artikel, unter dem Titel, Goniometrie, vorgetragen.

3. Die analytische Geometrie, so fern sie die Winkel entweder unabhängig von der Verbindung mit den Linien einer Figur vergleicht, oder sowohl die Linien und ihre Winkel in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit betrachtet, begreift drey Hauptstücke, die Goniometrie, Cyklometrie (Bogenmessung) und Trigonometrie mit der Polygonometrie. Das erste ist gleich Anfangs erklärt; die Cyklometrie, welche die Winkel durch zugehörige Kreisbogen darstellt, enthält die Formeln zur Vergleichung der Bogen und der zu ihnen gehörigen Linien (Sinus, Tangenten u. s. w.); die Trigonometrie entwickelt die Formeln zur Berechnung der Seiten und Winkel ebener und sphärischer Dreyecke aus gegebenen Bestimmungsstücken; die Polygonometrie sucht dasselbe für mehrseitige Figuren zu leisten. Beyde gründen sich, so wie die Cyklometrie, auf die Lehren der Goniometrie.

4. Ein Winkel wird, wie jede Größe überhaupt durch eine gleichartige gemessen wird, unmittelbar nur durch einen andern Winkel gemessen. So giebt man z. B. die Größe eines Winkels in Graden an, da ein Grad der 90ste Theil eines rechten Winkels ist, und hat dadurch das Verhältniß des Winkels zu einem Rechten.

In der praktischen Geometrie hat man allerhand Werkzeuge zur Messung der sinnlich gegebenen Winkel. In der theoretischen Geometrie sind nur wenig Fälle, wo ein Winkel unmittelbar mit einem andern Winkel verglichen werden kann. Die Elementar-Geometrie kann nur Winkel vergleichen, deren einer doppelt so groß ist als der andere. Allein es giebt auch eine andere Art Winkel mit einander zu vergleichen, als durch ein gemeinschaftliches Maaß, und das geschieht durch Linien, die von den Winkeln auf gewisse Art abhangen, so wie die Winkel von ihnen. Die Relationen dieser Linien geben gewisse Relationen der zugehörigen Winkel zu erkennen. Diese Linien heißen daher auch Functionen der Winkel, und umgekehrt sind die Winkel Functionen jener Linien, indem Function einer Größe irgend eine Zusammensetzung aus dieser und gegebenen anzeigt.

I. Goniometrische (triganometrische) Functionen der Winkel.

5. Es ist ADBE (Tab. XII. Fig. 56.) ein Kreis aus dem Mittelpunkte C über dem Durchmesser AB beschrieben, in welchem der Durchmesser DE senkrecht auf AB steht. Irgend ein Durchmesser Ff schneide AB unter dem Winkel ACF. Von dem Puncte F des Kreises werde FG senkrecht auf AB gezogen. Nun ist in dem gegebenen Kreise FG durch den Winkel, und der Winkel durch FG bestimmt. Die Linie FG heißt der Sinus des Winkels ACF.

Der Sinus ist Null, wenn der Winkel Null ist. Er ist dem Radius des Kreises gleich, wenn der Winkel ein Rechter ist, und heißt alsdann der Sinus totus.

Der Winkel der beiden Linien AB und Ff ist nicht allein der spitze ACF, sondern auch der stumpfe BCF. Es gehört also derselbe Sinus FG zu zwey Winkeln, die zusammen aber zwey Rechte ausmachen.

Man ziehe den Durchmesser H C h unter dem Winkel B C H = A C F, und fälle die senkrechte H g auf A B, so ist H g = F G, und H g ist der Sinus des Winkels A C H, so wie es F G von B C F ist. Die Folge der Sinus bricht mit dem Sinus totus für den rechten Winkel nicht ab, sondern wird für die stumpfen fortgesetzt, indem nun die Sinus auf dieselbe Art, bey wachsenden Winkeln, abnehmen, als sie für Winkel unter einem Rechten zunehmen.

Für zwey Rechte ist der Sinus = o. Allein auch hier bricht die Folge der Sinus nicht ab, sondern geht fort, nur werden die Sinus negativ.

Nämlich zwey gleiche Winkel, wie A C F, A C h, oder A C H, A C f, können entgegengesetzte Lage haben, indem der Schenkel, durch dessen Bewegung von dem fixen Schenkel an der Winkel beschrieben wird, nach einer Gegend sich bewegt, die der für den andern Winkel entgegen gesetzt ist. Es seyn h G, f g senkrecht auf A B, so sind diese die Sinus von A C h, A C f, aber den Sinus von A C F, A C H eben so entgegengesetzt, wie die zugehörigen Winkel. Wenn man C f in C B fallen läßt, so schließen die negativen Sinus sich an die positiven. Die Winkel nach der Gegend von A nach F sehe man als positiv an, und also auch ihre Sinus. Das Complement des negativen Winkels A C f zu vier Rechten, oder A C B C f ist positiv, weil es nach der Richtung der positiven Winkel genommen wird, aber der Sinus desselben, f g, ist negativ. Eben so ist das Complement von A C h, oder A C B C h positiv, und der Sinus h G negativ.

6. Das Segment des Halbmessers, C G, welches der Sinus abschneidet, von dem Mittelpuncte an genommen, heißt der Cosinus. Für einen stumpfen Winkel A C H liegt der Cosinus C g nach einer entgegengesetzten Seite in Beziehung auf die Cosinus der spitzen Winkel, und sind daher negativ, wenn diese positiv genommen werden. Es ist cos A C F = sin (R — A C F), also auch cos A C H = sin (R — A C H) = — sin (A C H — R).

Der Cosinus ist dem Halbmesser gleich, wenn der Winkel Null ist; er ist Null, wenn der Winkel ein Rechter ist.

Für einen negativen spitzen Winkel ACh ist der Cosinus CG positiv, und so groß als für denselben Winkel positiv genommen. Für einen negativen stumpfen ACf ist der Cosinus Cg negativ. Daher ist für positive Winkel zwischen zwey und drey Rechten der Cosinus negativ, zwischen drey und vier Rechten positiv.

7. Das Stück des Durchmessers AG oder Ag von dem Endpuncte A bis an den Punct, wo der Sinus ihn trifft, heißt der Quersinus oder sinus versus. Es ist der Unterschied zwischen dem Halbmesser und dem Cosinus, daher die arithmetische Summe, wenn der Cosinus negativ ist.

8. Man ziehe auf AC durch A die senkrechte TAt oder die berührende in A, welche von dem Schenkel CF des Winkels ACF in T geschnitten werde. Es heißt AT die Tangente des W. ACT. Sie ist die vierte Proportionallinie zu dem Cosinus, Sinus und Halbmesser.

Die Tangente ist Null, wenn der Winkel Null ist. Sie ist dem Halbmesser gleich, wenn der Winkel ein halber Rechter ist. Sie ist unendlich groß, wenn der Winkel ein Rechter ist. Der unendlich große Werth einer Tangente macht den Übergang zu den Werthen der Tangenten stumpfer Winkel. Ohne diesen Werth einzuführen, bliebe immer eine Lücke, die man nie ausfüllen würde.

Bey einem stumpfen Winkel ACH schneidet der Schenkel CH entgegengesetzt verlängert die Tangente an der in Beziehung auf AT entgegengesetzten Gegend in t. Die Tangente At ist daher negativ. Die vorher angeführte Proportion erfordert dieses auch. Einige angesehene Mathematiker (de la Caille, Segner) haben die Tangente eines stumpfen Winkels als positiv angesehen, weil sie den Schenkel CH bis an eine Tangente in B verlängerten, welche freylich eine Lage wie AT hat. Die

Versetzung der berührenden Linie geschieht ohne Grund dazu zu haben.

Die Tangente At eines negativen spitzen Winkels ACh ist negativ. Die Tangente eines negativen stumpfen ist das Entgegengesetzte einer negativen. Der Schenkel Cf des Winkels ACf schneidet entgegengesetzt verlängert die Tangente in T, nach der Gegend, in welcher die Tangenten positiv sind.

Die Tangenten der positiven Winkel zwischen zwey und drey Rechten sind positiv; zwischen drey und vier Rechten negativ.

9. Durch den Endpunct D des Halbmessers CD, der auf AC senkrecht ist, ziehe man eine senkrechte oder berührende, welche von dem Schenkel CF des Winkels ACF in K geschnitten werde. Es heißt DK die Cotangente des Winkels ACF, und es ist cot. ACF = tang (R — ACF). Die Cotangente ist die dritte Proportionallinie zu der Tangente und dem Halbmesser, da AT : AC = CD : DK ist.

Ist der Winkel stumpf, wie ACH, so schneidet der Schenkel CH die berührende in k, und es ist die Cotangente Dk negativ in Beziehung auf die positive DK. Wird CH nach t auf der berührenden in A verlängert, so ist At : AC = CD : Dk. Wenn eine von beiden, Tangente und Cotangente, negativ ist, so ist es die andere auch.

Die Cotangente eines negativen spitzen Winkels ACh ist Dk, negativ; die Cotangente eines negativen stumpfen Winkels ist DK, positiv.

10. Die Hypotenuse CT in dem rechtwinklichten Dreyeck CAT, dessen Katheten der Halbmesser und die Tangente des Winkels ACT sind, heißt die Secante dieses Winkels. Sie ist die dritte Proportionallinie zu dem Cosinus und Halbmesser.

Wenn der Winkel Null ist, so ist die Secante dem Halbmesser gleich. Ist der Winkel ein Rechter, so ist die Secante unendlich groß. Für einen stumpfen Winkel

ACH ist die Secante die Linie Ct, welche negativ ist, weil sie der Richtung des Schenkels CH entgegengesetzt ist, auch zufolge der angeführten Proportion.

Für einen negativen spitzen Winkel ACh ist die Secante Ct positiv, weil sie in die Richtung des Schenkels Ch fällt. Für einen stumpfen negativen Winkel ACf ist die Secante CT negativ. Oder, für positive Winkel zwischen zwey und drey Rechten ist die Secante negativ; zwischen drey und vier Rechten ist sie positiv; alles der Proportion cos: rad = rad: sec. gemäß.

11. Die Hypotenuse CK an dem rechtwinklichten Dreyeck CDK ist die Cosecante des Winkels ACF. Sie ist die dritte Proportionallinie zu dem Sinus und dem Halbmesser. Für einen stumpfen Winkel ACH ist die Cosecante die Hypotenuse Ck, positiv, weil sie in die Richtung des Schenkels, wie bey spitzen Winkeln fällt. Die Beziehung auf den Sinus desselben Winkels erfordert dies auch.

Für einen negativen spitzen Winkel ACh (oder positiven über drey Rechte) ist die Cosecante die Linie Ck, und als negativ zu betrachten. Für einen negativen stumpfen Winkel ACf (positiven zwischen zwey und drey Rechten) ist die Cosecante die Linie CK, und als negativ zu nehmen.

12. Die Größe der goniometrischen Linien hängt, bey demselben Winkel, von der Größe des Halbmessers ab. Allein das Verhältniß dieser Linien zu dem Halbmesser ist bey demselben Winkel dasselbe, wie groß oder klein auch der Halbmesser seyn mag, und so auch der Quotient, den die Division dieser Linien durch den Halbmesser giebt. Zu analytisch-geometrischen Rechnungen wird dieser Quotient wegen seiner Bestimmtheit gebraucht, und bekommt denselben Namen, wie die geometrische Linie, woraus er entsteht. In ältern Schriften, selbst in den meisten aus der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, werden die Sinus, Tangenten u. s. w. als Linien betrachtet.

13. Dem neuern Gebrauche zufolge ist in einem rechtwinklichten Dreyeck A B C, (Fig. 57.), worin B der rechte Winkel ist,

$$\frac{BC}{AC} = \text{sin } A; \qquad \frac{AB}{AC} = \text{cos } A;$$

$$\frac{BC}{AB} = \text{tang } A; \qquad \frac{AB}{BC} = \text{cot } A;$$

$$\frac{AC}{AB} = \text{sec } A; \qquad \frac{AC}{BC} = \text{cosec } A.$$

14. Hieraus ergiebt sich

$$\text{sin } A^2 + \text{cos } A^2 = 1.$$

$$\text{tang } A \,.\, \text{cos } A = \text{sin } A.$$

$$\text{tang } A = \frac{\text{sin } A}{\sqrt{(1 - \text{sin } A^2)}}$$

$$\text{cot } A \,.\, \text{sin } A = \text{cos } A.$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{cos } A}{\sqrt{(1 - \text{cos } A^2)}}$$

$$\frac{\text{tang } A}{\sqrt{(1 + \text{tang } A^2)}} = \text{sin } A.$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang } A^2)}} = \text{cos } A.$$

$$\text{tang } A \,.\, \text{cot } A = 1;$$

$$\text{sec } A = \frac{1}{\text{cos } A} = \sqrt{(1 + \text{tang } A^2)}.$$

$$\text{cosec } A = \frac{1}{\text{sin } A} = \sqrt{(1 + \text{cot } A^2)}$$

$$\text{sin. vers. } A = 1 - \text{cos } A.$$

Die irrationalen Ausdrücke lassen sich in Reihen auflösen, so daß eine goniometrische Function aus Potenzen einer andern zusammengesetzt wird.

14*. Die Potenz einer goniometrischen Function mag man durch den Exponenten oben an dem Symbol des Winkels bezeichnen, wenn man nur dieses nicht als eine Potenzirung des Winkels ansieht. Denn $\sin A$, $\cos A$, $\tang A$, etc. sind wie einfache Bezeichnungen anzusehen, so daß der Exponent nicht einen Theil derselben angeht. Manche schließen das Symbol der Function in Klammern ein, wie $(\sin A)^2$. Einige bezeichnen sie durch $\sin^2 A$; $\sin^3 A$, u. s. f.

15. Die goniometrischen Functionen als Quotienten genommen nenne man die numerischen Sinus, Tangenten u. s. f. im Gegensatze gegen die linearischen. Die letztern stellen die numerischen dar, wenn der Halbmesser zur Einheit genommen wird.

16. Wenn eine gerade Linie durch die Drehung um einen festen Punct einen Winkel von vier Rechten beschrieben hat, und in ihre erste Lage wieder gekommen ist, so beschreibt sie weiter hin dieselben Winkel, wie vorher, und dieses ohne Ende fort mit unendlich vielen Umläufen. In der Natur ist dieses der Fall bey den Umläufen der Planeten und ihrer Trabanten. Es bezeichne π die Summe zweyer Rechten, φ einen spitzen Winkel, so ist

$$\sin\varphi = \sin(2\pi+\varphi) = \sin(\pi-\varphi)$$
$$= \sin(4\pi+\varphi) = \sin(3\pi-\varphi)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$= \sin(2n\pi+\varphi) = \sin((2n+1)\pi-\varphi)$$

Da ferner $\sin\varphi = -\sin(\pi+\varphi)$ ist, so ist $\sin\varphi = -\sin((2n+1)\pi+\varphi)$. Da auch $\sin\varphi = -\sin(2\pi-\varphi)$ ist, so ist $\sin\varphi = -\sin(2n\pi-\varphi)$.

Die Sinus aller Winkel, deren Unterschied ein gerades Vielfaches von π, oder deren Summe ein ungerades Vielfaches von π ist, sind sich gleich und gleichnamig. In dem entgegengesetzten Falle sind sie gleich aber ungleichnamig.

17. Eben so ist $\cos\varphi = \cos(2\pi + \varphi) = \cos(4\pi + \varphi) \ldots\ldots = \cos(2n\pi + \varphi)$. Da auch $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$ ist, so ist $\cos\varphi = \cos(2n\pi - \varphi)$. Da ferner $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$ ist, so ist $\cos\varphi = -\cos((2n+1)\pi - \varphi)$, und weil $\cos\varphi = -\cos(\pi + \varphi)$ ist, so ist $\cos\varphi = -\cos((2n+1)\pi + \varphi)$.

Die Cosinus aller Winkel, deren Unterschied oder Summe ein gerades Vielfaches von π ist, sind gleich und gleichnamig. Ist der Unterschied ein ungerades Vielfaches von π, so sind die Cosinus gleich aber ungleichnamig.

18. Auf ähnliche Art ist $\tang\varphi = \tang(2n\pi + \varphi)$, und $\tang\varphi = \tang((2n+1)\pi + \varphi)$, aber $\tang\varphi = -\tang((2n+1)\pi - \varphi)$, und $\tang\varphi = -\tang(2n\pi - \varphi)$.

19. Wenn also ein Winkel durch eine goniometrische Function gegeben wird, so gehören dazu unendlich viele Bogen. Ist ein Winkel oder Bogen, der durch eine solche Function gegeben wird, in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, so müssen alle Winkel, die zu der Function gehören, in so viele Theile getheilt werden. Davon unten.

20. Bey der Anwendung auf eine geometrische Rechnung werden für einen bestimmten Fall der Verbindung der Größen alle Winkel spitz und positiv genommen, ohne Rücksicht auf ihre gegenseitige Beziehung, so wie auch alle Linien, nach welcher Gegend sie auch genommen werden, positiv zu setzen sind. Aus der Rechnung für diesen Normalfall werden nachher alle andern Fälle der Verbindung der Größen durch gehörige Veränderung der Vorzeichen hergeleitet. Wird ein Winkel negativ, so wird dessen Sinus negativ, und alle davon abhangende Linien werden daher negativ, so wie umgekehrt eine negative Linie den damit verbundenen Sinus eines Winkels und den Winkel zu demselben negativ macht. Ein nega-

tiger spitzer Winkel verändert die Beschaffenheit seines Cosinus, und der davon abhangenden Linien, nicht; aber ein stumpfer Winkel, er sey positiv oder negativ, verursacht, daß der Cosinus und die dadurch zu bestimmenden Linien negativ werden. Bey einem positiven stumpfen, und negativen spitzen Winkel ändert die Tangente ihr Vorzeichen, und macht die dazu gehörigen Linien negativ, dagegen für einen negativen stumpfen Winkel die Tangente und das dazu gehörige positiv bleibt.

21. Solchergestalt kann die Rechnung alle verschiedene Fälle, welche die Geometrie unterscheidet, und besonders betrachten muß, in eine einzige Formel fassen, die aus der Betrachtung eines einzelnen Falles hergeleitet wird. In der sphärischen Trigonometrie ist dieses ein wichtiges Mittel, um sehr viele Fälle in wenigen Formeln zu begreifen. Ihre Formeln enthalten nichts als Functionen von mehrern Winkeln, deren Abänderungen in Rücksicht auf die positive und negative Lage, und die Beschaffenheit, ob sie spitz oder stumpf sind, eine große Mannichfaltigkeit der Fälle geben. Hier kommen häufig überstumpfe Winkel (größer als zwey Rechte) vor, für welche ihre Complemente zu vier Rechten als negative Winkel gesetzt werden können. In der Geometrie der krummen Linien, wo gewisse gerade Linien mit Winkeln verbunden werden, stellt ein einziger Normalfall alle abgeänderte Fälle dar, wenn man die goniometrischen Functionen auf jede mögliche Art ihre Vorzeichen ändern läßt.

22. Wenn in einer Formel statt der numerischen Functionen der Winkel die linearischen eingeführt werden sollen, so hat man für jene die Quotienten der linearischen dividirt durch ihren Halbmesser zu setzen. Der Halbmesser sey $= r$, der Winkel $= \varphi$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$; $\cos \varphi = \frac{x}{r}$; $\tang \varphi = \frac{t}{r}$; $\sec \varphi = \frac{s}{r}$, so setzt man diese Ausdrücke der Functionen in die Gleichung,

deren Form man ändern will, und multiplicirt sie mit einer solchen Potenz von r, daß die Nenner in den Gliedern der Gleichung wegfallen. Oder man schreibt r sin φ für sin φ; r cos φ für cos φ, u. s. f. so daß nun sin φ, etc. die linearischen Functionen bedeuten, wobey man aber in jedem Gliede die fehlenden Dimensionen durch eine Potenz von r ergänzen muß, damit alle Glieder gleich hohe Dimensionen erhalten, wenn sonst keine linearische Größe zur Einheit gemacht ist.

23. In den gewöhnlichen Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten ist der Halbmesser = 10000000 gesetzt. Die zu jedem Winkel als Sinus, Tangente und Secante geordneten Zahlen sind durch diesen Werth des Halbmessers zu dividiren, wenn sie in der Bedeutung, die ihnen in (13.) gegeben ist, zum analytischen Gebrauch angewandt werden sollen. Das giebt den Sinus totus = 1. Dann sind die Logarithmen aller Sinus, und der Tangenten von Winkeln unter 45° negativ; es sind ihnen aber allen in der Kennziffer 10 geliehen, um bey den Rechnungen nicht genöthigt zu seyn, die Addition der Logarithmen in eine Subtraction, oder diese in jene zu verwandeln. Die Logarithmen der Tangenten von Winkeln über 45°, und der Secanten sind zwar positiv, allein der Gleichförmigkeit wegen hat man ihnen auch 10 geliehen. Man hat also die Logarithmen aller dieser Zahlen vollständig so zu schreiben, wie in folgenden Beyspielen:

log sin 36° = 9,7692187 — 10
log tang 40° = 9,9238135 — 10
log tang 50° = 10,0761865 — 10
log sec 54° = 10,2307813 — 10.

Werden solche Logarithmen zu einander, oder zu den Logarithmen von irgend welchen Zahlen, addirt, so werden die subtractiven 10 auch zu einander addirt, worauf man aber von denselben gegen die Kennziffer in der Summe der Logarithmen so viel hebt, als möglich ist, damit entweder nicht mehr als 10 zu subtrahiren bleiben,

oder dieſelbe ganz wegfalle, wenn nämlich der Logarithme zu einer Zahl über die Einheit gehört. Z. B. log tang 40° + log tang 50° = 0, und log ſin 36° + log ſec 54° oder log coſ 54° + log ſec 54° = 0, den Formeln in (14.) gemäß.

Da nach (35.) iſt ſin 2 A = 2 ſin A . coſ A, ſo iſt, wenn A = 36° genommen wird,

log ſin 36° = 9,7692187 — 10
log coſ 36° = 9,9079576 — 10
log 2 = 0,3010300

log ſin 72° = 9,9782063 — 10.

Nach (36.) iſt 2 coſ A² = 1 + coſ 2 A. Alſo

log coſ 36° = 9,9079576 — 10
9,9079576 — 10
log 2 = 0,3010300

log 1,309017 = 0,1169452

Es iſt 0,309017 = coſ 72°.

Sucht man zu einem numeriſchen Sinus oder einer ſolchen Tangente den Winkel, ſo nehme man dieſelbe bis zu der ſiebenten Decimalſtelle für eine ganze Zahl, und ſuche ſie in den gewöhnlichen Tafeln unter ihrer Rubrik auf; man erhält daneben den geſuchten Winkel. Z. B. iſt 0,309017 ein Coſinus, ſo ſuche man die Zahl 3090170 in den Tafeln unter der Rubrik Coſinus auf, und man findet den Winkel 72°. Oder: es ſey 0,00436 ein Sinus. Man ſuche die Zahl 43600 unter den Sinus auf, ſo findet man nahe 15′. Es ſey 15,0557 eine Tangente, man ſuche auf die Zahl 15 0557000, ſo findet ſich der Winkel etwas kleiner als 86° 12′.

II. Zusammensetzung der Winkel vermittelst ihrer Functionen.

24. Es ist

$$\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

von welchen Formeln die zweyte aus der ersten, und die vierte aus der dritten durch die Negation von B entsteht.

25. Man hat verschiedene Beweise dieser Formeln. Die leichteste Beweisart ist folgende. In einem Kreise (Fig. 58.) sey ein Viereck ABCD beschrieben, dessen eine Diagonale der Durchmesser AC ist, wodurch es in zwey rechtwinklichte Dreyecke zerfällt. Man ziehe noch den Durchmesser DE durch den Punct D, und die Chorde BE, so ist die Diagonale BD der Sinus des Winkels BED, wenn DE der Sinus totus ist, und der Winkel BED ist = BCD, der auf demselben Bogen steht, das ist, BED = BCA + DCA. Nun ist nach einer Eigenschaft des Kreises (s. Kreis)

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Dividirt man mit AC × AC oder AC × DE, so ist

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{AC} + \frac{BC}{AC} \times \frac{AD}{AC},$$

das ist

$$\sin BED = \sin ACB \times \cos ACD + \cos ACB \times \sin ACD,$$

und daher

$$\sin(ACB + ACD) = \sin ACB \times \cos ACD + \cos ACB \times \sin ACD.$$

Dies ist die erste der Formeln in 24.

Zweytens ist BD auch der Cosinus von BDE, das ist von ADE — ADB = CAD — ACB (weil die beiden Durchmesser sich im Mittelpuncte schneiden, und weil ADB, ACB auf demselben Bogen AB stehen). Demnach ist

$$\cos(CAD - ACB) = \sin ACB \times \sin CAD + \cos ACB \times \cos CAD.$$

Dieses ist die vierte der Formeln in (24.)

26. In einem Kreise (Fig. 59.) sey ein Viereck ABCD eingeschrieben, dessen Seite AD der Durchmesser ist. In demselben ziehe man die Diagonalen AC, DB, und durch C den Durchmesser CE, nebst der Chorde BE. Nun ist in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke CBE die Kathete BC der Sinus von BEC für CE als Sinus totus. Es ist BEC = BDC = ADC − ADB. Zufolge der in (25.) angeführten Eigenschaft des Kreises ist

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$$

oder

$$AD \times BC = AC \times BD - AB \times CD.$$

Dividirt man mit AD × AD oder AD × CE, so ist

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{AD} \times \frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD} \times \frac{CD}{AD};$$

Folglich ist

$$\sin(ADC - ADB) = \sin ADC \cdot \cos ADB - \sin ADB \cdot \cos ADC.$$

Dieses ist die zweyte Formel in (24.)

Zweytens, es ist BC auch der Cosinus von BCE für den Sinus totus CE, und BCE = BCA + ACE = ADB + CAD. Daher ist

$$\cos(ADB + CAD) = \cos CAD \cdot \cos ADB - \sin ADB \cdot \sin CAD$$

die dritte Formel in (24.). Diese und die zweyte folgen zwar aus den beiden andern durch den Gebrauch des Entgegengesetzten. Zur deutlichern Einsicht ihrer Entstehung ist es nützlich, sie unabhängig von jenen zu erweisen.

Die vier Formeln in (24.) sind eine reiche Quelle vieler andern.

27. Erstlich fließen daraus folgende sehr leicht

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\,.\,\cos B$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\,.\,\sin B$$
$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\,.\,\cos B$$
$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\,.\,\sin B.$$

28. Man setze in diesen Formeln A statt $A+B$, und B statt $A-B$ so verwandeln sie sich in folgende:

$$\sin A+\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos B-\cos A=2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

29. Aus diesen Formeln werden durch die Division folgende hergeleitet:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\frac{\cos B-\cos A}{\cos A+\cos B}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Auf die erste dieser Formeln gründet sich eine Regel, welche gewöhnlich zur Berechnung zweyer unbekannten Winkel in einem Dreyecke aus einem Winkel nebst den beiden einschließenden Seiten gegeben wird. Ist nämlich das Verhältniß $\sin A:\sin B$ gegeben, welches $m:n$ sey, so ist $m+n:m-n=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B):\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)$.

30. Aus denſelben Formeln fließen noch folgende:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \tfrac{1}{2}(A + B),$$

worin $\sin B$ und B auch negativ genommen werden können.

31. Aus den beiden erſten Formeln in (24.) verbunden mit (14.) folgen

$$\frac{\sin (A + B)}{\cos A \cdot \cos B} = \operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B$$

$$\frac{\sin (A + B)}{\sin A \cdot \sin B} = \cot A + \cot B$$

$$\frac{\sin (A - B)}{\cos A \cdot \cos B} = \operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B$$

$$\frac{\sin (A - B)}{\sin A \cdot \sin B} = \cot B - \cot A.$$

32. Aus den beiden andern Formeln daſelbſt wird erhalten

$$\frac{\cos (A + B)}{\cos A \cdot \cos B} = 1 - \operatorname{tang} A \cdot \operatorname{tang} B$$

$$\frac{\cos (A + B)}{\sin A \cdot \sin B} = \cot A \cdot \cot B - 1$$

$$\frac{\cos (A - B)}{\cos A \cdot \cos B} = 1 + \operatorname{tang} A \cdot \operatorname{tang} B$$

$$\frac{\cos (A - B)}{\sin A \cdot \sin B} = \cot A \cdot \cot B + 1.$$

33. Aus den Formeln in (24.) oder in (31. 32.) werden mittelſt einiger Diviſionen hergeleitet:

$$\text{tang}(A \pm B) = \frac{\text{tang } A \pm \text{tang } B}{1 \mp \text{tang } A \cdot \text{tang } B}$$

$$\text{cot}(A \pm B) = \frac{\text{cot } A \mp \text{tang } B}{1 \pm \text{cot } A \cdot \text{tang } B}.$$

34. Aus den Formeln in (31. 32.) folgt noch

$$\frac{\text{sin}(A + B)}{\text{sin}(A - B)} = \frac{\text{tang } A + \text{tang } B}{\text{tang } A - \text{tang } B}$$

$$\frac{\text{cos}(A + B)}{\text{cos}(A - B)} = \frac{\text{cot } A - \text{tang } B}{\text{cot } A + \text{tang } B}.$$

Bey den zu diesen und den vorhergehenden Formeln nöthigen Verwandlungen hat man nur sich zu erinnern, daß der Sinus eines Winkels durch den Cosinus desselben dividirt die Tangente, dieser durch jenen dividirt, die Cotangente, und daß Tangente mit Cotangente multiplicirt, die Einheit giebt.

35. Man setze $A = B$, so ist aus (24.)

$$\text{sin } 2A = 2 \text{ sin } A \cdot \text{cos } A$$
$$\text{cos } 2A = \text{cos } A^2 - \text{sin } A^2.$$

36. Mit diesen Formeln verbinde man die, $1 = \text{sin } A^2 + \text{cos } A^2$, so ist

$$1 + \text{sin } 2A = (\text{sin } A + \text{cos } A)^2$$
$$1 - \text{sin } 2A = (\text{sin } A - \text{cos } A)^2$$
$$1 + \text{cos } 2A = 2 \text{ cos } A^2$$
$$1 - \text{cos } 2A = 2 \text{ sin } A^2.$$

Die dritte und vierte Formel werden aus den beiden letztern in (28.) erhalten, wenn daselbst $B = 0$ gesetzt, und A mit $2A$ vertauscht wird.

37. Setzt man in den beiden erstern Formeln eben daselbst $A = 90°$, und $2A$ statt B, so ist

$$1 + \sin 2A = 2\sin(45° + A)^2$$
$$1 - \sin 2A = 2\sin(45° - A)^2.$$

Es ist nämlich $\cos(45° \mp A) = \sin(45 \pm A)$.

38. Aus (35 und 36.) ist

$$\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tang A$$
$$\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$$
$$\frac{\cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tfrac{1}{2}(1 - \tang A^2)$$
$$\frac{\cos 2A}{1 - \cos 2A} = \tfrac{1}{2}(\cot A^2 - 1).$$

39. In den ersten zwey Formeln vertausche man A mit $45° - A$, so ist

$$\frac{\cos 2A}{1 + \sin 2A} = \tang(45° - A) = \cot(45° + A)$$
$$\frac{\cos 2A}{1 - \sin 2A} = \cot(45° - A) = \tang(45° + A).$$

40. Aus diesen entsteht

$$\frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A} = \frac{\tang(45° + A)}{\tang(45° - A)}$$
$$= \tang(45° + A)^2,$$
oder $$\frac{1 - \sin 2A}{1 + \sin 2A} = \tang 45° - A)^2.$$

Diese Formel folgt auch aus (37.), weil $\cos(45 \mp A) = \sin(45 \pm A)$, und Sinus durch Cosinus dividirt die Tangente ist.

41. Aus den beiden letzten Formeln in (36.) ist

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tang A^2.$$

Vertauſcht man A mit $45° - A$, ſo wird die zweyte Formel in (40.) erhalten.

42. Aus der Formel in (41.) folgt

$$\text{cof } 2A = \frac{1 - \text{tang } A^2}{1 + \text{tang } A^2},$$

und aus dieſer

$$1 + \text{cof } 2A = \frac{2}{1 + \text{tang } A^2}$$

$$1 - \text{cof } 2A = \frac{2 \text{ tang } A^2}{1 + \text{tang } A^2}.$$

Hieraus mit Zuziehung (38.)

$$\text{ſin } 2A = \frac{2 \text{ tang } A}{1 + \text{tang } A^2}.$$

Oder auch aus den beiden Formeln unmittelbar durch Multiplication und Ausziehung der Quadratwurzel.

43. Aus (28 und 35.) wird erhalten

$\text{ſin } A^2 - \text{ſin } B^2 = \text{ſin } (A + B) . \text{ſin } (A - B)$

$\text{cof } B^2 - \text{cof } A^2 = \text{ſin } (A + B) . \text{ſin } (A - B).$

Setzt man hier $A + B$ ſtatt A, ſo iſt $\text{ſin } (A + B)^2 - \text{ſin } B^2 = \text{ſin } (A + 2B) . \text{ſin } A.$

44. In den Formeln (33.) ſetze man, das obere Vorzeichen genommen, $A = B$, ſo iſt

$$\text{tang } 2A = \frac{2 \text{ tang } A}{1 - \text{tang } A^2}$$

$$\text{cot } 2A = \tfrac{1}{2} (\text{cot } A - \text{tang } A).$$

45. In den beiden erſten daſelbſt ſetze man $B = 45°$, ſo iſt

$$\text{tang } (45° + A) = \frac{1 + \text{tang } A}{1 - \text{tang } A}$$

$$\text{tang } (45° - A) = \frac{1 - \text{tang } A}{1 + \text{tang } A},$$

und hieraus

$$\text{tang}(45° + A) - \text{tang}(45° - A) = 2\,\text{tang}\,2A.$$

Es ist nämlich der Unterschied $= \frac{4\,\text{tang}\,A}{1 - \text{tang}\,A^2}$ $= 2\,\text{tang}\,2A$. Die Formel folgt auch aus der zweyten in (44.).

46. Es sey $A + B = 90°$, so ist $\text{tang}\,A - \text{tang}\,B = 2\,\text{tang}(A - B)$.

Aus (33.), da $\text{tang}\,B = \frac{1}{\text{tang}\,A}$ ist.

47. Aus den Formeln (31.) wird durch Multiplication erhalten,

$$\text{tang}\,A^2 - \text{tang}\,B^2 = \frac{\text{sin}(A + B) \cdot \text{sin}(A - B)}{\text{cos}\,A^2 \cdot \text{cos}\,B^2}$$

$$\text{cot}\,B^2 - \text{cot}\,A^2 = \frac{\text{sin}(A + B) \cdot \text{sin}(A - B)}{\text{sin}\,A^2 \cdot \text{sin}\,B^2}$$

48. Aus den Formeln in (39.) folgt

$$\text{sec}\,2A + \text{tang}\,2A = \text{tang}(45° + A)$$
$$\text{sec}\,2A - \text{tang}\,2A = \text{tang}(45° - A)$$

oder

$$\text{sec}\,2A = \text{tang}(45° \pm A) \mp \text{tang}\,2A.$$

Daraus ist

$$2\,\text{sec}\,2A = \text{tang}(45° + A) + \text{tang}(45° - A).$$

Die beiden ersten Formeln werden durch Umkehrung der Brüche in (39.) erhalten. Die Cotangente ist auch ein Bruch, nämlich die Einheit dividirt durch die Tangente. Für $\frac{1}{\text{cos}\,2A}$ ist sec 2 A gesetzt.

Die Secanten werden aus Tangenten durch bloße Addition oder Subtraction gefunden.

49. Aus den Formeln (38.) folgt auf ähnliche Art

$$\operatorname{cosec} 2A + \cot 2A = \cot A$$
$$\operatorname{cosec} 2A - \cot 2A = \operatorname{tang} A,$$

oder

$$\operatorname{cosec} 2A = \cot A - \cot 2A$$
$$= \operatorname{tang} A + \cot 2A.$$

Daraus ist

$$2 \operatorname{cosec} 2A = \operatorname{tang} A + \cot A.$$

Für $\frac{1}{\sin 2A}$ ist $\operatorname{cosec} 2A$ gesetzt.

50. Da $\cos 2A = \frac{1}{\sec 2A}$ ist, so ist aus (42.)

$$\sec 2A = \frac{1 + \operatorname{tang} A^2}{1 - \operatorname{tang} A^2}$$

und daraus vermittelst (44.)

$$\sec 2A - 1 = \operatorname{tang} A \cdot \operatorname{tang} 2A.$$

51. Hieraus ist, wenn $2A$ mit $90° - 2A$ vertauscht wird,

$$\operatorname{cosec} 2A - 1 = \frac{\operatorname{tang}(45° - A)}{\operatorname{tang} 2A}$$

Die Formel kann auch für sich aus der für $\sin 2A$, das ist $\frac{1}{\operatorname{cosec} 2A}$, und der für $\operatorname{tang} 2A$ hergeleitet werden.

52. In den Formeln (28.) setze man $A = 30° + \alpha$; $B = 30° - \alpha$, und bemerke, daß $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, so wird erhalten:

I. $\sin(30° + \alpha) + \sin(30° - \alpha) = \cos\alpha$
II. $\sin(30° + \alpha) - \sin(30° - \alpha) = \sin\alpha \cdot \sqrt{3}$
III. $\cos(30° + \alpha) + \cos(30° - \alpha) = \cos\alpha \cdot \sqrt{3}$
IV. $\cos(30° - \alpha) - \cos(30° + \alpha) = \sin\alpha.$

Die Formeln I. IV. dienen, aus den Sinus der Winkel von 0° bis 30°, und derer von 30° bis 90°, daß

und hieraus

$$\text{tang}(45° + A) - \text{tang}(45° - A) = 2\,\text{tang}\,2A.$$

Es ist nämlich der Unterschied $= \frac{4\,\text{tang}\,A}{1 - \text{tang}\,A^2}$ $= 2\,\text{tang}\,2A$. Die Formel folgt auch aus der zweyten in (44.).

46. Es sey $A + B = 90°$, so ist $\text{tang}\,A = \text{tang}\,B = 2\,\text{tang}(A - B)$.

Aus (33.), da $\text{tang}\,B = \frac{1}{\text{tang}\,A}$ ist.

47. Aus den Formeln (31.) wird durch Multiplication erhalten,

$$\text{tang}\,A^2 - \text{tang}\,B^2 = \frac{\text{sin}(A + B) \cdot \text{sin}(A - B)}{\text{cos}\,A^2 \cdot \text{cos}\,B^2}$$

$$\text{cot}\,B^2 - \text{cot}\,A^2 = \frac{\text{sin}(A + B) \cdot \text{sin}(A - B)}{\text{sin}\,A^2 \cdot \text{sin}\,B^2}$$

48. Aus den Formeln in (39.) folgt

$$\text{sec}\,2A + \text{tang}\,2A = \text{tang}(45° + A)$$
$$\text{sec}\,2A - \text{tang}\,2A = \text{tang}(45° - A)$$

oder

$$\text{sec}\,2A = \text{tang}(45° \pm A) \mp \text{tang}\,2A.$$

Daraus ist

$$2\,\text{sec}\,2A = \text{tang}(45° + A) + \text{tang}(45° - A).$$

Die beiden ersten Formeln werden durch Umkehrung der Brüche in (39.) erhalten. Die Cotangente ist auch ein Bruch, nämlich die Einheit dividirt durch die Tangente. Für $\frac{1}{\text{cos}\,2A}$ ist $\text{sec}\,2A$ gesetzt.

Die Secanten werden aus Tangenten durch bloße Addition oder Subtraction gefunden.

49. Aus den Formeln (38.) folgt auf ähnliche Art

$$\operatorname{cosec} 2A + \cot 2A = \cot A$$
$$\operatorname{cosec} 2A - \cot 2A = \operatorname{tang} A,$$

aber

$$\operatorname{cosec} 2A = \cot A - \cot 2A$$
$$= \operatorname{tang} A + \cot 2A.$$

Daraus ist

$$2 \operatorname{cosec} 2A = \operatorname{tang} A + \cot A.$$

Für $\frac{1}{\sin 2A}$ ist $\operatorname{cosec} 2A$ gesetzt.

50. Da $\cos 2A = \frac{1}{\sec 2A}$ ist, so ist aus (42.)

$$\sec 2A = \frac{1 + \operatorname{tang} A^2}{1 - \operatorname{tang} A^2}$$

und daraus vermittelst (44.)

$$\sec 2A - 1 = \operatorname{tang} A \cdot \operatorname{tang} 2A.$$

51. Hieraus ist, wenn $2A$ mit $90^\circ - 2A$ vertauscht wird,

$$\operatorname{cosec} 2A - 1 = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ - A)}{\operatorname{tang} 2A}.$$

Die Formel kann auch für sich aus der für $\sin 2A$, das ist $\frac{1}{\operatorname{cosec} 2A}$, und der für $\operatorname{tang} 2A$ hergeleitet werden.

52. In den Formeln (28.) setze man $A = 30^\circ + \alpha$; $B = 30^\circ - \alpha$, und bemerke, daß $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, so wird erhalten:

I. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
II. $\sin(30^\circ + \alpha) - \sin(30^\circ - \alpha) = \sin\alpha \cdot \sqrt{3}$
III. $\cos(30^\circ + \alpha) + \cos(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha \cdot \sqrt{3}$
IV. $\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \sin\alpha.$

Die Formeln I. IV. dienen, aus den Sinus der Winkel von 0° bis 30°, und derer von 30° bis 90°, daß

iſt der Coſinus der Winkel von 0° bis 30°, die Sinus und Coſinus der Winkel von 30° bis 60° durch bloße Subtraction zu finden. Es iſt nämlich

$$\sin(30° + \alpha) = \cos\alpha - \sin(30° - \alpha),$$
$$\cos(30° + \alpha) = \cos(30° - \alpha) - \sin\alpha.$$

oder

$$\cos(60° - \alpha) = \cos\alpha - \cos(60° + \alpha)$$
$$\sin(60° - \alpha) = \sin(60° + \alpha) - \sin\alpha.$$

53. In den beiden erſten Formeln (28.) ſetze man $B = 90° - A$, ſo iſt

$$\sin A + \cos A = \cos(45° - A).\sqrt{2}$$
$$\cos A - \sin A = \sin(45° - A).\sqrt{2}.$$

Dieſe Formeln dienen aus den Sinus und Coſinus der Winkel unter $\frac{1}{4}.90°$ oder $22°\frac{1}{2}$ die Sinus und Coſinus der Winkel von $22°\frac{1}{2}$ bis 45° zu berechnen. Dieſes iſt in der Centeſimaltheilung zu gebrauchen, ſo wie das Verfahren nach (52.) in der Nonageſimaltheilung des Quadranten.

54. In (43.) ſetze man $A = 45°$, dann $A = 30°$, und noch $A = 60°$, und vertauſche B mit A, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2} - \sin A^2 = \sin(45° + A).\sin(45° - A)$$
$$\tfrac{1}{4} - \sin A^2 = \sin(30° + A).\sin(30° - A)$$
$$\tfrac{3}{4} - \sin A^2 = \sin(60° + A).\sin(60° - A).$$

55. In der zweyten Formel (44.) ſetze man $A = 30° - \alpha$, ſo iſt

$$2\tan(30° + 2\alpha) = \tan(60° + \alpha) - \tan(30° - \alpha).$$

Es ſind nämlich ſtatt der Cotangenten die Tangenten der Complemente geſetzt.

Aus den Tangenten der Winkel von 0° bis 30° und von 60° bis 90° (den Cotangenten von 30° bis 0°) werden die Tangenten der Winkel von 30° bis 60° durch bloße Subtraction gefunden. Nur ſind die Unterſchiede in der letztern Reihe der Winkel doppelt ſo groß als in der erſtern, ſ. Cyklotechnie, Th. I. S. 680.

56. Es ſey die Summe dreyer Winkel, $A + B + C = 90$, ſo iſt

$\tang A . \tang B + \tang A . \tang C + \tang B . \tang C = 1.$

Denn $\tg A + \tg B = \frac{\sin (A + B)}{\cos A . \cos B}$ (31.)

und $\tg A . \tg C + \tg B . \tg C = (\tg A + \tg B) . \cot (A + B) = \frac{\sin (A + B)}{\cos A . \cos B} . \frac{\cos (A + B)}{\sin (A + B)} =$

$\frac{\cos (A + B)}{\cos A . \cos B} = 1 - \frac{\sin A . \sin B}{\cos A . \cos B} = 1 - \tg A \times \tg B$, folglich $\tg A . \tg C + \tg B . \tg C + \tg A . \tg B = 1.$

57. Es ſey $A + B + C = 90°$, ſo iſt $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A . \cot B . \cot C.$

Denn $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin (A + B)}{\sin A . \sin B} + \frac{\sin (A + B)}{\cos (A + B)} = \frac{\sin (A + B)}{\sin A . \sin B} . \frac{\cos (A + B) + \sin A . \sin B}{\cos (A + B)}$

$= \frac{\sin (A + B)}{\sin A . \sin B} . \frac{\cos A . \cos B}{\cos (A + B)}$

$= \cot A . \cot B \times \tang (A + B)$

$= \cot A . \cot B . \cot C.$

Der Satz iſt in dem Artikel, Dreyeck (38.) durch ein bloßes geometriſches Verfahren gefunden.

III. Reihen der Sinus und Coſinus von Winkeln, die in arithmetiſcher Progreſſion ſind.

58. In der erſten Formel (27.), $\sin (A + B) = 2 \sin A . \cos B - \sin (A - B)$, ſetze man für A folgeweiſe die Glieder der arithmetiſchen Progreſſion,

a; a + b; a + 2b; a + 3b; ..... a + nb; und B = b, so erhält man für die Sinus dieser Winkel folgende Fortschreitung.

$$\sin a = \sin a$$
$$\sin(a+b) = 2\cos b . \sin a - \sin(a-b)$$
$$\sin(a+2b) = 2\cos b . \sin(a+b) - \sin a$$
$$\sin(a+3b) = 2\cos b . \sin(a+2b) - \sin(a+b)$$
$$\sin(a+4b) = 2\cos b . \sin(a+3b) - \sin(a+2b)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\sin(a+nb) = 2\cos b . \sin(a+(n-1)b) - \sin(a+(n-2)b).$$

59. In der zweyten Formel (27.), $\sin(A+B) = 2\cos A . \sin B + \sin(A-B)$, setze man für A und B dieselben Größen, so ist das allgemeine Glied der Fortschreitung der Sinus,

$$\sin(a+nb) = 2\sin b . \cos(a+(n-1)b) + \sin(a+(n-2)b).$$

60. Eben so verfahre man mit der dritten Formel in (27.), $\cos(A+B) = 2\cos A . \cos B - \cos(A-B)$, und man erhält

$$\cos a = \cos a$$
$$\cos(a+b) = 2\cos b . \cos a - \cos(a-b)$$
$$\cos(a+2b) = 2\cos b . \cos(a+b) - \cos a$$
$$\cos(a+3b) = 2\cos b . \cos(a+2b) - \cos(a+b)$$
$$\cos(a+4b) = 2\cos b . \cos(a+3b) - \cos(a+2b)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\cos(a+nb) = 2\cos b . \cos(a+(n-1)b) - \cos(a+(n-2)b).$$

61. Durch dieselben Substitutionen wird aus der vierten Formel, $\cos(A + B) = \cos(A - B) - 2\sin A \cdot \sin B$, das allgemeine Glied der Fortschreitung der Cosinus,

$$\cos(a + nb) = \cos(a + (n - 2)b) - 2\sin b \cdot \sin(a + (n - 1)b).$$

62. Von diesen Formeln ist in dem Artikel, Cyklotechnie, die Anwendung zum Einschalten der Sinus und Cosinus zwischen zwey gegebenen, bey einer arithmetischen Fortschreitung der Winkel, gemacht. Th. I. S. 677.

Die Reihe der Sinus und Cosinus ist nach (58 und 60.) eine rücklaufende, worin jedes Glied aus den zwey nächst vorhergehenden auf eine gleichförmige Art zusammengesetzt wird.

63. Die Summe einer Reihe Sinus von Winkeln, die in arithmetischer Progression sind, sey $= S$, so daß

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) \ldots\ldots \ldots\ldots + \sin(a + nb) = S.$$

Es ist

$$S = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos(a + (n + \frac{1}{2})b)}{2\sin\frac{1}{2}b},$$

oder

$$S = \frac{\sin(a + \frac{1}{2}nb) \cdot \sin\frac{1}{2}(n + 1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

In der Formel (61.),

$2\sin b \cdot \sin(a + (n - 1)b) = \cos(a + (n - 2)b) - \cos(a + nb)$, setze man für n successiv die Werthe, 1, 2, 3 ... n + 1, so erhält man eine Reihe von Formeln oder Gleichungen, deren erste ist

$$2\sin b \cdot \sin a = \cos(a - b) - \cos(a + b).$$

Die letzte oder (n + 1)te ist

$$2\sin b \cdot \sin(a + nb) = \cos(a + (n - 1)b) - \cos(a + (n + 1)b).$$

Addirt man alle dieſe Gleichungen zu einander, ſo entſteht daraus dieſe,

$$2 \sin b . S = \cos(a - b) + \cos a - \cos(a + nb) - \cos(a + (n + 1)b),$$

das iſt (28.)

$$\sin b . S = \cos(a - \tfrac{1}{2}b)\cos\tfrac{1}{2}b - \cos(a + (n + \tfrac{1}{2})b)\cos\tfrac{1}{2}b.$$

Da $\sin b = 2 \sin \frac{1}{2}b . \cos \frac{1}{2}b$, ſo entſteht durch die Subſtitution des Werthes von $\sin b$ der erſte angegebene Werth von S, und durch Verwandlung des Unterſchiedes in ein Product nach (28.) der zweyte.

64. Die Summe einer Reihe Coſinus von Winkeln, die in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſey $= s$, ſo daß $\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) \ldots + \cos(a + nb) = s$; es iſt

$$s = \frac{\sin(a + (n + \frac{1}{2})b) - \sin(a - \frac{1}{2}b)}{2 \sin \frac{1}{2}b},$$

oder

$$s = \frac{\cos(a + \frac{1}{2}nb) . \sin \frac{1}{2}(n + 1)b}{\sin \frac{1}{2}b}.$$

In der Formel (59.)

$$2 \sin b . \cos(a + (n - 1)b) = \sin(a + nb) - \sin(a + (n - 2)b)$$

ſetze man für n nach der Reihe die Werthe, 1, 2, 3, ... n, n + 1, ſo erhält man eine Folge von Gleichungen, deren erſte iſt

$$2 \sin b . \cos a = \sin(a + b) - \sin(a - b).$$

Die letzte oder (n + 1)te iſt

$$2 \sin b . \cos(a + nb) = \sin(a + (n + 1)b) - \sin(a + (n - 1)b).$$

Werden alle dieſe Gleichungen zuſammen genommen, ſo entſteht die Gleichung,

$$2 \sin b \,.\, s = \sin (a + nb) + \sin (a + (n + 1)b) - \sin (a - b) - \sin a.$$

Dieſe verwandelt ſich in

$$\sin b \,.\, s = \sin (a + (n + \tfrac{1}{2})b) \cos \tfrac{1}{2} b - \sin (a - \tfrac{1}{2} b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2} b,$$

woraus ſich durch die Subſtitution von $2 \sin \frac{1}{2} b \,.\, \cos \frac{1}{2} b$ für $\sin b$ die angegebene Formel ergiebt.

65. Es iſt $\sin a + \sin 2a + \sin 3a \ldots\ldots + \sin . na = \frac{1}{2} \sin . na + \frac{1}{2} (1 - \cos na) \cot \frac{1}{2} a.$

Denn in der erſten Formel (63.) ſetze man $n - 1$ ſtatt n, und $b = a$, ſo iſt $S = \frac{\cos \frac{1}{2} a - \cos (n + \frac{1}{2}) a}{2 \sin \frac{1}{2} a}$.

Da $\cos (n + \frac{1}{2}) a = \cos na \,.\, \cos \frac{1}{2} a - \sin . na \times \sin \frac{1}{2} a$, und $\frac{\cos .}{\sin .} = \cot .$ ſo ergiebt ſich ſogleich die aufgeſtellte Formel.

Oder es iſt $2 S - \sin na = \frac{1 - \cos na}{\tang \frac{1}{2} a}$.

Dieſen Satz erweiſet Archimedes geometriſch auf eine ſehr einfache Art in dem 1. B. von Kugel und Cylinder, 22. Satz. Man hat nur ſtatt der Chorden bey ihm die doppelten Sinus zu ſetzen.

66. Aus der zweyten Formel in (63.) iſt $\sin a + \sin 2a \ldots + \sin na = \frac{\sin \frac{1}{2} (n + 1) a \,.\, \sin \frac{1}{2} na}{\sin \frac{1}{2} a}$.

Dieſer Satz iſt in dem Artikel, Differenzenrechnung (80.), aus der Theorie ſummatoriſcher Functionen hergeleitet.

67. Es iſt $\cos a + \cos 2a + \cos 3a, \ldots + \cos na = \frac{1}{2} \sin . na \,.\, \cot \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} (1 - \cos na)$.

Der Beweis iſt dem in (66.) geführten ähnlich.

68. Aus der zweyten Formel in (64.) ist $\cos a + \cos 2a \ldots + \cos na = \frac{\cos(\frac{1}{2}(n+1)a).\sin\frac{1}{2}na}{\sin\frac{1}{2}a}$, wie in dem Artikel, Differenzenrechnung (81.).

69. Es sey der Winkel na zu dem letzten Sinus und Cosinus $= 90°$, so ist die Summe der Sinus $= \frac{1}{2}(1 + \cot\frac{1}{2}a)$, und die Summe der Cosinus $= \frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}a - 1)$. Addirt man zu der letztern, noch den $\cos 0° = 1$, so wird die Summe, $\cos 0° + \cos a \ldots + \cos 90° = \frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}a + 1)$, gleich der Summe der Sinus, wie es nothwendig ist.

70. Es sey $na = 180°$, so ist die Summe der Sinus $= \cot\frac{1}{2}a$, da $\cos na = \cos 180° = -1$ ist.

Diesen Satz hat Archimedes a. a. O. 21. S. erwiesen. Kepler sagt in den Comment. de stella Martis, p. 211, daß die Secante und die Tangente von 89° zusammen genommen der Summe aller Sinus von Grad zu Grad durch den ganzen Halbkreis gleich sind, und beruft sich deshalb auf Cardanum de subtilitate (vermuthlich Kap. 16.), mit der Anzeige, daß Justus Byrgius den Beweis gefunden zu haben versichere. Es ist $\operatorname{cosec} a + \cot a = \cot\frac{1}{2}a$ (49.). Setzt man $a = 1°$, so ist $\operatorname{cosec} 1° = \sec 89°$, und $\cot 1° = \tang 89°$.

71. Wenn a ein kleiner Winkel, also $\cot\frac{1}{2}a$ eine große Zahl ist, so ist die Summe, $\sin a + \sin 2a \ldots \sin + na$ zu der Summe $\sin a + \sin 2a \ldots + \sin\frac{1}{2}\pi$, oder die Summe der Sinus in dem Bogen na zu der Summe der Sinus in dem Quadranten fast wie $1 - \cos na : 1$. Diesen Satz gebraucht Kepler in den Comm. de stella Martis, p. 274. und hat ihn vermuthlich durch Induction gefunden.

72. Wenn die Summe der Sinus oder Cosinus in einer ohne Ende fortgehenden Reihe verlangt wird, so entsteht eine Schwierigkeit, da die Reihe nicht convergirend ist. Die Sinus der Winkel von π bis 2π; von 2π bis 4π, und überhaupt von $(2m + 1)\pi$ bis

$(2m+2)\pi$ sind negativ. Die Summe der Sinus ist also wechselsweise zunehmend und abnehmend, und in einer beständigen Schwankung diesseits oder jenseits einer gewissen unveränderlichen Größe, die bloß durch die Winkel a und b bestimmt wird, und diese unveränderliche Größe vertritt bey einer unendlichen Anzahl von Gliedern die Stelle der arithmetischen Summe, welche nur bey einer endlichen Anzahl von Gliedern angegeben werden kann. In dem Werthe der Summe der Sinus,

$$S = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b) - \cos a + (n + \frac{1}{2})b)}{2 \sin \frac{1}{2} b},$$ hängt

der erste Theil von der Anzahl der Glieder nicht ab. Daher ist die Summe, $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b)$ $+ \text{etc. in infin.} = \frac{\cos(a - \frac{1}{2}b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}$.

73. Aus demselben Grunde ist die Summe, $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \text{etc. in infin.} = -\frac{\sin(a - \frac{1}{2}b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}$.

74. Da $2\cos(a - \frac{1}{2}b) \cdot \sin \frac{1}{2} b = \sin a - \sin(a-b)$, (27.) so ist

$$\sin a + \sin(a+b) + \text{etc. in inf.} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2}.$$

Da ferner $2\sin(a - \frac{1}{2}b) \cdot \sin \frac{1}{2} b = \cos(a-b) - \cos a$, so ist

$$\cos a + \cos(a+b) + \text{etc. in inf.} = -\frac{\cos(a-b) - \cos a}{4 \sin \frac{1}{2} b^2}.$$

75. Diese Werthe der Summe einer unendlichen Reihe von Sinus oder Cosinus stimmen mit denjenigen überein, die man erhält, wenn man mit Euler allgemein Summe einer unendlichen Reihe die analytische Formel nennt, aus deren Entwickelung jene Reihe entsteht. Da die Sinus und Cosinus von Winkeln, die in arithmeti-

ſcher Fortſchreitung ſind, eine rücklaufende Reihe ausmachen, ſo läßt ſich eine ſolche Formel finden, die entwickelt die Reihe der Sinus und Coſinus giebt. Nämlich, wenn

$$\frac{p + qz}{1 - \alpha z + z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

iſt, ſo ſind A, B, C, D, etc. Glieder einer rücklaufenden Reihe, deren Verhältniß-Scale iſt, $+\alpha$; -1, und $p = A$: $q = B - \alpha A$. ſ. rücklaufende Reihe. In unſerm Falle iſt, aus (58. und 60.), $\alpha = 2 \cos b$, und für die Reihe der Sinus, $A = \sin a$; $B = \sin (a + b)$, alſo $p = \sin a$; $q = \sin (a + b) - 2 \sin a . \cos b$. Setzt man $z = 1$, ſo wird $\frac{p + q}{1 - \alpha + 1}$ die Reihe der Sinus ohne Ende fortgeſetzt. Iſt dieſe $= S$, ſo iſt

$$S = \frac{\sin a + \sin (a + b) - 2 \sin a . \cos b}{2 - 2 \cos b}$$

$$= \frac{\sin a - \sin (a - b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2} = \frac{\cos (a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}.$$

Für die Reihe der Coſinus iſt $A = \cos a$; $B = \cos (a + b)$; und $p = \cos a$; $q = \cos (a + b) - 2 \cos a . \cos b$. Demnach iſt

$$s = \frac{\cos a + \cos (a + b) - 2 \cos a . \cos b}{2 (1 - \cos b)}$$

$$= \frac{\cos a - \cos (a - b)}{4 \sin \frac{1}{2} b^2} = - \frac{\sin (a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin \frac{1}{2} b}.$$

76. Die in dem vorhergehenden Paragraphen vorgetragene Auflöſung iſt aus Eulers Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 258. ff. genommen. Sie ſcheint der Natur dieſer Reihen völlig angemeſſen zu ſeyn. Inzwiſchen hat Daniel Bernoulli doch noch Schwierigkeiten dabey gefunden. Er hat über dieſe Reihen zwey Abhandlungen in den neuen Pe-

tersburger Commentarien, T. XVII. 1772, und T. XVIII. 1774. geliefert. In der zweyten äußert er die Meynung, daß in dem Falle, wenn die Anzahl der Glieder unendlich iſt, etwas verborgen liege, quod omnem ſolutionem pure geometricam eludat, rurſusque ad principia ejus metaphyſica, ſed alio modo, recurrendum eſſe. Eine Abhandlung des Abbé Boſſut in den Mem. de l'Acad. des ſc. 1769. hatte ihn zu dieſen Unterſuchungen veranlaßt. Zugleich hat auch Lexell in den Comm. Acad. Petrop. T. XVIII. über denſelben Gegenſtand ſeine Gedanken vorgetragen. Sein Verfahren iſt im Grunde das Bernoulliſche, hat aber den Anſchein von Willkührlichkeit. Das Reſultat iſt das obige. Euler ſelbſt hat die Sache noch einmal vorgenommen, in den novis Actis Petrop. T. VII. 1789.

Entweder muß man die Summe einer unendlichen Reihe gar nicht beſtimmen wollen, oder eine beſtimmte Gränze ſuchen. Dieſe iſt in unſerm Falle diejenige Größe, von welcher die wirklichen ſucceſſiven Summen wechſelsweiſe in Plus und Minus unterſchieden ſind.

77. Die beiden Formeln in (74.) ſind ſchon in einer andern Abſicht als Summen unendlicher Reihen betrachtet worden, in Differenzenrechnung (64. 65.). Man ſetze irgend einen der Winkel in der arithmetiſchen Progreſſion $= \varphi$; den Unterſchied der Glieder $= \Delta\varphi$, ſo iſt $\frac{\sin\varphi - \sin(\varphi - \Delta\varphi)}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2}$ die Function, deren Differenz $= -\sin\varphi$. Denn man ſetze dieſe Function $= z$, ſo iſt

$$\frac{\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = z + \Delta z,$$

alſo

$$\frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - 2\sin\varphi + \sin(\varphi-\Delta\varphi)}{4\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = \Delta z,$$

oder

$$\Delta z = \frac{2 \sin\varphi . \cos\Delta\varphi - 2\sin\varphi}{4 \sin \frac{1}{2}\Delta\varphi^2} = -\sin\varphi,$$

und daher ist die durch z bezeichnete Function die integrirende Function von — sin φ, oder — z ist es von sin φ. Diese läßt sich auch, wenn die Reihe der Unterschieds-Functionen unendlich gesetzt, und dadurch kein letztes Glied angegeben werden kann, als eine Summe betrachten.

Ist nämlich eine Reihe, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \psi, \omega$ gegeben, so ist $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\delta - \gamma) \ldots + (\omega - \psi) = \omega - \alpha$, oder die Summe der Differenzen negativ genommen gleich $\alpha - \omega$, also gleich α zu schätzen, wenn ω als ein unendlich entferntes Glied betrachtet wird. Was hier α ist, ist die vorher durch z bezeichnete Function von φ, und $\beta - \alpha$ ist $= -\sin\varphi$.

Eben solche Beschaffenheit hat es mit der Reihe der Cosinus.

78. Die Reihe der Winkel sey A; $A + 2\alpha$; $A + 4\alpha$; $A + 6\alpha$; etc. Die Anfangsglieder der Differenzreihen ihrer Sinus seyn bezeichnet durch $\Delta \sin\alpha$; $\Delta^2 \sin A$; $\Delta^3 \sin A$; u. s. f. Die zweyten Glieder derselben durch $\Delta \sin(A + 2\alpha)$; $\Delta^2 \sin(A + 2\alpha)$; $\Delta^3 \sin(A + 2\alpha)$; etc. Die dritten Glieder durch $\Delta \sin(A + 4\alpha)$; etc. u. s. f. für die folgenden Glieder. Es ist

$$\Delta \sin A = +2 \cos(A + \alpha) . \sin\alpha$$
$$\Delta^2 \sin A = -4 \sin(A - 2\alpha) . \sin\alpha^2$$
$$\Delta^3 \sin A = -8 \cos(A - 3\alpha) . \sin\alpha^3$$
$$\Delta^4 \sin A = +16 \sin(A + 4\alpha) . \sin\alpha^4$$
etc. etc.

Auf gleiche Art ist

$$\Delta \cos A = -2 \sin(A+\alpha) \cdot \sin\alpha$$
$$\Delta^2 \cos A = -4 \cos(A+2\alpha) \cdot \sin\alpha^2$$
$$\Delta^3 \cos A = +8 \sin(A+3\alpha) \cdot \sin\alpha^3$$
$$\Delta^4 \cos A = +16 \cos(A+4\alpha) \cdot \sin\alpha^4$$
etc. etc.

Denn es ist $\Delta \sin A = \sin(A+2\alpha) - \sin A = 2\cos(A+\alpha) \cdot \sin\alpha$. Auch $\Delta \sin(A+2\alpha) = \sin(A+4\alpha) - \sin(A+2\alpha) = 2\cos(A+3\alpha) \cdot \sin\alpha$, also $\Delta^2 \sin A = \Delta \sin(A+2\alpha) - \Delta \sin A = -4 \sin(A+2\alpha) \cdot \sin\alpha^2$. Auf gleiche Art werden die beiden ersten Glieder jeder folgenden Differenzreihe, und daraus das Anfangsglied der nächst folgenden gefunden. Man kann auch die Glieder der Differenzreihen als Glieder einer Hauptreihe betrachten. Die Glieder derselben Differenzreihe werden aus dem Anfangsgliede ganz leicht durch Vertauschung von A mit den folgenden Winkeln gefunden.

79. Bey derselben Progression der Winkel, A, $A+2\alpha$, $A+4\alpha$, etc. ist

$$\Delta \sec A = \frac{2\sin(A+\alpha) \cdot \sin\alpha}{\cos A \cdot \cos(A+2\alpha)}$$

$$\Delta^2 \sec A = \frac{(2\cos\alpha^2 - \cos(A+2\alpha)^2) \cdot 4\sin\alpha^2}{\cos A \cdot \cos(A+2\alpha) \cdot \cos(A+4\alpha)}$$

Denn es ist $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\sec(A+2\alpha) = \frac{1}{\cos(A+2\alpha)}$, also

$$\Delta \sec A = \frac{\cos A - \cos(A+2\alpha)}{\cos A \cdot \cos(A+2\alpha)},$$

worin der Zähler $= 2\sin(A+\alpha) \cdot \sin\alpha$ ist.

Das zweyte Glied der ersten Differenzreihe ist

$$\Delta \operatorname{sec}(A+2\alpha) = \frac{2 \sin(A+3\alpha).\sin\alpha}{\cos(A+2\alpha).\cos(A+4\alpha)}.$$

Dadurch ist $\Delta^2 \operatorname{sec} A =$

$$\frac{\sin(A+3\alpha).\cos A - \sin(A+\alpha).\cos(A+4\alpha)}{\cos A.\cos(A+2\alpha).\cos(A+4\alpha)} \times 2\sin\alpha.$$

Den Zähler des Bruchs auf die Winkel der Progression und α zu reduciren, bemerke man, daß

$\sin(A+3\alpha)\cos A = \frac{1}{2}\sin(2A+3\alpha) + \frac{1}{2}\sin 3\alpha$;

$\sin(A+\alpha).\cos(A+4\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2A+5\alpha) - \frac{1}{2}\sin 3\alpha$;

daß der Unterschied dieser beiden Werthe $= \sin 3\alpha - \cos(2A+4\alpha).\sin\alpha$, und daß $\sin 3\alpha = (4\cos\alpha^2 - 1) \times \sin\alpha$, auch, daß $1 + \cos(2A+4\alpha) = 2\cos(A+2\alpha)^2$ ist.

80. Bey eben der Progression der Winkel ist

$$\Delta \operatorname{cosec} A = -\frac{2\cos.(A+\alpha).\sin\alpha}{\sin A.\sin(A+2\alpha)}$$

$$\Delta^2 \operatorname{cosec} A = \frac{(2\cos\alpha^2 - \sin(A+2\alpha)^2).4\sin\alpha^2}{\sin A.\sin(A+2\alpha).\sin(A+4\alpha)}.$$

Man hat nur nöthig, $90° - A$ statt A, und $-\alpha$ statt $+\alpha$ in den Formeln (79.) zu setzen.

81. Die Reihe der Winkel sey A, $A+\alpha$, $A+2\alpha$, $A+3\alpha$; etc. so ist

$$\Delta \operatorname{tang} A = \frac{\sin\alpha}{\cos A.\cos(A+\alpha)},$$

$$\Delta^2 \operatorname{tang} A = \frac{2\operatorname{tang}(A+\alpha).\sin\alpha^2}{\cos A.\cos(A+2\alpha)}.$$

Aus den Werthen von $\operatorname{tang}(A+\alpha) - \operatorname{tang} A$, und

tang $(A + 2\alpha)$ — tang $(A + \alpha)$ wird Δ tang A, und Δ tang $(A + \alpha)$ erhalten. Aus diesen beiden ersten Gliedern der ersten Differenzreihe folgt Δ^2 tang A, wobey noch tang $(A + \alpha)$ statt des Quotienten von Sinus dividirt durch Cosinus zu setzen ist.

82. Hieraus ist, wenn A mit $90 - A$ und $+\alpha$ mit $-\alpha$ vertauscht wird,

$$\Delta \cot A = -\frac{\sin \alpha}{\sin A \,.\, \sin(A + \alpha)}$$

$$\Delta^2 \cot A = +\frac{2 \cot(A + \alpha) \,.\, \sin \alpha^2}{\sin A \,.\, \sin(A + 2\alpha)}.$$

83. Die drey Winkel, A, B, C, seyn in arithmetischer Proportion, so ist

$$\sin B = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) + 2 \sin B \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos C) + 2 \cos B \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$$

$$\sec B = \tfrac{1}{2}(\sec A + \sec C) - \sec A \,.\, \sec B \,.\, \sec C \times$$
$$(4 \cos \tfrac{1}{2}(B - A)^2 - 2 \cos B^2) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$$

oder

$$\sec B = \tfrac{1}{2}(\sec A + \sec C) - \sec A \,.\, \sec B \,.\, \sec C \times$$
$$(1 + 2 \cos(B - A) - \cos 2B) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2.$$

$$\text{tang } B = \tfrac{1}{2}(\text{tang } A + \text{tang } C) - \frac{\text{tang } B \,.\, \sin(B - A)^2}{\cos A \,.\, \cos C}.$$

Denn es seyn irgend drey Größen, α, β, γ, ihre ersten Unterschiede, $\Delta\alpha = \beta - \alpha$; $\Delta\beta = \gamma - \beta$, so ist der zweyte Unterschied $\Delta^2\alpha = \gamma - 2\beta + \alpha$; also $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \frac{1}{2}\Delta^2\alpha$. (Vergl. arithm. Reihen höherer Ordn. 2.). Von diesem allgemeinen Satze sind die aufgestellten Formeln unmittelbare Anwendungen. In der ersten Formel, für die Secante sind anstatt der Cosinus im Divisor die Secanten im Dividendus gesetzt; in der zweyten ist eine Substitution aus (36.) gebraucht.

IV. Formeln für die Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Winkels durch die Sinus und Cosinus des einfachen; auch der Tangenten auf gleiche Art.

§. 84. Man setze in (58.) den Winkel $a = o$, $b = \varphi$; $\sin \varphi = y$; $\cos \varphi = x$, so ist

$$\sin . n\varphi = 2 \cos \varphi . \sin (n-1)\varphi - \sin (n-2)\varphi.$$

Die Sinus der vielfachen Winkel machen also eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale ist $2 \cos \varphi ; -1$. Daher ist

$$\sin \varphi = y$$
$$\sin 2\varphi = 2xy$$
$$\sin 3\varphi = 4x^2y - y$$
$$\sin 4\varphi = 8x^3y - 4xy$$
$$\sin 5\varphi = 16x^4y - 12x^2y + y$$
$$\sin 6\varphi = 32x^5y - 32x^3y + 6xy$$
$$\sin 7\varphi = 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y$$
$$\sin 8\varphi = 128x^7y - 192x^5y + 80x^3y - 8xy$$
$$\sin 9\varphi = 256x^8y - 448x^6y + 240x^4y - 40x^2y + y$$

und allgemein

$$\sin . n\varphi = 2^{n-1} x^{n-1} y - (n-2)\, 2^{n-3} x^{n-3} y + \frac{n-3 . n-4 .}{1 . 2} 2^{n-5} x^{n-5} y - \frac{n-4 . n-5 . n-6 .}{1 . 2 . 3} 2^{n-7} x^{n-7} y + \frac{n-5 . n-6 . n-7 . n-8 .}{1 . 2 . 3 . 4} 2^{n-9} x^{n-9} y - \text{etc.}$$

§. 85. Um die Formation der Coefficienten in einer verticalen Reihe, oder zu derselben Stelle gehörigen, zu entdecken, bezeichne man sie durch A, B, C, D . . . Q, R, S, T, etc. und die in der folgenden durch a, b,

c, d, ... q, r, s, t, etc. so daß die gleichnamigen Coefficienten in denselben Stellen ihrer Reihen vom Anfange an stehen.

Es ist

$t = 2s + T; \quad s = 2r + S;$

$r = 2q + R; \quad q = 2p + Q;$ u. s. f.

also $t = 4r + 2S + T = 8q + 4R + 2S + T$

$= 16p + 8Q + 4R + 2S + T,$ u. s. f.

Ist T das mte Glied der einen Reihe, und t das mte Glied der folgenden, so ist

$$t = 2^{m-1} A + 2^{m-2} B + 2^{m-3} C \ldots . \ldots + 8Q + 4R + 2S + T,$$

da von T bis A m Glieder der Reihe sind.

Die erste Reihe der Coefficienten ist offenbar die geometrische, 1, 2, 4, 8, ꝛc. In der zweyten Reihe ist demnach das allgemeine Glied $= m.2^{m-1}$, und die Reihe ist

$1.1; \; 2.2; \; 3.2^2; \; 4.2^3 \ldots m.2^{m-1};$ etc.

Daher ist das allgemeine Glied der dritten Reihe,

$$t = (1 + 2 + 3 \ldots + m)\, 2^{m-1} = \frac{m.m+1.}{1.2}\, 2^{m-1},$$

und die Reihe ist

$$1; \; 3.2; \; 6.2^2; \; 10.2^3 \ldots \frac{m.m+1.}{1.2}\, 2^{m-1};$$ etc.

Nun ist das allgemeine Glied in der vierten Reihe,

$$t = \left(1 + 3 + 6 + 10 \ldots + \frac{m.m+1.}{1.2}\right) 2^{m-1}$$

$$= \frac{m.m+1.m+2.}{1.2.3}\, 2^{m-1}$$ (arithm. Reihen höh. Ordn. 12. 13. oder Binomialcoefficienten, 6.), und die Reihe ist

$$1; 4.2; 10.2^2; 20.2^3 \ldots; \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3} 2^{m-1} \text{ etc.}$$

Daraus ist das allgemeine Glied der fünften Reihe

$$t = \left(1+4+10+20 \ldots \frac{m.m+1.m+2.}{1.2.3}\right) 2^{m-1}$$

$$= \frac{m.m+1.m+2.m+3.}{1.2.3.4} \cdot 2^{m-1}.$$

In der ersten Reihe ist $m = n$; in der zweyten ist $m = n-2$; in der dritten $m = n-4$; in der vierten $m = n-6$, u. s. f. Setzt man diese Werthe für m in den gefundenen allgemeinen Ausdrücken, so wird die allgemeine Formel für $\sin n\varphi$ erhalten.

86. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so läßt sich $\sin.n\varphi$ durch Potenzen von $\sin\varphi$ oder y allein ohne den $\cos\varphi$ oder x ausdrücken, weil die Potenzen von x alsdann gerade Exponenten haben, und also ganze Potenzen von $1-y^2$ geben. Man setze in (58.) den Winkel $a = \varphi$; $b = 2\varphi$, so ist

$$\sin(2n+1)\varphi = 2\cos 2\varphi . \sin(2n-1)\varphi - \sin(2n-3)\varphi,$$

oder, weil $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin\varphi^2$ ist,

$$\sin(2n+1)\varphi = (2-4\sin\varphi^2).\sin(2n-1)\varphi - \sin(2n-3)\varphi.$$

Die Sinus ungerader Vielfachen von φ machen also eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale ist $+(2-4y^2); -1$. Demnach ist

$$\sin\varphi = y$$
$$\sin 3\varphi = 3y - 4y^3$$
$$\sin 5\varphi = 5y - 20y^3 + 16y^5$$
$$\sin 7\varphi = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7$$
$$\sin 9\varphi = 9y - 120y^3 + 432y^5 - 576y^7 + 256y^9$$
$$\sin 11\varphi = 11y - 220y^3 + 1232y^5 - 2816y^7 + 2816y^9 - 1024y^{11}$$

und allgemein, für ein ungerades n,

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1}y - \frac{n.nn-1.}{1.2.3}y^3 + \frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}y^5 - \frac{n.nn-1.nn-9.nn+25.}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 \ldots \pm 2^{n-1}y^n.$$

87. Man bezeichne die Coefficienten in einer Verticalreihe, oder diejenigen, welche zu derselben Potenz von y gehören, durch A, B, C, D, ... P, Q, R, S, T, etc. und die in der nächstfolgenden durch a, b, c, d ... p, q, r, s, t, etc. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. Die gleichnamigen Coefficienten haben einerley Stellen in ihren Reihen. Es ist

$$t = 2s - r + 4T; \quad s = 2r - q + 4S;$$
$$r = 2q - p + 4R; \text{ etc.}$$

also $t = 3r - 2q + 8S + 4T = 4q - 3p + 12R + 8S + 4T$. Auf diese Art wird zuletzt erhalten das mte Glied

$$t = 4(mA + (m-1)B + (m-2)C \ldots + 3R + 2S + T).$$

In dem Artikel, arithmetische Reihen höherer Ordnungen (17.), ist die Summirung dieser Reihe gewiesen. Das erste Glied der ersten Unterschiede der Reihe A, B, C, D, etc. sey ΔA; das erste der zweyten Unterschiede $= \Delta^2 A$; der dritten $\Delta^3 A$, u. s. f. so ist,

$$s = 4\left(\frac{m+1.m}{1.2}A + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3}\Delta A + \frac{m+1.m.m-1.m-2.}{1.2.3.4}\Delta^2 A + \text{etc.}\right).$$

Die erste Reihe der Coefficienten ist offenbar die der ungeraden Zahlen. Also ist $A = 1$; $\Delta A = 2$; $\Delta^2 A = 0$, etc. und

$$t = 4\left(\frac{m+1.m}{1.2}.1 + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3}.2\right)$$

$$= 4.\frac{m.m+1.2m+1.}{1.2.3}.$$

Die zweyte Reihe der Coefficienten ist also

$$4(1; 5; 14; 30; 55 \ldots \frac{m.m+1.2m+1.}{1.2.3}; \text{etc.}).$$

Diese Reihe ist eine arithmetische der dritten Ordnung, in welcher nach Absonderung des Factors 4, ist $A = 1$; $\Delta A = 4$; $\Delta^2 A = 5$; $\Delta^3 A = 2$. Folglich ist für die nächstfolgende Reihe,

$$t = 16\left(\frac{m+1.m}{1.2}.1 + \frac{m+1.m.m-1.}{1.2.3}.4\right.$$

$$\left. + \frac{m+1\ldots m-2.}{1\ldots 4}.5 + \frac{m+1\ldots m-3.}{1\ldots 5}.2\right).$$

Entwickelt man die Producte, so ist

$$t = 16.\frac{m.m+1}{1.2}.\frac{2m^3+13m^2+27m+18}{3.4.5}.$$

Setzt man in dem Zähler des zweyten Bruchs $m = -2$, so wird derselbe $= 0$; ebenfalls, wenn $m = -3$ gesetzt wird. Dieser Zähler enthält also die Factoren $m + 2$ und $m + 3$; daher auch, wegen der Glieder $2m^3$ und $+18$, den Factor $2m + 3$, so daß

$$t = 16.\frac{m.m+1.m+2.m+3.2m+3.}{1.2.3.4.5}.$$

Die dritte Reihe der Coefficienten ist also

$$16\left(1; 7; 27; 77; \ldots \frac{m\ldots m+3.2m+3.}{1\ldots 4.5}\right).$$

Dieses ist eine arithmetische Reihe der fünften Ordnung. Nach abgesondertem Factor, 16, ist $\Delta A = 6$; $\Delta^2 A = 14$; $\Delta^3 A = 16$; $\Delta^4 A = 9$; $\Delta^5 A = 2$. Mittelst dieser

Differenzglieder findet man auf dieselbe Art wie vorher. das allgemeine Glied der vierten Verticalreihe. Man erkennt aber schon in den allgemeinen Gliedern der drey ersten Reihen das Gesetz der Glieder überhaupt. Es ist nach der Analogie jener das mte Glied der vierten Verticalreihe

$$= 64 \cdot \frac{m \cdot m+1 \ldots m+5 \cdot 2m+5}{1 \cdot 2 \ldots 6 \cdot 7};$$

der fünften Verticalreihe

$$= 256 \cdot \frac{m \cdot m+1 \ldots m+7 \cdot 2m+7}{1 \cdot 2 \ldots 8 \cdot 9};$$

u. s. f.

Da die Reihen alle auf eine gleichförmige Art jede aus der nächst vorhergehenden hergeleitet werden, so ist das aus einigen Gliedern erkannte Gesetz der Formation zuverlässig. Die berechneten Glieder der vierten und fünften Reihe bestätigen es.

88. Für die erste Reihe ist $m = \frac{n+1}{2}$, und $t = \frac{2m-1}{1} = n$. Für die zweyte Reihe ist $m = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$, also $t = \frac{n+1 \cdot n-1 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n \cdot nn-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Für die dritte ist $m = \frac{n+1}{2} - 2 = \frac{n-3}{2}$, also

$$t = \frac{n-3 \cdot n-1 \cdot n+1 \cdot n+3 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{n \cdot nn-1 \cdot nn-9}{1 \ldots 5};$$ u. s. w.

89. Man ſetze in (58.) den Winkel $a = o$, und $b = 2\varphi$, ſo iſt

$\sin 2n\varphi = 2\cos 2\varphi . \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$.

oder $\sin 2n\varphi = (2 - 4\sin\varphi^2) . \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$. Die Sinus der geraden Vielfachen von φ machen eine rücklaufende Reihe, deren Verhältniß-Scale iſt $+ 2\cos 2\varphi ; -1$, oder $(+ 2 - 4\sin\varphi^2); -1$, das iſt, $+ (2 - 4yy); -1$. Demnach iſt, wenn $\cos\varphi = x$ geſetzt wird,

$\sin 2\varphi = 2yx$

$\sin 4\varphi = (4y - 8y^3)x$

$\sin 6\varphi = (6y - 32y^5 + 32y^5)x$

$\sin 8\varphi = (8y - 80y^5 + 192y^5 - 128y^7)x$

$\sin 10\varphi = (10y - 160y^5 + 672y^5 - 1024y^7 + 512y^9)x$

etc. etc.

und allgemein, für ein gerades n,

$$\sin n\varphi = \left(\frac{n}{1}y - \frac{n \cdot nn-4}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \frac{n.nn-4.nn-16.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^5 + \frac{n.nn-4.nn-16.nn-36.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}y^7 \ldots \pm 2^{n-1}y^{n-1}\right)\sqrt{(1-yy)}.$$

90. Die Herleitung der allgemeinen Formel iſt wie in (87.). Das mte Glied der erſten Vertikalreihe iſt $= 2m$; das mte der zweyten iſt $= 4.\frac{m.m+1.2m+4}{1\cdot 2\cdot 3}$;

das mte der dritten iſt

$= 16.\frac{m.m+1.m+2.m+3.2m+8.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$; u. ſ. f.

In der ersten Reihe ist $m = \frac{n}{2}$; in der zweyten ist $m = \frac{n}{2} - 1$; in der dritten ist $m = \frac{n}{2} - 2$; u. s. f. Setzt man für m diese Werthe, so wird die allgemeine Formel für $\sin n\varphi$ erhalten.

91. Das letzte Glied in $\sin n\varphi$ ist das erste Glied einer Verticalreihe. Für dasselbe ist $m = 1$; und der Coefficient ist für ein ungerades n eine Potenz von 4, deren Exponent die Zahl der Glieder in $\sin n\varphi$ weniger Eins ist; für ein gerades n eben die Potenz mit 2 multiplicirt. Für ein ungerades n ist die Anzahl der Glieder $= \frac{n+1}{2}$, also ist jener Coefficient $= 4^{(n-1):2} = 2^{n-1}$. Für ein gerades n ist die Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2}n$, und der Coefficient des letzten Gliedes $= 2 \times 4^{(n-2):2} = 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

92. In der Formel (84.) setze man $2\cos\varphi = z$, so ist die Scale der Relation $+z; -1$; und es ist

$\sin\varphi = y$

$\sin 2\varphi = zy$

$\sin 3\varphi = (z^2 - 1)y$

$\sin 4\varphi = (z^3 - 2z)y$

$\sin 5\varphi = (z^4 - 3z^2 + 1)y$

$\sin 6\varphi = (z^5 - 4z^3 + 3z)y$

$\sin 7\varphi = (z^6 - 5z^4 + 6z^2 - 1)y$

$\sin 8\varphi = (z^7 - 6z^5 + 10z^3 - 4z)y$

u. s. f.

Die Zusammensetzung dieser Formeln zeigt sogleich, daß die Coefficienten die figurirten Zahlen sind, oder daß die zu einer Verticalreihe gehörigen die Binomial-Coeffi-

cienten in derjenigen Stelle ſind, deren Ordnungszahl dieſelbe wie für die Verticalreihe iſt. Es iſt $z = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}$.

93. Man ſetze in (60.) den Winkel $a = \varphi$, und $b = \varphi$, ſo iſt $\cos(1+n)\varphi = 2\cos\varphi \cdot \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi$. Die Coſinus der Vielfachen von φ machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Verhältniß-Scale iſt $2\cos\varphi; -1$. Es iſt alſo

$$\cos\varphi = x$$
$$\cos 2\varphi = 2x^2 - 1$$
$$\cos 3\varphi = 4x^3 - 3x$$
$$\cos 4\varphi = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$\cos 5\varphi = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\cos 6\varphi = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$\cos 7\varphi = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$\cos 8\varphi = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

etc.

Allgemein

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}x^n - \frac{n}{1}2^{n-3}x^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2}2^{n-5}x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3}2^{n-7}x^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4}2^{n-9}x^{n-8} - \text{etc.}$$

Das letzte Glied iſt $\pm nx$ oder ± 1, nachdem n ungerade oder gerade iſt.

Die allgemeine Formel für $\cos n\varphi$ wird aus der für $\sin n\varphi$ in (84.) hergeleitet, vermittelſt der Formel $\sin(n+1)\varphi = \sin n\varphi \cdot \cos\varphi + \cos n\varphi \cdot \sin\varphi$ in (84.). Dieſe giebt

$$\cos n\varphi = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi.$$

Aus der allgemeinen Formel für $\sin n\varphi$ in (84) wird der Quotient $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ durch eine nach Potenzen von $\cos\varphi$ geordnete Reihe gegeben, und eben so $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$, wenn daselbst $n+1$ statt n gesetzt wird. Dieser letztere Quotient ist =

$$2^n x^n - (n-1)\,2^{n-2}x^{n-2} + \frac{n-2.n-3.}{1\cdot 2}2^{n-4}x^{n-4}$$
$$- \frac{n-3.n-4.n-5.}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-6}x^{n-6} + \frac{n-4..n-7}{1\cdot\cdot 4}2^{n-8}x^{n-8}$$
— etc.

Der zweyte Theil von $\cos n\varphi$ ist

$$2^{n-1}x^n - (n-2)\,2^{n-3}x^{n-2} + \frac{n-3.n-4.}{1\cdot 2}2^{n-5}x^{n-4}$$
$$- \frac{n-4.n-5.n-6.}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}x^{n-6} + \frac{n-5..n-8.}{1\cdot\cdot 4}2^{n-9}.x^{n-8}$$
— etc.

Durchs Abziehen dieses Theils von dem ersten wird ganz leicht die allgemeine Formel erhalten. Man dividire nur in dem ersten Theile jede Potenz von 2 durch 2, und setze dem ersten Factor der Coefficienten 2 als Factor zu.

94ª. Da $1 - \cos 2\varphi = 2\sin\varphi^2$, also $2\sin n\varphi^2 = 1 - \cos 2n\varphi$ ist, so wird $\sin n\varphi^2$ durch eine nach geraden Potenzen von $\cos\varphi$ geordnete Reihe erhalten.

94b. Für ein ungerades n ist

$$\pm \sin n\varphi = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2}$$

$$+ \frac{n.n-3.}{1.2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} 2^{n-7} y^{n-6}$$

$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} 2^{n-9} y^{n-8} - \text{etc.}$$

wo das obere Vorzeichen für ein ungerades n von der Form $4m + 1$ gilt.

Die Formel entsteht aus der in (93.), wenn darin $\cos(2n+1)\varphi$ mit $\pm \sin(2n+1)(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ vertauscht, und dann φ statt $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ gesetzt wird, wodurch auch x mit y zu vertauschen ist.

Denn es sey $(2n+1)\varphi = 2m\pi \pm \omega$, und ω so wie φ kleiner als ein Quadrant. Es ist

$$\cos(2m\pi + \omega) = \cos\omega = + \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \omega)$$
$$= \pm \sin((n - 2m)\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \omega)$$
$$= \pm \sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$ wo das obere Vorzeichen für ein gerades n gilt.

Ist der Überschuß von $(2n+1)\varphi$ über ein Vielfaches von vier Rechten ein stumpfer Winkel, so setze man $(2n+1)\varphi = (2m+1)\pi - \omega$, wo ω ein spitzer Winkel ist. Es ist

$$\cos((2m+1)\pi - \omega) = \cos(\pi - \omega)$$
$$= -\cos\omega = -\sin(\tfrac{1}{2}\pi + \omega)$$
$$= \mp \sin((n - 2m)\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \omega)$$
$$= \pm \sin((n - 2m - 1)\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \omega)$$
$$= \pm \sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi).$$

Auf ähnliche Art wird die Vertauschung erwiesen, wenn $(2n+1)\varphi = (2m+1)\pi + \omega$, oder $= 2m\pi - \omega$ ist, und ω hier ebenfalls einen spitzen Winkel bedeutet.

Die Formel des Satzes ist die in (86.) rückwärts gelesen.

Zweyte Formel für den Sinus und den Cosinus des Vielfachen eines Winkels.

95. Den Sinus und Cosinus des Vielfachen eines Winkels kann man noch auf eine andere Art aus den Sinus und Cosinus des einfachen zusammen setzen, nämlich durch die Zusetzung des einfachen Winkels, vermittelst der ersten und dritten Formel in (24.).

Es sey der einfache Winkel $= \varphi$, dessen Sinus $= y$; Cosinus $= x$, so ist

I. $\sin 2\varphi = 2yx$; $\cos 2\varphi = x^2 - y^2$.

II. $\sin 3\varphi = \sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos 2\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= 3yx^2 - y^3$.
$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi \,.\, \cos\varphi - \sin 2\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= x^3 - 3xy^2$.

III. $\sin 4\varphi = \sin 3\varphi \,.\, \cos\varphi + \cos 3\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= 4yx^3 - 4y^3x$.
$\cos 4\varphi = \cos 3\varphi \,.\, \cos\varphi - \sin 3\varphi \,.\, \sin\varphi$
$= x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

u. s. w.

96. Man bemerkt leicht, daß sich die Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Winkels in die Binomial-Coefficienten aus der Potenz, deren Exponent das Vielfache des Winkels ist, theilen. Es sey

$(x + y)^n = x^n + Ax^{n-1}y + Bx^{n-2}y^2 + Cx^{n-3}y^3 + Dx^{n-4}y^4 + Ex^{n-5}y^5 + \text{etc.}$

Man setze, zufolge des an den entwickelten Sinus und Cosinus bemerkten Gesetzes, daß allgemein sey

$\sin n\varphi = Ayx^{n-1} - Cy^3x^{n-3} + Ey^5x^{n-5} - Gy^7x^{n-7} + \text{etc.}$

$$\cos n\varphi = x^n - \mathfrak{B}x^{n-2}y^2 + \mathfrak{D}x^{n-4}y^4 - \mathfrak{F}x^{n-6}y^6 + \mathfrak{H}x^{n-8}y^8 - \text{etc.}$$

so ist

$$\sin(n+1)\varphi = (1+\mathfrak{A})yx^n - (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})y^3x^{n-2} + (\mathfrak{D}+\mathfrak{E})y^5x^{n-4} - (\mathfrak{F}+\mathfrak{G})y^7x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$\cos(n+1)\varphi = x^{n+1} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})x^{n-1}y^2 + (\mathfrak{C}+\mathfrak{D})x^{n-3}y^4 - (\mathfrak{E}+\mathfrak{F})x^{n-5}y^6 + \text{etc.}$$

Nun ist die Summe zweyer auf einander folgenden Binomial-Coefficienten, des mten und (m + 1)ten, in der nten Potenz, der (m + 1)te Coefficient in der (n + 1)ten Potenz (Binom. Coeff. 5.). Die Coefficienten in den Formeln für $\sin(n+1)\varphi$ und $\cos(n+1)\varphi$ sind daher eben so die Binomialcoefficienten aus der (n + 1)ten Potenz von (x + y), wie in den Formeln für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ aus der nten Potenz des Binomium. Die Vorzeichen wechseln in jenen Formeln eben so ab, wie in diesen; und die Folge der Exponenten von y und x wird dort wie hier nach demselben Gesetze bestimmt. Die Formeln sind also für $(n+1)\varphi$ richtig, wenn sie für $n\varphi$ gelten. Nun gelten sie für $n=2$; $n=3$; $n=4$, also auch für $n=5$; folglich für $n=6$, und so ferner für alle ganze Zahlen-Werthe von n.

97. Es ist also allgemein für ganze Zahlenwerthe von n,

$$\sin n\varphi = n\sin\varphi\,.\cos\varphi^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\sin\varphi^3.\cos\varphi^{n-3} + \frac{n.n-1..n-4.}{1.2..5}\sin\varphi^5.\cos\varphi^{n-5} - \frac{n.n-1....n-6.}{1.2....7}\sin\varphi^7.\cos\varphi^{n-7} + \text{etc.}$$

$$\cos n\varphi = \cos\varphi^n - \frac{n.n-1.}{1.2}.\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}.\sin\varphi^4$$
$$- \frac{n.n-1...n-5.}{1.2...6}\cos\varphi^{n-6}.\sin\varphi^6 + \text{etc.}$$

Diese Formeln gelten aber auch für gebrochne Werthe von n, wie nun gezeigt werden wird.

98. Es sey $\sin\varphi = y$, $\cos\varphi = x$, und die Binomialcoefficienten in der nten Potenz, von dem Coefficienten n an, seyn A, B, C, D, E, &c. so ist

I. $\frac{1}{2}(x+y)^n - \frac{1}{2}(x-y)^n = Ax^{n-1}y + Cx^{n-3}y^3$
$+ Ex^{n-5}y^5 + Gx^{n-7}y^7 + \text{etc.}$

II. $\frac{1}{2}(x+y)^n + \frac{1}{2}(x-y)^n = x^n + Bx^{n-2}y^2$
$+ Dx^{n-4}y^4 + Fx^{n-6}y^6 + Hx^{n-8}y^8 + \text{etc.}$

Diese Formeln unterscheiden sich von denen für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ in (97.) nur in den Vorzeichen der Glieder mit geraden Stellenzahlen.

99. Es ist

I. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n - \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$
$= \sin n\varphi.\sqrt{-1}.$

II. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$
$= \cos n\varphi.$

Denn man setze in den Formeln (98.) statt y die unmögliche $y\sqrt{-1}$, so ist

für y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, etc.

zu setzen $-y^2$, $-y^3\sqrt{-1}$; $+y^4$, $+y^5\sqrt{-1}$, $-y^6$, etc. so daß je zwey — — und + + abwechseln. Dadurch wird der zweyte Theil in (98. I.) der Werth von $\sin n\varphi$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, der zweyte Theil in II. aber $\cos n\varphi$.

100. Es ist

III. $(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}$.

IV. $(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi . \sqrt{-1}$.

Diese Formeln folgen aus (99.) unmittelbar durch Addition und Subtraction.

101. Es ist

V. $\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$

$$= \sin\frac{m}{n}\varphi . \sqrt{-1}.$$

VI. $\frac{1}{2}\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$

$$= \cos\frac{m}{n}\varphi.$$

Denn $\cos m\varphi \pm \sin m\varphi . \sqrt{-1} = (\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^m$

$= (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}$. Aus den beiden Formeln in dieser Doppelformel wird durch Subtraction und Division erhalten,

$$2\sin m\varphi . \sqrt{-1} = (\cos n\varphi + \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}$$

$$- (\cos n\varphi - \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}},$$

$$2\cos m\varphi = (\cos n\varphi + \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}$$

$$+ (\cos n\varphi - \sin n\varphi)^{\frac{m}{n}}.$$

Setzt man $\varphi = \frac{\omega}{n}$, und vertauscht darauf das Symbol ω mit φ, so werden die Formeln V. VI. erhalten.

102. Es seyn A, B, C, D, &c. die Binomial-Coefficienten für den Exponenten $\frac{m}{n}$, so ist

VII. $\sin \frac{m}{n} \varphi = \mathfrak{A} \sin \varphi . \cos \varphi^{m:n-1}$

$- \mathfrak{C} \sin \varphi^3 . \cos \varphi^{m:n-3} + \mathfrak{E} \sin \varphi^5 . \cos \varphi^{m:n-5}$

$- \mathfrak{G} \sin \varphi^7 . \cos \varphi^{m:n-7} + \text{etc.}$

VIII. $\cos \frac{m}{n} = \cos \varphi^{m:n} - \mathfrak{B} \cos \varphi^{m:n-2} . \sin \varphi^2$

$+ \mathfrak{D} \cos \varphi^{m:n-4} . \sin \varphi^4 - \mathfrak{F} \cos \varphi^{m:n-6} . \sin \varphi^6$

$+ \text{etc.}$

Diese Formeln entstehen vermittelst Evolution der Wurzelgrößen in V. VI. und Addition der beiden in Reihen aufgelöseten Wurzeln, in den erstern Formeln noch durch Division beider Theile durch $\sqrt{-1}$.

103. Es ist $(\sqrt{(1+y^2)} + y)^n =$

$$1 + ny + \frac{nn}{1.2} y^2 + \frac{n.nn-1}{1.2.3} y^3$$

$$+ \frac{nn.nn-4}{1.2.3.4} y^4 + \frac{n.nn-1.nn-9}{1.2.3.4.5} y^5$$

$$+ \frac{nn.nn-4.nn-16}{1.2.3.4.5.6} y^6 + \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25}{1.2.3.4.5.6.7} y^7$$

$+ \text{etc.}$

und, wenn y negativ genommen wird,

$$(\sqrt{(1+y^2)} - y)^n = 1 - ny + \frac{nn}{1.2} y^2$$

$$- \frac{n.nn-1}{1.2.3} y^3 + \frac{nn.nn-4}{1.2.3.4} y^4$$

$$- \frac{n.nn-1.nn-9}{1.2.3.4.5} y^5 + \text{etc.}$$

Diese Formeln zu finden, setze man $\sqrt{(1+y^2)} = z$, und entwickele nach dem binomischen Lehrsatze, sowohl

$(z+y)$, als die Potenzen von $(1+yy)^{\frac{1}{2}}$, worauf man die Glieder, welche dieselbe Potenz von y enthalten, zusammen nimmt. Das Gesetz der Reihe ist offenbar, und wegen der bestimmten Formation, sowohl von $(z+y)^n$ als der Potenzen von $(1+yy)$ allgemein. Euler hat die Formel leichter, aber durch die Differentio-Differentialrechnung erwiesen, in den Institt. Calculi integr. T. I. §. 179.

104. Es ist

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n+\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}-y)^n$$
$$=1+\frac{nn}{1.2}y^2+\frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4}y^4$$
$$+\frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6}y^6+\text{etc.}$$

und

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}+y)^n-\tfrac{1}{2}(\sqrt{(1+y^2)}-y)^n$$
$$=\frac{n}{1}y+\frac{n.nn-1.}{1.2.3}y^3+\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}y^5$$
$$+\frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7}y^7+\text{etc.}$$

105. Setzt man $y=\sin\varphi.\sqrt{-1}$, so ist $\sqrt{(1+y^2)}=\cos\varphi$, und zufolge (99.),

$$\sin n\varphi=n\sin\varphi-\frac{n.nn-1.}{1.2.3}\sin\varphi^3$$
$$+\frac{n.nn-1.nn-9.}{1.2.3.4.5}\sin\varphi^5-\frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{1.2.3.4.5.6.7}\sin\varphi^7$$
$$+\text{etc.}$$

$$\cos n\varphi=1-\frac{nn}{1.2}\sin\varphi^2+\frac{nn.nn-4.}{1.2.3.4}\sin\varphi^4$$
$$-\frac{nn.nn-4.nn-16.}{1.2.3.4.5.6}\sin\varphi^6+\frac{nn...nn-36.}{1.2...7.8}\sin\varphi^8$$
$$-\text{etc.}$$

Diese Formeln sind allgemein für jeden Werth von n, da die Formeln in (99.) allgemein gültig sind. Die erstere bricht nur für ein ungerades n ab, die zweyte für ein gerades n.

106. Es sey der Sinusversus (Quersinus) von $\varphi = z$, so ist

$$\text{sin verf. } n\varphi = \frac{2nn}{1.2}z - \frac{4nn.nn-1.}{1.2.3.4}z^2$$

$$+ \frac{8nn.nn-1.nn-4.}{1.2.3.4.5.6}z^3 - \frac{16nn.nn-1.nn-4.nn-9.}{1.2.3.4.5.6.7.8}z^4$$

— etc.

Diese, wie es scheint, noch nicht bekannte Formel wird erhalten, wenn man den Sinusversus von φ, oder $1 - \cos\varphi$ in die Formel (97; 102.) für $\cos n\varphi$ einführt. Es ist $\cos\varphi = 1 - z$; $\sin\varphi^2 = 2z - zz$, und $\cos n\varphi = 1 - \text{sin verf. } n\varphi$. Die Rechnung, diese Formel zu finden ist etwas weitläufig; sie beruht inzwischen auf bloßen Multiplicationen und Aggregationen. Die Formel kann zur Berechnung der Sinus über 45° gut angewandt werden.

107. Es sey $2\cos\varphi = u + \frac{1}{u}$, so ist

$$2\cos n\varphi = u^n + \frac{1}{u^n}.$$

Denn man setze in der Formel III. 100.
$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, die Wurzel, $\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1} = u$, so ist

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1},$$

also $2\cos\varphi = u + \frac{1}{u}$. Da $u^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, so ist

$$\frac{1}{u^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}} = \cos n\varphi$$

$- \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, also ist $u^n + \frac{1}{u^n} = 2\cos n\varphi$.

108ª. Diese beiden Gleichungen sind einerley mit den beiden,

I. $u^2 - 2\cos\varphi . u + 1 = 0$,

II. $u^{2n} - 2\cos n\varphi . u^n + 1 = 0$.

In dem folgenden Abschnitte wird gezeigt, daß aus einem gegebenen Werthe von $\cos n\varphi$ erhalten werden n verschiedene Werthe von $\cos\varphi$. Jeder derselben kann in der erstern Gleichung für $\cos\varphi$ gesetzt werden, daher aus der gegebenen Gleichung II. n verschiedene Gleichungen wie I. folgen. Das Product dieser n Gleichungen enthält alle Arten, wie aus einem mittelst seines Cosinus gegebenen Winkel $n\varphi$ der Werth von u bestimmt werden kann. Die Gleichung II. enthält ebenfalls alle diese Arten; also ist diese Gleichung identisch mit jenem Producte, oder die Gleichung I. ist ein Factor von der Gleichung II. — Die Werthe von u sind alle unmögliche Größen, s. unten Abschnitt VIII.

Zu vergleichen ist in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, der VII. Abschnitt, und der Artikel, Cotesischer Lehrsatz.

108ᵇ. Wenn man aus der Gleichung, $2x = u + \frac{1}{u}$ successiv die Werthe von $u^2 + \frac{1}{u^2}$; von $u^3 + \frac{1}{u^3}$; von $u^4 + \frac{1}{u^4}$, u. s. f. herleitet, so erhält man nach der Reihe die Werthe von $2\cos 2\varphi$; $2\cos 3\varphi$; $2\cos 4\varphi$, u. s. f. in (93.).

Nämlich, da

I. $2x = u + \frac{1}{u}$, so ist

$4x^2 = u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}$, alſo

II. $4x^2 - 2 = u^2 + \frac{1}{u^2} = 2\cos 2\varphi$.

Hieraus iſt

$8x^3 - 4x = u^3 + u + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}$, oder

III. $8x^3 - 6x = u^3 + \frac{1}{u^3} = 2\cos 3\varphi$.

Hieraus ferner

$16x^4 - 12x^2 = u^4 + u^2 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}$, oder

IV. $16x^4 - 16x^2 + 2 = u^4 + \frac{1}{u^4} = 2\cos 4\varphi$.

u. ſ. f.

Es iſt allgemein $\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right) = u^{n+1} + u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}} + \frac{1}{u^{n+1}}$, ſo wie $2\cos n\varphi \times 2\cos\varphi = 2\cos(n+1)\varphi + 2\cos(n-1)\varphi$ iſt.

108°. Gleichfalls iſt $u - \frac{1}{u} = 2\sin\varphi . \sqrt{-1}$, und $u^n - \frac{1}{u^n} = 2\sin n\varphi\sqrt{-1}$. Aus der erſtern Gleichung werden vermittelſt der Formel, $2x = u + \frac{1}{u}$ ſucceſſiv die Werthe von $u^2 - \frac{1}{u^2}$, von $u^3 - \frac{1}{u^3}$, von $u^4 - \frac{1}{u^4}$, u. ſ. f. hergeleitet, woraus dieſelben Werthe von $2\sin 2\varphi$, $2\sin 3\varphi$, $2\sin 4\varphi$, u. ſ. f. folgen, wie in (92.).

Nämlich da

I. $2y\sqrt{-1} = u - u^{-1}$, und

$2x = u + u^{-1}$, so ist

II. $4xy\sqrt{-1} = u^2 - u^{-2}$, das ist

$4xy\sqrt{-1} = 2 \sin 2\varphi . \sqrt{-1}$,

oder $2xy = \sin 2\varphi$.

Aus II. ist durch die Multiplication mit $2x = u + u^{-1}$,

$8x^2y\sqrt{-1} = u^3 + u - u^{-1} - u^{-3}$, das ist

III. $8x^2y\sqrt{-1} - 2y\sqrt{-1} = 2 \sin 3\varphi . \sqrt{-1}$,

oder $4x^2y - y = \sin 3\varphi$.

u. s. f.

Es ist allgemein $(u^n - u^{-n})(u + u^{-1}) = u^{n+1} + u^{n-1} - u^{-n+1} - u^{-n-1} = 2 \sin(n+1)\varphi . \sqrt{-1} + 2 \sin(n-1)\varphi . \sqrt{-1}$, eben so wie $2 \sin n\varphi . 2 \cos\varphi = 2 \sin(n+1)\varphi + 2 \sin(n-1)\varphi$.

Formeln für die Tangenten der Vielfachen eines Winkels, und der aus ungleichen Winkeln zusammengesetzten Winkel.

109. Aus den beiden Formeln (97. 102.) für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ folgt, mit Anwendung der Zeichen für die Binomial-Coefficienten in der nten Potenz, durch die Division,

$$\text{tang } n\varphi = \frac{\mathfrak{A}\,\text{tg}\varphi - \mathfrak{C}\,\text{tg}\varphi^3 + \mathfrak{E}\,\text{tg}\varphi^5 - \mathfrak{G}\,\text{tg}\varphi^7 + \text{etc.}}{1 - \mathfrak{B}\,\text{tg}\varphi^2 + \mathfrak{D}\,\text{tg}\varphi^4 - \mathfrak{F}\,\text{tg}\varphi^6 + \text{etc.}}$$

Es sind Zähler und Nenner durch $\cos\varphi^n$ dividirt, und für $\frac{\sin}{\cos}$ ist tang gesetzt.

110. Man ſetze tang $\varphi = t$, ſo iſt

$$\text{tang } \varphi = t$$

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\text{tang } 3\varphi = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

$$\text{tang } 4\varphi = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$$

$$\text{tang } 5\varphi = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}$$

etc.

111. Es ſey irgend eine Anzahl Winkel, α, β, γ, δ, ε, etc. gegeben; ihre Tangenten ſeyn a, b, c, d, e, etc. Die Summe dieſer Tangenten, als Unionen, ſey A; die Summe ihrer Binionen B; ihrer Ternionen C; ihrer Quaternionen D; ihrer Quinionen E, u. ſ. f.; ſämtlich ohne Wiederholungen. Es iſt

$$\text{tang } (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc.}) = \frac{A-C+E-G+\text{etc.}}{1-B+D-F+H-\text{etc.}}$$

Denn tang $(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{1-ab}$, (33.). Dieſe nenne man p, ſo iſt

$$\text{tang } (\alpha+\beta+\gamma) = \frac{p+c}{1-pc} = \frac{(1-ab)p+(1-ab)c}{1-ab-(1-ab)pc} = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}.$$

Gebraucht man für die drey Größen a, b, c, die angegebenen Bezeichnungen ihrer Combinationen, ſo iſt tang $(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{A-C}{1-B}$.

Es sey $\frac{A-C}{1-B} = q$, so ist tang $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$$= \frac{q+d}{1-qd} = \frac{(1-B)q+(1-B)d}{1-B-(1-B)qd}$$

$$= \frac{A-C+d-Bd}{1-B-Ad-Cd}.$$

Hier ist A + d die Summe der Unionen, a, b, c, d; B + Ad die Summe der Binionen, nämlich B derer ohne d, und Ad derer mit d. Gleichfalls ist C + Bd die Summe der Ternionen, nämlich C derer ohne d, und Bd derer mit d. Endlich ist Cd die einzige Quaternion. Erstreckt man nun die Bezeichnungen, A, B, C, D, auf alle vier Größen, a . . d, so ist

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{A-C}{1-B+D}.$$

Es sey

$$\frac{A-C}{1-B+D} = r, \text{ so ist tang } (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon),$$

$$= \frac{r+e}{1-re} = \frac{A-C+(1-B+D)e}{1-B+D-(A-C)e}.$$

Hier ist A + e die Summe der Unionen a . . . e; B + Ae der Binionen; C + Be der Ternionen; D + Ce der Quaternionen; De die Quinion. Bezeichnet man diese Combinationen aus allen fünf Größen durch A, B, C, D, E, so ist

$$\text{tang}(\alpha\ldots+\varepsilon) = \frac{A-C+E}{1-B+D}.$$

Hieraus erhellt das Gesetz der Fortschreitung hinlänglich.

112. Sind alle die einzelnen Winkel sich gleich, jeder $= \varphi$, so sind die einzelnen Unionen $= t$, Binionen $= t^2$, Ternionen $= t^3$, u. s. f. Die Mengen derselben nach ihrer Folge sind die Binomial-Coefficienten für den Exponenten n, wenn $n\varphi$ der vielfache Winkel ist.

Joh. Bernoulli hat diese Sätze gefunden. Operum T. II. nr. CXXVII.

113. Aus (99.) ist, wenn tang $\varphi = t$ gesetzt wird,

$$\text{tang } n\varphi . \sqrt{-1} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n + (1-t\sqrt{-1})^n}.$$

Von einer solchen, etwas verschiedenen Formel kam Bernoulli zuerst auf den Satz in (109.) Opp. T. I. nr. LXXXIX. Er hat ihn aber noch etwas unbequem ausgedruckt. Für gerade Vielfache ist eine Unrichtigkeit, da nach seiner Regel die Tangente negativ wird.

Wie sich die gebrochene Function für tang $n\varphi$ auf eine rationale ganze bringen, und von dieser das allgemeine mte Glied in einer brauchbaren combinatorisch-analytischen, nach Potenzen von n geordneten Formel, mit Beyhülfe der Bernoullischen Zahlen darstellen lasse, hat Professor Hindenburg (Leipz. Mag. der Math. S. 270; vergl. Arch. der Math. H. VII. S. 343. 344.) gezeigt.

V. Wie viele verschiedene Werthe der Sinus und Cosinus des aliquoten Theils eines Winkels erhalten, wenn der Winkel durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben wird.

114. Ein Winkel der durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben wird, hat unendlich viele Werthe, (16.17.). Soll derselbe in n gleiche Theile getheilt werden, so ist jeder seiner Werthe in n gleiche Theile zu theilen. Daraus entstehen inzwischen nicht unendlich viele Sinus und Cosinus der aliquoten Theile, weil wiederum derselbe Sinus und Cosinus eines solchen Theils zu unendlich vielen Winkeln gehört.

115. Es seyn alle verschiedene Sinus des nten Theils der zu dem Sinus a gehörigen Winkel anzugeben: der kleinste dieser Winkel sey $= \omega$. Die Anzahl der Theile sey ungerade, so sind alle folgende Winkel in n Theile zu theilen,

Es sey $\frac{A-C}{1-B} = q$, so ist tang $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$$= \frac{q+d}{1-qd} = \frac{(1-B)q+(1-B)d}{1-B-(1-B)qd}$$

$$= \frac{A-C+d-Bd}{1-B-Ad-Cd}.$$

Hier ist A + d die Summe der Unionen, a, b, c, d; B + Ad die Summe der Binionen, nämlich B derer ohne d, und Ad derer mit d. Gleichfalls ist C + Bd die Summe der Ternionen, nämlich C derer ohne d, und Bd derer mit d. Endlich ist Cd die einzige Quaternion. Erstreckt man nun die Bezeichnungen, A, B, C, D, auf alle vier Größen, a . . d, so ist

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{A-C}{1-B+D}.$$

Es sey

$$\frac{A-C}{1-B+D} = r, \text{ so ist tang } (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon),$$

$$= \frac{r+e}{1-re} = \frac{A-C+(1-B+D)e}{1-B+D-(A-C)e}.$$

Hier ist A + e die Summe der Unionen a...e; B + Ae der Binionen; C + Be der Ternionen; D + Ce der Quaternionen; De die Quinion. Bezeichnet man diese Combinationen aus allen fünf Größen durch A, B, C, D, E, so ist

$$\text{tang}(\alpha\ldots+\varepsilon) = \frac{A-C+E}{1-B+D}.$$

Hieraus erhellt das Gesetz der Fortschreitung hinlänglich.

112. Sind alle die einzelnen Winkel sich gleich, jeder $= \varphi$, so sind die einzelnen Unionen $= t$, Binionen $= t^2$, Ternionen $= t^3$, u. s. f. Die Mengen derselben nach ihrer Folge sind die Binomial-Coefficienten für den Exponenten n, wenn $n\varphi$ der vielfache Winkel ist.

Joh. Bernoulli hat diese Sätze gefunden. Operum T. II. nr. CXXVII.

113. Aus (99.) ist, wenn tang $\varphi = t$ gesetzt wird,

$$\text{tang } n\varphi . \sqrt{-1} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n + (1-t\sqrt{-1})^n}.$$

Von einer solchen, etwas verschiedenen Formel kam Bernoulli zuerst auf den Satz in (109.) Opp. T. I. nr. LXXXIX. Er hat ihn aber noch etwas unbequem ausgedruckt. Für gerade Vielfache ist eine Unrichtigkeit, da nach seiner Regel die Tangente negativ wird.

Wie sich die gebrochene Function für tang $n\varphi$ auf eine rationale ganze bringen, und von dieser das allgemeine mte Glied in einer brauchbaren combinatorisch-analytischen, nach Potenzen von n geordneten Formel, mit Beyhülfe der Bernoullischen Zahlen darstellen lasse, hat Professor Hindenburg (Leipz. Mag. der Math. S. 270; vergl. Arch. der Math. H. VII. S. 343. 344.) gezeigt.

V. Wie viele verschiedene Werthe der Sinus und Cosinus des aliquoten Theils eines Winkels erhalten, wenn der Winkel durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben wird.

114. Ein Winkel der durch seinen Sinus oder Cosinus gegeben wird, hat unendlich viele Werthe, (16.17.). Soll derselbe in n gleiche Theile getheilt werden, so ist jeder seiner Werthe in n gleiche Theile zu theilen. Daraus entstehen inzwischen nicht unendlich viele Sinus und Cosinus der aliquoten Theile, weil wiederum derselbe Sinus und Cosinus eines solchen Theils zu unendlich vielen Winkeln gehört.

115. Es seyn alle verschiedene Sinus des nten Theils der zu dem Sinus a gehörigen Winkel anzugeben: der kleinste dieser Winkel sey $= \omega$. Die Anzahl der Theile sey ungerade, so sind alle folgende Winkel in n Theile zu theilen,

I. $\omega, \pi - \omega, 2\pi + \omega, 3\pi - \omega \ldots (n-1)\pi + \omega$; $n\pi - \omega$.

II. $(n+1)\pi + \omega \ldots (2n-2)\pi + \omega, (2n-1)\pi - \omega$.

III. $2n\pi + \omega \ldots \ldots 3n\pi - \omega$.

IV. $(3n+1)\pi + \omega \ldots \ldots (4n-1)\pi - \omega$.

u. s. f.

Die Sinus des nten Theils jedes Winkels in der dritten und jeder folgenden Classe kommen unter den Sinus des nten Theils der beiden ersten Classen vor. In der ersten Classe sind die Sinus des nten Theils derer Winkel, die vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, einander gleich und gleichnamig, da die Summe eines solchen Paars in I. $= n\pi$, und der nte Theil der Summe zweyer solchen Winkel $= \pi$ ist. In der zweyten Classe ist die Summe je zweyer Winkel, die vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, $= 3n\pi$, und der nte Theil der Summe zweyer solcher Winkel $= 3\pi$. Die Sinus dieser Theile sind daher auch einander gleich und gleichnamig. Nämlich zwey Winkel wie $\pi + \alpha$ und $2\pi - \alpha$, haben einerley Sinus. Der nte Theil der Winkel in I. ist kleiner als zwey Rechte, in II. aber größer als zwey und kleiner als vier Rechte. Daher sind die Sinus des nten Theils von Ang sin ω in I. positiv, in II. negativ.

Die erste Classe liefert $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Sinus, die zweyte $\frac{n-1}{2}$ Sinus.

116. Folglich sind die Werthe von

$\sin \frac{1}{n}$ Ang. sin a, für ein ungerades n, folgende:

I. $\sin \frac{\omega}{n}$; $\sin \frac{2\pi + \omega}{n}$; $\sin \frac{4\pi + \omega}{n}$ . . . .

. . . . $\sin \frac{(n-1)\pi + \omega}{n}$;

II. $\sin\frac{(n+1)\pi+\omega}{n}$ ....$\sin\frac{(2n-2)\pi+\omega}{n}$.

Nimmt man von den ſtumpfen Winkeln ihre Nebenwinkel, von den letzten zuerſt, und ſtatt der Winkel über zwey Rechte ihre Überſchüſſe über zwey Rechte, wogegen aber der Sinus negativ genommen wird, ſo ſind jene Werthe,

$$+\sin\frac{\omega}{n};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{n};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{n};$$

$$+\sin\frac{3\pi-\omega}{n};\ldots.+\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\,\pi\mp\omega}{n};$$

$$+\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\,\pi\pm\omega}{n};\quad -\sin\frac{\pi+\omega}{n};$$

$$-\sin\frac{2\pi-\omega}{2};\ -\sin\frac{3\pi+\omega}{n}\ldots\ldots$$

$$-\sin\frac{\frac{1}{2}(n-3)\,\pi\pm\omega}{n};\ -\sin\frac{\frac{1}{2}(n-1)\,\pi\mp\omega}{n}.$$

Das obere Vorzeichen von ω gilt für einen geraden Werth von $\frac{1}{2}(n-1)$; das untere für einen ungeraden.

117. Exempel. Es ſey $A = \text{Ang. sin } a$, und ω der kleinſte Werth von A, ſo ſind die verſchiedenen Werthe von

$$\sin\frac{A}{3}\ldots+\sin\frac{\omega}{3};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{3};\ -\sin\frac{\pi+\omega}{3}$$

$$\sin\frac{A}{5}\ldots+\sin\frac{\omega}{5};\ +\sin\frac{\pi-\omega}{5};\ +\sin\frac{2\pi+\omega}{5}$$

$$-\sin\frac{\pi+\omega}{5};\ -\sin\frac{2\pi-\omega}{5}$$

$$\sin\frac{A}{7}, \ldots + \sin\frac{\omega}{7}; + \sin\frac{\pi-\omega}{7}; + \sin\frac{2\pi+\omega}{7} + \sin\frac{3\pi-\omega}{7} - \sin\frac{\pi+\omega}{7}; - \sin\frac{2\pi-\omega}{7}; - \sin\frac{3\pi+\omega}{7}$$

118. Der Winkel zu dem Sinus a sey in eine gerade Anzahl gleicher Theile, n, zu theilen, und ω sey der kleinste unter den zu dem Sinus a gehörigen Winkeln. Die beiden ersten Classen der zu theilenden Winkel sind nun folgende.

I. $\omega, \pi-\omega, 2\pi+\omega; 3\pi-\omega \ldots (n-1)\pi-\omega;$

II. $n\pi+\omega, (n+1)\pi-\omega \ldots\ldots (2n-1)\pi-\omega.$

Die übrigen Classen liefern keine Winkel, deren nter Theil einen Sinus hätte, welcher nicht schon dem nten Theile eines der Winkel in I. und II. angehörte. Die Sinus des nten Theils derer Winkel, welche in beiden Classen gleich weit vom Anfange abstehen, sind sich gleich aber entgegengesetzt, weil ihre Winkel um π oder zwey Rechte unterschieden sind. Die Sinus des nten Theils jedes der Winkel in jeder der beiden Classen sind alle von einander verschieden. Die Theilung des Winkels zum $\sin a$ in eine gerade Anzahl Theile, n, giebt also n Paare gleicher und entgegengesetzter Sinus des nten Theils;

$$\pm\sin\frac{\omega}{n}; \pm\sin\frac{\pi-\omega}{n}; \pm\sin\frac{2\pi+\omega}{n} \ldots$$

$$\ldots \pm\sin\frac{(\frac{1}{2}n-1)\pi\mp\omega}{n}; \pm\sin\frac{\frac{1}{2}n\pi\pm\omega}{n}; \ldots$$

$$\ldots \pm\sin\frac{(n-2)\pi+\omega}{n}; \pm\sin\frac{(n-1)\pi-\omega}{n}$$

119. Oder es sind für ein gerades n die Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang. $\sin \omega$ folgende.

$$\pm \sin \frac{\omega}{n}; \pm \sin \frac{\pi - \omega}{n}; \pm \sin \frac{\pi + \omega}{n}; \pm \sin \frac{2\pi - \omega}{n}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi + \omega}{n}; \pm \sin \frac{3\pi - \omega}{n}; \pm \sin \frac{3\pi + \omega}{n} \ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \sin \frac{\frac{1}{2}n\pi - \omega}{n},$$

indem anstatt der Winkel in der zweyten Hälfte, weil es stumpfe sind, ihre Nebenwinkel genommen sind, die an der gehörigen Stelle zwischen die Winkel der erstern Hälfte gesetzt worden.

120. Exempel. Es sey A = Ang. $\sin a$ und ω der kleinste Werth von A, so sind die verschiedenen Werthe von

$$\sin \frac{A}{2} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{2}; \pm \sin \frac{\pi - \omega}{2}.$$

$$\sin \frac{A}{4} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{4}; \pm \sin \frac{\pi - \omega}{4}; \pm \sin \frac{\pi + \omega}{4}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi - \omega}{4};$$

$$\sin \frac{A}{6} \ldots \pm \sin \frac{\omega}{6}; \pm \sin \frac{\pi - \omega}{6}; \pm \sin \frac{\pi + \omega}{6}$$

$$\pm \sin \frac{2\pi - \omega}{6}; \pm \sin \frac{2\pi + \omega}{6}; \pm \sin \frac{3\pi - \omega}{6}.$$

121. Die hier gefundenen Werthe von $\sin \frac{1}{n}$ Ang. $\sin a$ sind die Wurzeln der Gleichungen in (86. und 89.), wo y der Sinus des einfachen, und

$\sin n\varphi$ der Sinus des vielfachen ist. Es ist daselbst $n\varphi$ was hier ω ist, also φ was hier $\frac{1}{n}\omega$ ist. Die Gleichung in (86.) für ein ungerades Vielfaches von φ steigt auf den nten Grad, daher der Sinus des nten Theils eines durch seinen Sinus gegebenen Winkels n Werthe hat, wie hier gefunden ist. Werden alle Glieder auf eine Seite gebracht, so daß y^n das Vorzeichen + hat, und werden die fehlenden Glieder durch ± 0 ersetzt, so hat die Gleichung $\frac{1}{2}(n+1)$ Abwechslungen und $\frac{1}{2}(n-1)$ gleichnamige Folgen der Vorzeichen, daher $\frac{1}{2}(n+1)$ positive Wurzeln, und $\frac{1}{2}(n-1)$ negative, indem hier alle Wurzeln möglich sind, (Gleichung 146.)

Weil das Glied mit der Potenz y^{n-1} fehlt, so ist die Summe der Wurzeln $= 0$, oder die Summe der Sinus in (114.) ist $= 0$.

Wenn die allgemeine Gleichung (86.) durch 2^{n-1} dividirt wird, so ist in der Gleichung, $y^n \ldots \pm\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}} = 0$, das gegebene Glied das Product aus allen, den Wurzeln entgegengesetzten Größen, oder von den entgegengesetzten der Sinus in (116.), wenn $n\varphi = \omega$ ist. Das obere Vorzeichen gilt für $n = 4m-1$, das untere für $n = 4m+1$. In jenem Falle ist die Anzahl der positiven Wurzeln $= 2m$, der negativen $= 2m-1$; in dem zweyten ist jene Anzahl $= 2m+1$, die andere $= 2m$. Daher ist in dem erstern Falle das Product der Sinus $= -\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$, in dem andern $= +\frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$.

Bringt man die Gleichung (86.) auf die Form, $\sin n\varphi - ny \ldots \pm 2^{n-1}y^n = 0$, und dividirt darauf alle Glieder durch $\sin n\varphi$, so ist der Coefficient von y, die Summe von den entgegengesetzten der reciproken Wurzeln, oder $\frac{n}{\sin n\varphi}$ ist die Summe der reciproken Wur-

zeln (zufolge Gleichung, 212.). Oder, nach dem y^n den Coefficienten + 1 durch die Division der ganzen Gleichung mit 2^{n-1} erhalten hat, ist der Coefficient von y^r das Aggregat aller Combinationen der den Wurzeln entgegengesetzten Größen nach $(n - 1)$, und das gegebene Glied, auf derselben Seite der Gleichung, das Product aller dieser Größen. Jener durch dieses dividirt ist das Aggregat von den reciproken dieser Größen. Folglich ist

$$\frac{n}{\sin n\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\varphi\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}+\varphi\right)} \ldots\ldots \ldots\ldots \frac{1}{\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\varphi\right)}.$$

Da die Cosecante das reciproke des Sinus ist (14), so ist

$$n\,\mathrm{cosec}\,n\varphi = \mathrm{cosec}\,\varphi + \mathrm{cosec}\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right) + \mathrm{cosec}\left(\frac{4\pi}{n}+\varphi\right) \ldots + \mathrm{cosec}\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\varphi\right).$$

Die Winkel über einen Rechten werden wie in (116.) in spitze verwandelt, mit gehöriger Veränderung des Vorzeichens, wo es nöthig ist.

122. Exempel. Es sey $A = \mathrm{Ang.\,sin}\,\frac{1}{2}$, und A soll in 5 gleiche Theile getheilt werden, so sind die Sinus dieses fünften Theils folgende:

+ sin 6°; + sin 30°; + sin 78°; — sin 42°; — sin 66°, nämlich

+ 0,1045285	— 0,6691306
+ 0,5000000	— 0,9135454
+ 0,9781476	— 1,5825760
+ 1,5826761	

Die Sinus sind die Wurzeln der Gleichung

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - 0{,}5 = 0.$$

Ihre Summe ist wegen des fehlenden zweyten Gliedes $= 0$, wie eben gefunden ist. Ihr Product ist $= \frac{0{,}5}{16} = \frac{1}{32}$. Es ist

1 sin 6°	= 9,0192346 — 10
1 sin 36°	= 9,6989700 — 10
1 sin 78°	= 9,9904044 — 10
1 sin 42°	= 9,8255109 — 10
1 sin 66°	= 9,9607302 — 10
	8,4948501 — 10
Complement	1,5051499 = log 32.

Die Cosecanten dieser Winkel sind

+ 9,5667722	— 1,4944765
+ 2,0000000	— 1,0946363
+ 1,0223406	— 2,5891128
+ 12,5891128	

Das Aggregat ist $= + 10 = \frac{5}{0{,}5}$, als dem Werthe von $\frac{n}{\sin n\varphi}$ für $n = 5$, und $n\varphi = 30°$.

123. Die $2n$ verschiedenen Werthe von $\sin\frac{1}{n}\text{Ang}\sin a$ für ein geraades n in (119.) sind die n Paare der gleichen und entgegengesetzten Wurzeln y

in der Gleichung (89.), wenn sie auf beiden Seiten quadrirt ist, um die Irrationalität wegen des Factors $\sqrt{(1-yy)}$ zu heben. Alsdann sind in derselben bloß die geraden Potenzen von y vorhanden, und die höchste Potenz ist y^{2n}. Sie hat also 2n Wurzeln, welche n Paare gleicher entgegengesetzter geben, wodurch die Summe aller $= 0$ ist, wie das zweyte Glied der Gleichung. Das Product aller Wurzeln ist $= \frac{\sin n\varphi^2}{2^{2n-2}}$, also das Product der positiven oder der negativen für sich allein genommen $= \frac{\sin n\varphi}{2^{n-1}}$, wie für ein gerades n in (121.), was die absolute Größe betrifft.

124. Wenn ein Winkel, der durch seinen Cosinus gegeben ist, in gleiche Theile getheilt werden soll, und der kleinste zu demselben gehörige Winkel durch ω bezeichnet wird, so sind alle Winkel, die mit diesem ein gerades Vielfaches von π (zwey Rechten) ausmachen, oder von ihm um ein solches unterschieden sind, in n gleiche Theile zu theilen, zufolge 17; also die Winkel,

I. $\omega; 2\pi - \omega; 2\pi + \omega; 4\pi - \omega; 4\pi + \omega;$
$\ldots (2n-2)\pi + \omega; 2n\pi - \omega;$

II. $2n\pi + \omega; (2n\pi + 2)\pi - \omega; \ldots 4n\pi - \omega;$

III. $4n\pi + \omega \ldots\ldots 6n\pi - \omega;$

u. s. f.

Die zweyte Classe nebst allen folgenden giebt bey der Theilung keine Cosinus, die nicht schon aus der ersten Classe entstehen. In dieser Classe, welche 2n Winkel enthält, sind die Cosinus des nten Theils derer Winkel, welche vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, einander gleich und gleichnamig. Nimmt man die Winkel wechselsweise einen um den andern, so sind die verschiede-

nen Werthe von $\cos \frac{1}{n}$ Ang. $\cos a$ folgende, wenn ω der kleinste zu $\cos a$ gehörige Winkel ist.

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{6\pi+\omega}{n};$$

$$\ldots\ \cos\frac{(2n-4)\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{(2n-2)\pi+\omega}{n},$$

deren Anzahl n ist.

125. Nimmt man aus der ersten Classe die ersten n Winkel, so sind die verschiedenen Werthe von $\cos \frac{1}{n}$ Ang. $\cos a$, für ein ungerades n folgende,

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi-\omega}{n};$$

$$\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\ldots\ldots\cos\frac{(n-1)\pi-\omega}{n};\ \cos\frac{(n-1)\pi+\omega}{n}.$$

In dieser Reihe sind die Winkel von $\frac{(n+1)\cdot\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ oder von $\frac{(n+3)\cdot\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ an größer als $\frac{1}{2}\pi$ oder als ein Rechter, also sind ihre Cosinus negativ. Nimmt man ihre Nebenwinkel, von dem letzten zuerst, und setzt den Cosinus das Zeichen — vor, so sind die verschiedenen Werthe der Cosinus,

$$+\cos\frac{\omega}{n};\ -\cos\frac{\pi-\omega}{n};\ -\cos\frac{\pi+\omega}{n};\ +\cos\frac{2\pi-\omega}{n};$$

$$+\cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ -\cos\frac{3\pi-\omega}{n};\ -\cos\frac{3\pi+\omega}{n};$$

$$\ldots,\ \pm\cos\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{\frac{1}{2}(n-1)\pi+\omega}{n},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, oder $n-1$ durch 4 theilbar ist.

126. Für ein gerades n ist die Reihe der verschiedenen Cosinus,

$$\cos\frac{\omega}{n};\ \cos\frac{2\pi-\omega}{n},\ \cos\frac{2\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{4\pi-\omega}{n};$$

$$\cos\frac{4\pi+\omega}{n}\ldots,\ \cos\frac{(n-2)\pi+\omega}{n};\ \cos\frac{n\pi-\omega}{n},$$

In dieser sind die Winkel von $\frac{n.\frac{1}{2}\pi+\omega}{n}$, oder von $\frac{(n+2).\frac{1}{2}\pi-\omega}{n}$ an größer als $\frac{1}{2}\pi$, also ihre Cosinus negativ. Die Winkel der Cosinus, welche vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, machen die Summe π oder von zwey Rechten; daher sind ihre Cosinus gleich und entgegengesetzt. Die Folge der Cosinus ist

$$\pm\cos\frac{\omega}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{2\pi+\omega}{n};$$

$$\pm\cos\frac{4\pi-\omega}{n};\ \pm\cos\frac{4\pi+\omega}{n};\ \text{etc.}$$

bis $\frac{1}{2}n$ Paare Cosinus genommen sind.

127. Exempel. Es sey $A = \text{Ang.cos}\,a$, und ω der kleinste Werth von $\frac{1}{n}A$, so sind die Werthe von

$$\cos\tfrac{1}{2}A\ldots\ldots\pm\cos\frac{\omega}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{3}A\ldots\ldots+\cos\frac{\omega}{3};\ -\cos\frac{\pi-\omega}{3};\ -\cos\frac{\pi+\omega}{3},$$

$$\cos\tfrac{1}{4}A\ldots\ldots\pm\cos\frac{\omega}{4};\ \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{4},$$

$$\cos\tfrac{1}{5}A \ldots + \cos\frac{\omega}{5}; -\cos\frac{\pi-\omega}{5}; -\cos\frac{\pi+\omega}{5};$$
$$+\cos\frac{2\pi-\omega}{5}; +\cos\frac{2\pi+\omega}{5}.$$

$$\cos\tfrac{1}{6}A \ldots \pm\cos\frac{\omega}{6}; \pm\cos\frac{2\pi-\omega}{6}; \pm\cos\frac{2\pi+\omega}{6}.$$

$$\cos\tfrac{1}{7}A \ldots + \cos\frac{\omega}{7}; -\cos\frac{\pi-\omega}{7}; -\cos\frac{\pi+\omega}{7};$$
$$+\cos\frac{2\pi-\omega}{7}; +\cos\frac{2\pi+\omega}{7}; -\cos\frac{3\pi-\omega}{7};$$
$$-\cos\frac{3\pi+\omega}{7}.$$

u. s. f.

128. Die Cosinus von $\frac{1}{n}$ Ang. cos a sind die Wurzeln der Gleichung in (93.), wenn $\cos a = \cos n\varphi$ daselbst ist, oder $\omega = n\varphi$. Für ein ungerades n von der Form $4m - 1$ haben die Vorzeichen (nachdem der $\cos n\varphi$ auf dieselbe Seite mit den andern Gliedern gebracht ist, und die fehlenden Glieder durch ± 0 ersetzt worden) eine gleichnamige Folge mehr als Abwechslungen, also eine negative Wurzel mehr als positive; hingegen für ein n von der Form $4m + 1$ ist eine Abwechslung mehr als gleichnamige Folgen, daher eine positive Wurzel mehr als negative. Eben das ergiebt sich aus den Werthen der Cosinus mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen in (127.) Die Gleichungen für ein gerades n haben $\frac{1}{2}n$ Paare gleicher und entgegengesetzter Wurzeln, übereinstimmig mit dem, was für die Cosinus bey der Theilung durch ein gerades n gefunden ist.

Die Summe der Cosinus von $\frac{1}{n}$ Ang. cos a ist $= 0$, entweder weil sie sich paarweise oder im ganzen auf-

heben. Das letzte erhellt daher, weil das zweyte Glied in den Gleichungen (93.) fehlt.

Für ein ungerades n ist in (93.) das gegebene Glied der allgemeinen Gleichung $= -\cos n\varphi$, nachdem es zu den übrigen auf dieselbe Seite gebracht ist. Dividirt man alle Glieder durch 2^{n-1}, so ist $-\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$ das Product aller den Wurzeln der Gleichung entgegengesetzten Größen. Da die Anzahl der negativen Wurzeln gerade ist, so ist, für ein ungerades n, das Product der Cosinus des nten Theils von Ang. $\cos n\varphi = +\frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}$.

Für $n = 4m$ ist das Product der Cosinus von $\frac{1}{n}$ Ang. $\cos n\varphi = \frac{1-\cos n\varphi}{2^{n-1}} = \frac{\sin \frac{1}{2} n\varphi^2}{2^{n-2}}$; für $n = 4m+2$ ist das Product $= -\frac{1+\cos n\varphi}{2^{n-1}}$ $= -\frac{\cos \frac{1}{2} n\varphi^2}{2^{n-2}}$.

Für ein ungerades n werde die Gleichung in (93.) auf die Form, $\cos n\varphi \mp nx \ldots - 2^{n-1} x^n = 0$, gebracht, und darauf durch $\cos n\varphi$ dividirt, so ist $\mp\frac{n}{\cos n\varphi}$ die Summe von den entgegengesetzten der reciproken Wurzeln, oder $\pm\frac{n}{\cos n\varphi}$ ist die Summe von den reciproken Cosinus des nten Theils von Ang. $\cos n\varphi$. Das obere Vorzeichen gilt für $n = 4m-1$. So ist

$$\pm\frac{n}{\cos n\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\varphi\right)} + \text{etc.}$$

oder, wenn man für die reciproken Cosinus die Secanten setzt, da $\frac{1}{\cos A} = \sec A$ ist,

$$\pm n \sec n\varphi = \sec \varphi + \sec\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{4\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{6\pi}{n} + \varphi\right) + \text{etc.}$$

oder

$$\pm n \sec n\varphi = \sec\varphi - \sec\left(\frac{\pi}{n} - \varphi\right) - \sec\left(\frac{\pi}{n} + \varphi\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{n} + \varphi\right) - \text{etc.}$$

bis n Secanten genommen sind.

Exempel. Für $n\varphi$ oder $\omega = \text{Ang. sin } \frac{1}{2}$ und $n = 5$, ist

sec 6°	= 1,0055083	sec. 30°	= 1,1547005
sec. 66°	= 2,4585933	sec. 42°	= 1,3456327
sec. 78°	= 4,8097843		= 2,5003332
	+ 8,2738359		
	− 2,5003332		
	+ 5,7735027		

Dieser Unterschied ist = 5 sec. 30°, bis auf 2 in der letzten Stelle.

VI. Chorden der Vielfachen eines Kreisbogens durch die Chorde des einfachen.

129. In dem Halbkreise ADB (Fig. 60.), dessen Mittelpunct C ist, ist $\frac{AD}{AB} = \sin ABD = \sin \frac{1}{2} ACD$. Man setze $ACD = \omega$, $AB = 2r$, $AD = u$, so ist $\frac{u}{2r} = \sin \frac{1}{2}\omega$, oder $\frac{ch.\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2}\omega$. Eben so ist $\frac{ch.n\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2}n\omega$.

Die Chorde des Complements des Bogens AD zum Halbkreise, oder die Chorde BD sey $= v$, so ist $\frac{v}{2r} = \cos \frac{1}{2}\omega$, oder $\frac{chc.\omega}{2r} = \cos \frac{1}{2}\omega$, und eben so $\frac{chc.n\omega}{2r} = \cos \frac{1}{2}n\omega$.

129*. In den Formeln (84, 86, 89.) setze man $\varphi = \frac{1}{2}\omega$, so erhält man mittelst der Vertauschungen der Chorden mit den Sinus, wenn alle Glieder mit $2r$ multiplicirt werden,

$$ch.n\omega = \frac{chc.\omega}{r} \times ch.(n-1)\omega - ch.(n-2)\omega,$$

und

$$ch.n\omega = \left(2 - \frac{ch.\omega^2}{rr}\right) ch.(n-2)\omega - ch.(n-4)\omega.$$

In der letzten Formel ist n sowohl statt $2n+1$ als $2n$ in (86, 89.) gesetzt.

130. Man setze $r = 1$, so verwandeln sich die allgemeinen Formeln daselbst, da $y = \frac{u}{2r}$, und $x = \frac{v}{2r}$ ist, in folgende:

Da

I. $\mathrm{ch.}n\omega = \left(v^{n-1} - \frac{n-2}{1}v^{n-3} + \frac{n-3.n-4.}{1.2}v^{n-5}\right.$

$\left. - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3}v^{n-7} + \mathrm{etc.}\right)u.$

II. $\mathrm{ch.}(2n+1)\omega = (2n+1)\left(u - \frac{n+1.n}{2.3}u^3\right.$

$+ \frac{n+2.n+1.n.n-1.}{2.3.4.5}u^5 - \frac{n+3.n+2...n-2.}{2.3...7}u^7$

$\left. + \frac{n+4.....n-3.}{2.....9}u^9 - \mathrm{etc.}\right).$

III. $\mathrm{ch.}s n\omega = \left(nu - \frac{n+1.n.n-1.}{1.2.3}u^3\right.$

$+ \frac{n+2...n-2.}{1...5}u^5 - \frac{n+3.....n-3.}{1.....7}u^7$

$\left. + \frac{n+4....n-4.}{1....9}u^9 - \mathrm{etc.}\right)\sqrt{(4-uu)}.$

Die Formel in (93.) verwandelt ſich durch die gebrauchten Subſtitutionen in folgende,

IV. $\mathrm{che.}n\omega = v^n - \frac{n}{1}v^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2}v^{n-4}$

$- \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3}v^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4}v^{n-8}$

$- \frac{n.n-6...n-9.}{1.2...5}v^{n-10} + \mathrm{etc.}$

Für ein ungerades n iſt durch dieſelben Subſtitutionen aus (94^b.),

V. $\pm \mathrm{ch}.n\omega = u^n - \frac{n}{1} u^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2} u^{n-4}$

$- \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3} u^{n-6} + \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1.2.3.4} u^{n-8}$

— etc.

Es ist dieselbe Formel mit II. rückwärts gelesen.

Man setze wiederum den Halbmesser $= r$, und $\mathrm{ch}.2\omega = z$, so ist $2rz = 2vu$, oder $rz = vu$, nach (25.), wenn in Fig. 58. die Chorden AB, AD gleich groß genommen werden. In der Formel I. ist nun statt v wieder zu setzen $\frac{v}{r}$, das ist, $\frac{z}{u}$. Nimmt man die Chorde des einfachen Bogens u zur Einheit, so wird

VI. $\mathrm{ch}.n\omega = z^{n-1} - \frac{n-2.}{1} z^{n-3}$

$+ \frac{n-3.n-4.}{1.2} z^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3} z^{n-7}$

+ etc.

131. Wenn das Vielfache von ω der ganze Umkreis oder ein Vielfaches desselben ist, so ist $\mathrm{ch}.n\omega = 0$, oder, wenn die geraden und ungeraden Vielfachen in der Bezeichnung unterschieden werden, $\mathrm{ch}.(2n+1)\omega = 0$, und $\mathrm{ch}.2n\omega = 0$. Der kleinste Werth von u in den Gleichungen für u, (nachdem diese durch die allen Gliedern gemeinschaftlichen Factoren dividirt sind) ist die Seite eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, wenn n überhaupt das Vielfache anzeigt.

Die Gleichungen für u sind bis zu der für das Zwölfeck, den Halbmesser des Kreises $r = 1$ gesetzt, folgende:

$n = 3$	$u^3 - 3 = 0$
$n = 5$	$u^4 - 5u^3 + 5 = 0$
$n = 7$	$u^6 - 7u^4 + 14u^2 - 7 = 0$
$n = 9$	$u^8 - 9u^6 + 27u^4 - 30u^2 + 9 = 0$
$n = 11$	$u^{10} - 11u^8 + 44u^6 - 77u^4 + 55u^2 - 11 = 0.$
	etc.
$n = 4$	$u^3 - 2 = 0$
$n = 6$	$u^4 - 4u^2 + 3 = 0$
$n = 8$	$u^6 - 6u^4 + 10u^2 - 4 = 0$
$n = 10$	$u^8 - 8u^6 + 21u^4 - 20u^2 + 5 = 0$
$n = 12$	$u^{10} - 10u^8 + 36u^6 - 56u^4 + 35u^2 - 6 = 0.$
	etc. etc.

132. Die Wurzeln dieser Gleichungen sind die Seiten und die Diagonalen des ordentlichen Vielecks, wozu sie gehören, doch mit Ausschluß des Durchmessers in Vielecken von einer geraden Anzahl Seiten. Diese Vieldeutigkeit der Wurzel u hat eben den Grund, welchen die Vieldeutigkeit des Sinus eines Theils von einem Winkel hat, der durch seinen Sinus gegeben wird. Die Chorde AB (Fig. 58.) gehört nicht bloß zu dem Bogen AB, sondern auch auch zu dem Bogen BECDA, dem Complement des AB zum ganzen Umfange, und auch zu der Summe eines dieser Bogen und eines Vielfachen des Umfanges. Man lasse den Punct B von A aus sich auf dem Umfange herum bewegen, und einen Umfang nach dem andern beschreiben. Die Chorde wächst von Null an bis zum Durchmesser, nimmt darauf ab, wird Null, und erneuert dann in Perioden ohne Ende dieselben Veränderungen des Wachsthums und Abnehmens. In dem zweyten Umlaufe ist sie negativ, weil der Sinus des halben beschriebenen Bogens negativ ist. In dem dritten Umlaufe und in jedem von einer ungeraden Ordnungszahl ist die Chorde positiv, so wie sie in jedem Umlaufe von einer geraden

Ordnungszahl negativ ist, alles zufolge der Formel, $\frac{\text{chord.}n\omega}{2r} = \sin \frac{1}{2} n\omega$.

133. Soll nun ein Bogen oder Winkel, der durch seine Chorde gegeben wird, in n gleiche Theile getheilt werden, so müssen alle zu derselben gleichnamigen Chorde gehörige Bogen oder Winkel in n Theile getheilt werden. Dadurch werden n verschiedene Bogen oder Winkel erhalten, eben so wie für den Sinus des nten Theils eines Winkels, dessen Sinus gegeben wird.

134. Die gegebene Chorde sey $= o$, so sind wenn P den Umfang des Kreises oder die Summe von vier Rechten bedeutet, die zu dieser Chorde gehörigen Bogen,

I. $o, P, 2P, 3P \ldots (n-2)P, (n-1)P,$

II. $nP, (n+1)P \ldots (2n-2)P, (2n-1)P$

III. $2nP, (2n+1)P \ldots$

etc.

Alle diese Bogen sind in n Theile zu theilen. Die Chorden des nten Theils der zweyten Classe sind den Chorden des nten Theils in der ersten Classe gleich aber entgegengesetzt; die von der dritten Classe sind denen von der ersten gleich und gleichnamig; die von der vierten Classe denen von der zweyten und so ferner abwechselnd. Daher hat man die verschiedenen Chorden nur in den beiden ersten Classen auszusuchen. Die Chorden, deren Bogen zusammen P ausmachen, sind nicht verschieden. Daher sind für ein ungerades n die verschiedenen Werthe der Chorde von dem nten Theile des Bogens, dessen Chorde $= o$ ist, aus den beiden ersten Classen,

$$o, \pm \text{ch.}\frac{1}{n}P; \pm \text{ch.}\frac{2}{n}P; \pm \text{ch.}\frac{3}{n}P \ldots \ldots$$

$$\ldots \pm \text{ch.}\frac{n-3}{2n}P \pm \text{ch.}\frac{n-1}{2n}P.$$

Für ein gerades n sind die n verschiedenen Werthe der Chorden des nten Theils von dem Bogen, dessen Chorde = o ist,

$$o, \pm ch.\frac{1}{n}P; \pm ch.\frac{2}{n}P; \pm ch.\frac{3}{n}P \ldots,$$

$$\ldots\ldots \pm ch.\frac{n-2}{2n}P; \quad ch.\frac{n}{2n}P.$$

Diese Chorden sind die Diagonalen eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, wenn man nämlich unter Diagonale jede der Linien versteht, die aus einem Winkelpuncte an alle übrigen Winkelpuncte gezogen werden, also auch die beiden jenem Puncte anliegenden Seiten. Die Chorden in der einen Hälfte des Kreises sind die positiven Werthe, in der andern Hälfte die negativen; denn die letztern, da sie als positive Chorden nicht wiederholt werden können, sind als Chorden von der Summe ihrer einfachen Bogen und des ganzen Umfangs negativ.

135. Die beiden Gleichungen II. III. für die Chorde u des nten Theils des Bogens zur $ch.n\omega$ in (130.) enthalten den Factor u. Daher wird $ch.n\omega = o$, wenn $u = o$ ist. Dieser Factor ist in den Gleichungen (131.) weggelassen. Sie steigen daher für ein Vieleck von $2n+1$ Seiten nur auf den $2n$ten Grad. Für ein gerades n wird $ch.n\omega = o$, wenn der in dem Werthe von $ch.n\omega$ enthaltene Factor, $\sqrt{(4-uu)}$, Null, das ist, wenn $u = 2$, dem Durchmesser gleich ist. Dieser Factor ist in den Gleichungen für ein gerades n in (131.) weggelassen, welche daher nur auf den $(2n-2)$ten Grad steigen. Jener Factor mag positiv oder negativ seyn, nur nicht beides zugleich, da er nur einfach vorhanden ist, und so auch in der Reihe der Chorden für ein gerades n der Durchmesser.

136. Wird der Halbmesser eines Kreises = 1 gesetzt, so ist das Product aller $n-1$ Diagonalen in einem ordentlichen Vielecke von n Seiten gleich der Zahl n.

Denn für ein gerades n kommt zu dem gegebenen Gliede in den Gleichungen (131.) noch der Durchmesser der $= 2$ ist.

VII. Formeln für die Potenzen der Sinus und Cosinus eines Winkels ausgedruckt durch die Sinus und Cosinus der Vielfachen jenes Winkels.

137. Man multiplicire in der Formel $2 \sin \varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$ aus (36.) beide Theile mit $2 \sin \varphi$, und löse das Product $2 \cos 2\varphi \cdot \sin \varphi$ in die Theile, $\sin 3\varphi - \sin \varphi$ auf, nach (27.) so ist

$$4 \sin \varphi^3 = 3 \sin \varphi - \sin 3\varphi.$$

In dieser Formel multiplicire man beide Theile mit $2 \sin \varphi$, und löse die Producte $6 \sin \varphi^2$ und $2 \sin 3\varphi \cdot \sin \varphi$ auf, jenes in $3 - 3 \cos 2\varphi$, dieses in $\cos 2\varphi - \cos 4\varphi$, so ist

$$8 \sin \varphi^4 = 3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi.$$

So erhält man folgende Formeln:

$$\sin \varphi = \sin \varphi$$
$$2 \sin \varphi^2 = 1 - \cos 2\varphi$$
$$4 \sin \varphi^3 = 3 \sin \varphi - \sin 3\varphi$$
$$8 \sin \varphi^4 = 3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$
$$16 \sin \varphi^5 = 10 \sin \varphi - 5 \sin 3\varphi + \sin 5\varphi$$
$$32 \sin \varphi^6 = 10 - 15 \cos 2\varphi + 6 \cos 4\varphi - \cos 6\varphi$$
$$64 \sin \varphi^7 = 35 \sin \varphi - 21 \sin 3\varphi + 7 \sin 5\varphi - \sin 7\varphi$$
$$128 \sin \varphi^8 = 35 - 56 \cos 2\varphi + 28 \cos 4\varphi - 8 \cos 6\varphi + \cos 8\varphi$$

etc.

Man bemerkt leicht das Gesetz der Coefficienten, daß es die Binomial-Coefficienten aus derjenigen Potenz sind, deren Exponent derselbe ist mit dem des Sinus,

in den ungeraden Potenzen, bis zu dem ersten der beiden mittelsten sich gleichen, und in den geraden bis zu dem einzelnen mittelsten halb genommen, mit abwechselnden Vorzeichen, von dem Sinus oder Cosinus des höchsten Vielfachen an. Die Allgemeinheit des Gesetzes wird auf folgende Art bewiesen.

Es sey

$$2^{2n-2} \sin\varphi^{2n-1} = A \sin\varphi - B \sin 3\varphi + C \sin 5\varphi - D \sin 7\varphi + \text{etc.}$$

so ist durch Multiplication mit $2 \sin\varphi$ und gehörige Reduction,

$$2^{2n-1} \sin\varphi^{2n} = A - (A+B)\cos 2\varphi + (B+C)\cos 4\varphi - (C+D)\cos 6\varphi + \text{etc.}$$

Ferner

$$2^{2n} \sin\varphi^{2n+1} = (3A+B)\sin\varphi - (A+2B+C)\sin 3\varphi + (B+2C+D)\sin 5\varphi - (C+2D+E)\sin 7\varphi + \text{etc.}$$

Es seyn nun in der $(2n-1)$ten Potenz eines Binomium die Coefficienten, von den beiden mittelsten sich gleichen nach beiden Seiten hin genommen,

$$\ldots \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots,$$

Hieraus werden die Coefficienten in der $2n$ten Potenz, von dem einzelnen mittelsten an, nach der einen oder andern Seite hin,

$$2\alpha;\ \alpha+\beta;\ \beta+\gamma;\ \gamma+\delta;\ \delta+\varepsilon;\ \ldots,$$

Aus diesen entstehen die Coefficienten der $(2n+1)$ten Potenz, von dem einen der beiden gleichen mittelsten an,

$$3\alpha+\beta;\ \alpha+2\beta+\gamma;\ \beta+2\gamma+\delta;\ \gamma+2\delta+\varepsilon;\ \ldots$$

Hieraus erhellt, daß die Coefficienten in der Potenz, $\sin\varphi^{2n}$, eben so aus denen in der Potenz, $\sin\varphi^{2n-1}$, gebildet werden, wie die Binomialcoefficienten in der $2n$ten Potenz aus denen in der $(2n-1)$ten, von demjenigen an, der die eine Hälfte schließt, außer daß A nicht doppelt

genommen wird, wie der Coefficient α aus der $(2n-1)$ten Potenz. Die Coefficienten in der $(2n+1)$ten Potenz des $\sin\varphi$ entstehen aber ganz so aus denen in der $(2n-1)$ten Potenz, wie die Binomial-Coefficienten in denselben Potenzen auseinander entstehen. Das Gesetz, welches nun für die berechneten Coefficienten gefunden ist, bis zu der 7ten und 8ten Potenz des $\sin\varphi$, gilt daher auch für die 9te und 10te Potenz, dadurch auch für die 11te und 12te, u. s. f.

Zugleich erhellt, wie die geraden Potenzen durch Cosinus, die ungeraden durch Sinus der Vielfachen, jene der geraden, diese der ungeraden, entwickelt werden, und wie die Potenzen der 2 mit denen der Sinus fortschreiten.

139. In der Formel,

$$2^{2n-2}\sin\varphi^{2n-1} = A\sin\varphi - B\sin 3\varphi + C\sin 5\varphi - D\sin 7\varphi + E\sin 9\varphi - \text{etc.}$$

ist $A = \frac{2n-1 \,.\, 2n-2 \,.\,.\,. \,n+1.}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,. \,n-1.}$, da A der $(n-1)$te Binomial-Coefficient in der $(2n-1)$ten Potenz ist, den Coefficienten $2n-1$ des zweyten Gliedes für den ersten genommenen. Diese Potenz hat $2n$ Glieder, von welchen das nte und $(n+1)$te einerley Coefficienten haben. Ferner $B = \frac{n-1}{n+1} A$; $C = \frac{n-2}{n+2} B$; $D = \frac{n-3}{n+3} C$, $E = \frac{n-4}{n+4} D$, u. s. f. (Binomial-Coefficienten, 8.). Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{n-2}, und setze

$$\sin\varphi^{2n-1} = P\sin\varphi - Q\sin 3\varphi + R\sin 5\varphi - S\sin 7\varphi + T\sin 9\varphi - \text{etc.}$$

so bleibt $Q = \frac{n-1}{n+1} P$; $R = \frac{n-2}{n+2} Q$;

$S = \frac{n-3}{n+3} R$; $T = \frac{n-4}{n+4} S$, u. s. f.

Nun ist $2n'.2n-1.....n+2.n+1.$ $1.3.5.....2n-1.2^n$ (Facultät, numerische, 7. oder Binomial-Coeff. 12.), also ist

$$A=\frac{1.3.5...2n-1.}{1.2.3...2-1.2n}\cdot\frac{2^n}{2}=\frac{1}{2}.\frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n},$$

und $$P=\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n}$$

140. In der Formel,

$$2^{2n-1}\sin\varphi^{2n}=\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\cos 2\varphi+\mathfrak{C}\cos 4\varphi-\mathfrak{D}\cos 6\varphi+\mathfrak{E}\cos 8\varphi-\text{etc.}$$

ist $\mathfrak{A}=\frac{2n.2n-1...n+1.}{1.2.....n}$, da $\mathfrak{A}$ der nte Binomial-Coefficient in der 2nten Potenz ist. Ferner

$$\mathfrak{B}=\frac{n}{n+1}\mathfrak{A};\quad \mathfrak{C}=\frac{n-1}{n+2}\mathfrak{B};\quad \mathfrak{D}=\frac{n-2}{n+3}\mathfrak{C};$$

$$\mathfrak{E}=\frac{n-3}{n+4}\mathfrak{D},\ \text{u. s. f.}$$

Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{2n-1}, und setze

$$\sin\varphi^{2n}=\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}\cos 2\varphi+\mathfrak{R}\cos 4\varphi-\mathfrak{S}\cos 6\varphi+\mathfrak{T}\cos 8\varphi-\text{etc.}$$

so ist $\mathfrak{P}=\frac{1}{2}.\frac{\mathfrak{A}}{2^{2n-1}}$; $\mathfrak{Q}=\frac{\mathfrak{B}}{2^{2n-1}}$ u. s. f.

also $$\mathfrak{Q}=\frac{2n}{n+1}\mathfrak{P};\quad \mathfrak{R}=\frac{n-1}{n+2}\mathfrak{Q};\quad \mathfrak{S}=\frac{n-2}{n+3}\mathfrak{R};$$

$$\mathfrak{T}=\frac{n-3}{n+4}\mathfrak{S};\ \text{u. s. f.}$$

Durch die in (139.) gebrauchte Subſtitution iſt

$$\mathfrak{A} = \frac{1.3.5..2n-1.}{1.2.3...n} \cdot 2^n = \frac{2.6.10..4n-2.}{1.2.3..\quad n},$$

$$\text{alſo } \mathfrak{P} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n}.$$

141. Auf gleiche Art werden die Werthe der Potenzen des Coſinus eines Winkels durch die Coſinus der Vielfachen ausgedruckt, und zwar die geraden ſowohl als die ungeraden bloß durch dieſe Coſinus.

$$\cos\varphi = \cos\varphi$$
$$2\cos\varphi^2 = 1 + \cos 2\varphi$$
$$4\cos\varphi^3 = 3\cos\varphi + \cos 3\varphi$$
$$8\cos\varphi^4 = 3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$$
$$16\cos\varphi^5 = 10\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi$$
$$32\cos\varphi^6 = 10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi$$
$$64\cos\varphi^7 = 35 + 21\cos 3\varphi + 7\cos 5\varphi + \cos 7\varphi$$
$$128\cos\varphi^8 = 35 + 56\cos 2\varphi + 28\cos 4\varphi + \cos 8\cos 6\varphi + \cos 8\varphi.$$

etc.

Das Geſetz der Coefficienten iſt ganz daſſelbe, wie für die Potenzen des Sinus, und wird auf gleiche Art erwieſen. Es kommen hier bloß Coſinus der Vielfachen vor, weil das Product zweyer Coſinus in zwey Coſinus zerlegt wird, nach (27.). Das Product $2\cos n\varphi . \cos\varphi$ iſt $= \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi$. Auch ſind die Vorzeichen der Glieder durchgängig $+$.

142. Die Formeln für die Potenzen der Sinus und Coſinus ſind erforderlich zur Integration ſolcher Differentiale, die dieſe Potenzen enthalten. Auch für praktiſche Rechnungen iſt es bequem, Potenzen der Sinus und Coſinus durch die Sinus und Coſinus der Vielfachen ihrer Winkel auszudrucken. In der Aſtronomie kommt dies häufig vor.

Nun ist $2n'.2n-1.....n+2.n+1.n$ $1.3.5.....2n-1.2^n$ (Facultät, numerische, 7. oder Binomial-Coeff. 12.), also ist

$$A=\frac{1.3.5...2n-1.}{1.2.3...2-1.2n}.\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}.\frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n}$$

und $P=\frac{1}{2^{n-1}}.\frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n}$

140. In der Formel,

$$2^{2n-1}\sin\varphi^{2n}=\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\cos 2\varphi+\mathfrak{C}\cos 4\varphi-\mathfrak{D}\cos 6\varphi+\mathfrak{E}\cos 8\varphi-\text{etc.}$$

ist $\mathfrak{A}=\frac{2n.2n-1...n+1.}{1.2.....n}$, da $\mathfrak{A}$ der nte Binomial-Coefficient in der 2nten Potenz ist. Ferner

$$\mathfrak{B}=\frac{n}{n+1}\mathfrak{A};\ \mathfrak{C}=\frac{n-1}{n+2}\mathfrak{B};\ \mathfrak{D}=\frac{n-2}{n+3}\mathfrak{C};$$

$$\mathfrak{E}=\frac{n-3}{n+4}\mathfrak{D},\ \text{u. s. f.}$$

Man dividire beide Theile der Formel durch 2^{2n-1}, und setze

$$\sin\varphi^{2n}=\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}\cos 2\varphi+\mathfrak{R}\cos 4\varphi-\mathfrak{S}\cos 6\varphi+\mathfrak{T}\cos 8\varphi-\text{etc.}$$

so ist $\mathfrak{P}=\frac{1}{2}.\frac{\mathfrak{A}}{2^{2n-1}}$; $\mathfrak{Q}=\frac{\mathfrak{B}}{2^{2n-1}}$ u. s. f.

also $\mathfrak{Q}=\frac{2n}{n+1}\mathfrak{P}$; $\mathfrak{R}=\frac{n-1}{n+2}\mathfrak{Q}$; $\mathfrak{S}=\frac{n-2}{n+3}\mathfrak{R}$;

$\mathfrak{T}=\frac{n-3}{n+4}\mathfrak{S}$; u. s. f.

Durch die in (139.) gebrauchte Subſtitution iſt

$$\mathfrak{A} = \frac{1.3.5..2n-1.}{1.2.3...n} \cdot 2^n = \frac{2.6.10..4n-2.}{1.2.3..\quad n},$$

$$\text{alſo } \mathfrak{P} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2.6.10...4n-2.}{1.2.3...n}.$$

141. Auf gleiche Art werden die Werthe der Potenzen des Coſinus eines Winkels durch die Coſinus der Vielfachen ausgedruckt, und zwar die geraden ſowohl als die ungeraden bloß durch dieſe Coſinus.

$$\begin{aligned}
\operatorname{cof}\varphi &= \operatorname{cof}\varphi \\
2\operatorname{cof}\varphi^2 &= 1 + \operatorname{cof}2\varphi \\
4\operatorname{cof}\varphi^3 &= 3\operatorname{cof}\varphi + \operatorname{cof}3\varphi \\
8\operatorname{cof}\varphi^4 &= 3 + 4\operatorname{cof}2\varphi + \operatorname{cof}4\varphi \\
16\operatorname{cof}\varphi^5 &= 10\operatorname{cof}\varphi + 5\operatorname{cof}3\varphi + \operatorname{cof}5\varphi \\
32\operatorname{cof}\varphi^6 &= 10 + 15\operatorname{cof}2\varphi + 6\operatorname{cof}4\varphi + \operatorname{cof}6\varphi \\
64\operatorname{cof}\varphi^7 &= 35 + 21\operatorname{cof}3\varphi + 7\operatorname{cof}5\varphi + \operatorname{cof}7\varphi \\
128\operatorname{cof}\varphi^8 &= 35 + 56\operatorname{cof}2\varphi + 28\operatorname{cf}4\varphi + \operatorname{cf}8\operatorname{cf}6\varphi \\
&\qquad + \operatorname{cof}8\varphi.
\end{aligned}$$

etc.

Das Geſetz der Coefficienten iſt ganz daſſelbe, wie für die Potenzen des Sinus, und wird auf gleiche Art erwieſen. Es kommen hier bloß Coſinus der Vielfachen vor, weil das Product zweyer Coſinus in zwey Coſinus zerlegt wird, nach (27.). Das Product $2\operatorname{cof}n\varphi.\operatorname{cof}\varphi$ iſt $= \operatorname{cof}(n-1)\varphi + \operatorname{cof}(n+1)\varphi$. Auch ſind die Vorzeichen der Glieder durchgängig $+$.

142. Die Formeln für die Potenzen der Sinus und Coſinus ſind erforderlich zur Integration ſolcher Differentiale, die dieſe Potenzen enthalten. Auch für praktiſche Rechnungen iſt es bequem, Potenzen der Sinus und Coſinus durch die Sinus und Coſinus der Vielfachen ihrer Winkel auszudrucken. In der Aſtronomie kommt dies häufig vor.

143. Ähnliche Formeln werden für Potenzen der Sinus und Cosinus mit negativen Exponenten gefunden. Es ist

$$\frac{1}{\sin\varphi} = 2(\sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \sin 7\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^2} = -4(\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi + 4\cos 8\varphi + 5\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^3} = -8(\sin 3\varphi + 3\sin 5\varphi + 6\sin 7\varphi + 10\sin 9\varphi + 15\sin 11\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\sin\varphi^4} = +16(\cos 4\varphi + 4\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi + 20\cos 10\varphi + 35\cos 12\varphi + \text{etc.})$$

etc.

144. Die erste Formel fließt aus der in (72.) gefundenen Summe einer unendlichen Reihe Sinus, wenn daselbst $a = \varphi$; $b = 2\varphi$ gesetzt wird. Die Reihe für $\frac{1}{\sin\varphi^2}$ muß so beschaffen seyn, daß sie mit $\sin\varphi$ multiplicirt die erste Reihe gebe. Darum muß sie bloß die Cosinus der geraden Vielfachen von φ enthalten, da $\cos 2m\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2m+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(2m-1)\varphi$ ist. Sie muß mit $\cos 2\varphi$ anfangen, da $\cos 2\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin 3\varphi - \sin\varphi)$ ist, also dadurch das Glied $\sin\varphi$ in der ersten Reihe hervorgebracht wird, ohne daß es nöthig ist, noch $\cos 0\varphi$ oder 1 zu Hülfe zu nehmen. Die dritte Reihe muß die Sinus der ungeraden Vielfachen von $\sin 3\varphi$ an enthalten, damit daraus, durch die Multiplication mit $\sin\varphi$ die zweyte Reihe erhalten werde, indem $\sin(2n+1)\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2n\varphi - \cos(2n+2)\varphi)$ ist. Da $\sin 3\varphi . \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)$ ist, so braucht die Reihe erst mit $\sin 3\varphi$ anzufangen. So ist es auch mit den Formen der folgenden Reihen beschaffen.

145. Man ſetze für ein ungerades n

$$\sin\varphi^{-n} = \pm 2^n (\sin n\varphi + A \sin(n+2)\varphi + B \sin(n+4)\varphi + C \sin(n+6)\varphi + D \sin(n+8)\varphi + \text{etc.})$$

Der Factor 2^n iſt beygefügt, weil bey der Multiplication der Reihe durch $\sin\varphi$, und Zerlegung der Producte in zwey Coſinus, die Reihe zugleich den Factor $\frac{1}{2}$ erhält. Multiplicirt man nun die hierdurch entſtandene Reihe für $\sin\varphi^{-n+1}$ wieder mit $\sin\varphi$, und zerlegt die Producte der Sinus und Coſinus in zwey Sinus, ſo entſteht wieder der Factor $\frac{1}{2}$, und ſo ferner bey jeder Multiplication. Da die erſte Reihe, die für $\sin\varphi$, den Factor 2 hat, ſo muß die nte Reihe, die für $\sin n\varphi^{-1}$, den Factor 2^n haben.

Man multiplicire die angenommene Reihe mit $\sin\varphi$, ſo wird durch die Zerlegung der Producte,

$$\sin\varphi^{-n+1} = \pm 2^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + (A-1)\cos(n+1)\varphi + (B-A)\cos(n+3)\varphi + (C-B)\cos(n+5)\varphi + (D-C)\cos(n+7)\varphi + \text{etc.}).$$

Die Coefficienten dieſer Reihe, den Factor 2^{n-1} abgeſondert, ſind die Differenzen von denen in der Reihe für $\sin\varphi^{-n}$. Man ſetze

$$\sin\varphi^{-n+1} = \pm 2^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + \mathfrak{A}\cos(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\cos(n+3)\varphi + \mathfrak{C}\cos(n+5)\varphi + \mathfrak{D}\cos(n+7)\varphi + \text{etc.}),$$

ſo iſt

$$\sin\varphi^{-n+2} = \mp 2^{n-2}(\sin(n-2)\varphi + (\mathfrak{A}-1)\sin n\varphi + (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\sin(n+2)\varphi + (\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\sin(n+4)\varphi + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe, nach Abſonderung des Factors 2^{n-2}, hat zu Coefficienten die Differenzen von denen in der Reihe für $\sin\varphi^{-n+1}$. So erhellt, daß die Coefficienten in jeder

vorhergehenden Reihe die Differenzen derer in der nächst höhern oder folgenden sind. Da der erste Coefficient derselbe, nämlich 1 ist, so ist der mte in einer Reihe die Summe von m Coefficienten der nächst niedrigern, vom Anfange an. Dadurch wird jede folgende Reihe aus der vorhergehenden leicht berechnet. Es ist in irgend einer Reihe, 1, a, b, c, d . . . p, q, r, das Glied r die Summe aller Glieder der Differenzreihe,
1; a—1; b—a; c—b; d—c, . . . q—p; r—q,
deren Anzahl der Stellenzahl von r gleich ist.

146. Die Coefficienten in den Reihen, ohne die Potenz von z, sind die Binomial-Coefficienten in $(1-z)^{-n}$. In dieser Potenz ist der Unterschied des mten und $(m+1)$ten Coefficienten gleich dem $(m+1)$ten Coefficienten in $(1-z)^{-n+1}$, der absoluten Quantität nach. Denn es ist, wenn n als der erste gezählt wird,

$$\text{der mte Coefficient} = \frac{n.n+1....n+m-1.}{1.\ 2...\ m};$$

$$\text{der } (m+1)\text{te} = \frac{n.n+1....n+m.}{1.\ 2...\ m+1.};$$

$$\text{der Unterschied} = \frac{n-1.n,...n+m-1.}{1.2...\ m+1},$$

welches der $(m+1)$te Coefficient in $(1-z)^{-n+1}$ ist. (S. Binom. Coeffic. 5. wo nur der zweyte Theil des Binomium additiv gesetzt ist). Der Unterschied des ersten Coefficienten n und des Anfangsgliedes, 1, ist der erste Coefficient, $n-1$, in $(1-z)^{-n+1}$. Solchergestalt ist die Reihe der Coefficienten in jeder vorhergehenden Potenz die Differenzreihe der folgenden; und die letzte Differenzreihe ist die in der Potenz $(1-z)^{-1}$, das ist,

$$1+z+z^2+z^3+z^4+\text{etc.}$$

Die Coefficienten in dieser Reihe sind dieselben mit denen in der Reihe für $\frac{1}{\sin\varphi}$, den Factor 2 abgesondert.

Dadurch kommen die Coefficienten in allen folgenden Reihen für die reciproken Potenzen von $\sin\varphi$, ohne die Potenz von 2, mit jenen Binomialcoefficienten überein.

147. Auf gleiche Weise ist

$$\frac{1}{\cos\varphi} = 2(\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 7\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^2} = 4(\cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi - 4\cos 8\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^3} = 8(\cos 3\varphi - 3\cos 5\varphi + 6\cos 7\varphi - 10\cos 9\varphi + \text{etc.})$$

$$\frac{1}{\cos\varphi^4} = 16(\cos 4\varphi - 4\cos 6\varphi + 10\cos 8\varphi - 20\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

etc.

Der Beweis ist derselbe wie für die Potenzen der Sinus. Die Coefficienten sind, ohne die Potenzen der 2, die Coefficienten in $(1+z)^{-n}$.

148. Wenn $\varphi = 90°$, so ist $\sin\varphi = 1$, und $\sin(4n-1).90° = -1$; $\sin(4n+1).90° = +1$; $\cos(4n-2).90° = -1$; $\cos 4n.90° = +1$; und der Werth von $\frac{1}{\sin\varphi^n}$ ist $= 2^n(1+1)^{-n} = 1$.

Ist $\varphi = 0$, so ist $\cos\varphi = +1$, und es ist $\frac{1}{\cos\varphi^n} = 2^n(1+1)^{-n} = 1$.

VIII. Analogie der Theilung eines Kreisſectors und eines hyperboliſchen Sectors.

149. Die gleichſeitige Hyperbel hat eine beſondere Ähnlichkeit mit dem Kreiſe durch ihre Gleichung. Wenn a die halbe Axe dieſer Hyperbel iſt, und die Abſciſſe von dem Mittelpuncte aus genommen $= x$, die Ordinate $= y$, ſo iſt ihre Gleichung, $aa = xx - yy$, da für den Kreis die Gleichung iſt $aa = xx + yy$, wenn der Halbmeſſer $= a$ iſt, und die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus genommen werden. Die Ordinaten der Hyperbel ſind unmöglich, wenn die Abſciſſe kleiner als a iſt, und die Ordinaten des Kreiſes ſind unmöglich, wenn die Abſciſſe größer als a iſt. Dennoch kann man die Gleichung zwiſchen einer der Coordinaten an der Hyperbel und dem zugehörigen Sector auch auf den Kreis übertragen, nur daß unmögliche Formen hineinkommen. Die Formeln für die Vervielfachung der Sectoren mittelſt der Coordinaten an einem einfachen ſind für beide Linien entweder ganz dieſelben, oder nur in den Vorzeichen verſchieden.

150. Wenn ein Winkel durch ſeinen Kreisbogen φ, für den Halbmeſſer als Einheit, ausgedruckt wird, ſo iſt der zugehörige Kreisſector $= \frac{1}{2}\varphi$. Alle die obigen Formeln für die Vervielfachung und Theilung eines Winkels gelten auch für die Kreisſectoren, wenn man unter φ den doppelten Sector verſteht.

151. Es ſey (Fig. 61.) CX die Axe einer gleichſeitigen Hyperbel, wovon AMN ein Zweig iſt; C iſt der Mittelpunct, A der Scheitel, $CP = x$ eine Abſciſſe, $PM = y$ eine Ordinate, und $CA = a$. Es iſt der Sector $ACM = \frac{1}{2}aa \log nat \frac{x+y}{a}$, ſ. Quadratur.

152. Nun ſey $a = 1$, und Sector $ACM = \frac{1}{2}a$ (zur Beobachtung der Ähnlichkeit mit dem Kreiſe), ſo iſt

$\omega = \log nat\,(x+y)$, und auch $\omega = \log nat \frac{1}{x-y}$.

Denn es ist für die Hyperbel, $xx - yy = 1$, oder $(x+y)(x-y) = 1$, also $x + y = \frac{1}{x-y}$. Es sey die Basis der natürlichen Logarithmen $= e$, so ist (s. Logarithmen)

$$e^{\omega} = x + y, \text{ und } e^{\omega} = \frac{1}{x-y},$$

$$\text{oder } e^{-\omega} = x - y.$$

Folglich ist

$$e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x,$$
$$e^{\omega} - e^{-\omega} = 2y.$$

153. Hieraus ergiebt sich eine leichte Art die hyperbolische Form auf einen Kreissector überzutragen. Es ist $\partial . e^{\omega} = e^{\omega} \partial\omega$, und $\partial . e^{-\omega} = -e^{-\omega} \partial\omega$ (Differentialformeln, 14.), also ist

$$(e^{\omega} - e^{-\omega})\,\partial\omega = 2\partial x,$$
$$(e^{\omega} + e^{-\omega})\,\partial\omega = 2\partial y,$$

und durch Verbindung mit jenen beiden Formeln,

$$\partial\omega = \frac{\partial x}{y}; \qquad \partial\omega = \frac{\partial y}{x}.$$

Setzt man $y\sqrt{-1}$ statt y, und $\varphi\sqrt{-1}$ statt ω, so verwandeln sich diese beiden Differentialformeln in die zwischen einem Kreisbogen und den Coordinaten (Differentialformeln, 29, 30.), oder zwischen dem doppelten Kreissector und den Coordinaten. Es ist also, wenn x und y die Coordinaten am Kreise, und $\frac{1}{2}\varphi$ den zugehörigen Sector bedeuten,

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2x,$$
$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2y\sqrt{-1}.$$

Zwischen der Coordinate x oder y und dem Sector $\frac{1}{2}\varphi$ oder Bogen φ (für den Halbmesser als Einheit) findet keine endliche Gleichung anders als mit unmöglichen Formen Statt. Werden die Exponentialgrößen zu einer Reihe entwickelt, so geht das Unmögliche heraus. (S. Differenzenrechnung, 25, wo für a, c, u, zu setzen sind e, 1, $\pm \varphi\sqrt{-1}$.)

Hingegen sind die Gleichungen zwischen ω und x oder y an der Hyperbel zweyerley Formen fähig, durch Potentialausdrücke, und durch Reihen.

154. Es sey ACN (Fig. 61.) ein Vielfaches des Sectors ACM in dem Verhältnisse n : 1; und CQ die dazu gehörige Abscisse, QN die Ordinate, so ist

$$\frac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = CQ,$$

$$\frac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega}) = NQ.$$

Man setze S statt $\frac{1}{2}\omega$, und $CQ = \text{cos hyp. } nS$; $NQ = \text{sin hyp. } nS$, oder kürzer $CQ = \text{cos h. } nS$; $NQ = \text{sin h. } nS$.

I. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{\omega} + e^{-\omega}) = x$, mit den beiden Theilen von $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so entsteht $\frac{1}{2}(e^{2\omega} + 1 + 1 + e^{-2\omega}) = 2x^2$, das ist, $\frac{1}{2}(e^{2\omega} + e^{-2\omega} = 2x^2 - 1$, oder

$$\text{cos h. } 2S = 2x^2 - 1.$$

II. Die beiden Theile der gefundenen Gleichung multiplicire man wieder mit $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so erhält man

$$\frac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{\omega} + e^{-\omega} + e^{-3\omega}) = 4x^3 - 2x,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{-3\omega}) = 4x^3 - 3x$,

das ist, $\text{cos h. } 3S = 4x^3 - 3x$.

III. Auf gleiche Art wird erhalten

$$\frac{1}{2}(e^{4\omega} + e^{2\omega} + e^{-2\omega} + e^{-4\omega}) = 8x^4 - 6x^2,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{4\omega} + e^{-4\omega}) = 8x^4 - 8x^2 + 1$,

das ist, $\text{cos h. } 4S = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

IV. Ferner iſt

$$\text{col h. } 5\,S = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\text{col h. } 6\,S = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$
$$\text{col h. } 7\,S = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,$$

u. ſ. f.

Dieſe Formeln für die Coſinus der Vielfachen eines hyperboliſchen Sectors ſtimmen völlig mit den Formeln für die Coſinus der Vielfachen eines Winkels (oder circularen Sectors) in (93.) überein. Die Herleitung der Coſinus eines Vielfachen aus denen der beiden nächſt vorhergehenden iſt beiderſeits dieſelbe.

155. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = y$, mit den beiden Theilen von $e^u + e^{-u} = 2x$, ſo iſt

$$\frac{1}{2}(e^{2u} - e^{-2u}) = 2xy,$$

oder $\quad \text{ſin h. } 2S = 2xy.$

II. Die gefundene Gleichung behandle man auf dieſelbe Art, ſo iſt

$$\frac{1}{2}(e^{3u} + e^u - e^{-u} - e^{-3u}) = 4x^2y,$$

oder $\quad \frac{1}{2}(e^{3u} - e^{-3u}) = 4x^2y - y,$

das iſt, $\text{ſin h. } 3S = 4x^2y - y.$

III. Durch daſſelbe Verfahren wird erhalten

$$\text{ſin h. } 4S = 8x^3y - 4xy.$$
$$\text{ſin h. } 5S = 16x^4y - 12x^2y + y.$$
$$\text{ſin h. } 6S = 32x^5y - 32x^3y + 6xy.$$
$$\text{ſin h. } 7S = 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y.$$

u. ſ. f.

Auch dieſe Formeln ſtimmen mit den Formeln für die Sinus der Vielfachen eines Winkels (oder Kreisſectors) in (84.) vollkommen überein. Da in den Formeln bloß die erſte Potenz des Sinus des einfachen Sectors vor-

Zwischen der Coordinate x oder y und dem Sector $\frac{1}{2}\varphi$ oder Bogen φ (für den Halbmesser als Einheit) findet keine endliche Gleichung anders als mit unmöglichen Formen Statt. Werden die Exponentialgrößen zu einer Reihe entwickelt, so geht das Unmögliche heraus. (S. Differenzenrechnung, 25, wo für a, c, u, zu setzen sind e, 1, $\pm\varphi\sqrt{-1}$.)

Hingegen sind die Gleichungen zwischen ω und x oder y, an der Hyperbel zweyerley Formen fähig, durch Potentialausdrücke, und durch Reihen.

154. Es sey ACN (Fig. 61.) ein Vielfaches des Sectors ACM in dem Verhältnisse n : 1; und CQ die dazu gehörige Abscisse, QN die Ordinate, so ist

$$\frac{1}{2}(e^{n\omega} + e^{-n\omega}) = CQ,$$

$$\frac{1}{2}(e^{n\omega} - e^{-n\omega}) = NQ.$$

Man setze S statt $\frac{1}{2}\omega$, und $CQ = \cos\text{hyp. } nS$; $NQ = \sin\text{hyp. } nS$, oder kürzer $CQ = \cos\text{h. } nS$; $NQ = \sin\text{h. } nS$.

I. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{\omega} + e^{-\omega}) = x$, mit den beiden Theilen von $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so entsteht $\frac{1}{2}(e^{2\omega} + 1 + 1 + e^{-2\omega}) = 2x^2$, das ist, $\frac{1}{2}(e^{2\omega} + e^{-2\omega} = 2x^2 - 1$, oder

$$\cos\text{h. } 2S = 2x^2 - 1.$$

II. Die beiden Theile der gefundenen Gleichung multiplicire man wieder mit $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2x$, so erhält man

$$\frac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{\omega} + e^{-\omega} + e^{-3\omega}) = 4x^3 - 2x,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3\omega} + e^{-3\omega}) = 4x^3 - 3x$,

das ist, $\cos\text{h. } 3S = 4x^3 - 3x$.

III. Auf gleiche Art wird erhalten

$$\frac{1}{2}(e^{4\omega} + e^{2\omega} + e^{-2\omega} + e^{-4\omega}) = 8x^4 - 6x^2,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{4\omega} + e^{-4\omega}) = 8x^4 - 8x^2 + 1$,

das ist, $\cos\text{h. } 4S = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

IV. Ferner iſt

$$\text{cof h. } 5\,S = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$\text{cof h. } 6\,S = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$
$$\text{cof h. } 7\,S = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,$$

u. ſ. f.

Dieſe Formeln für die Coſinus der Vielfachen eines hyperboliſchen Sectors ſtimmen völlig mit den Formeln für die Coſinus der Vielfachen eines Winkels (oder circularen Sectors) in (93.) überein. Die Herleitung der Coſinus eines Vielfachen aus denen der beiden nächſt vorhergehenden iſt beiderſeits dieſelbe.

155. Man multiplicire die beiden Theile der Gleichung, $\frac{1}{2}(e^{u} - e^{-u}) = y$, mit den beiden Theilen von $e^{u} + e^{-u} = 2x$, ſo iſt

$$\frac{1}{2}(e^{2u} - e^{-2u}) = 2xy,$$

oder $\quad \text{ſin h. } 2S = 2xy.$

II. Die gefundene Gleichung behandle man auf dieſelbe Art, ſo iſt

$$\frac{1}{2}(e^{3u} + e^{u} - e^{-u} - e^{-3u}) = 4x^2y,$$

oder $\frac{1}{2}(e^{3u} - e^{-3u}) = 4x^2y - y,$

das iſt, $\text{ſin h. } 3S = 4x^2y - y.$

III. Durch daſſelbe Verfahren wird erhalten

$$\text{ſin h. } 4S = 8x^3y - 4xy,$$
$$\text{ſin h. } 5S = 16x^4y - 12x^2y + y,$$
$$\text{ſin h. } 6S = 32x^5y - 32x^3y + 6xy,$$
$$\text{ſin h. } 7S = 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y.$$

u. ſ. f.

Auch dieſe Formeln ſtimmen mit den Formeln für die Sinus der Vielfachen eines Winkels (oder Kreisſectors) in (84.) vollkommen überein. Da in den Formeln bloß die erſte Potenz des Sinus des einfachen Sectors vor-

kommt, so hebt sich der unmögliche Factor bey der Vertauschung der circularen und hyperbolischen Sectoren.

Zu vergleichen die Rechnung in 108b, f.

156. Um die Sinus der ungeraden Vielfachen eines hyperbolischen Sectors durch den Sinus des einfachen auszudrucken, multiplicire man die beiden Werthe des Sinus eines Vielfachen durch die beiden Theile der Gleichung, $e^{2u} + e^{-2u} = 4yy + 2$, $(= 4xx - 2)$, den ersten durch den ersten, den zweyten durch den zweyten, und addire oder subtrahire dasjenige, was nöthig ist, um den Werth des Sinus eines vielfachen Sectors, $\frac{1}{2}(e^{nu} - e^{-nu})$, zu erhalten. Solchergestalt ist

$$\text{sin h. } S = y.$$
$$\text{sin h. } 3S = 4y^3 + 3y.$$
$$\text{sin h. } 5S = 16y^5 + 20y^3 + 5y.$$
$$\text{sin h. } 7S = 64y^7 + 112y^5 + 56y^3 + 7y.$$

u. s. f.

Diese Formeln sind bloß in den Vorzeichen von denen in (86.) verschieden. Setzt man hier $y\sqrt{-1}$ für y, und also für den Sinus des vielfachen Sectors ebenfalls eine unmögliche Größe, so geht der unmögliche Factor zwar durch die Division wieder heraus, aber die ungeraden Potenzen von y^2 werden negativ. Auf gleiche Art werden die Formeln für Sinus am Kreise in hyperbolische verwandelt.

157. Durch dasselbe Verfahren findet man die hyperbolischen Sinus gerader Vielfachen eines Sectors, nämlich

$$\text{sin h. } 2S = 2yx.$$
$$\text{sin h. } 4S = (8y^3 + 4y)x.$$
$$\text{sin h. } 6S = (32y^5 + 32y^3 + 6y)x.$$
$$\text{sin h. } 8S = (128y^7 + 192y^5 + 80y^3 + 8y)x.$$

u. s. w.

Die Formeln sind dieselben wie die für Winkel oder Kreissectoren in (89.) außer daß alle Glieder einerley Vorzeichen haben, aus demselben Grunde wie in (156).

158. Ein hyperbolischer Sinus und Cosinus gehört nur zu einem einzigen Sector. Daher haben die Gleichungen für x und y, wenn der vielfache Sector gegeben wird, nur einen einzigen Werth, oder die Gleichungen für x und y haben alle nur eine einzige mögliche Wurzel. Die Formeln für den Sinus eines geraden Vielfachen des einfachen Sectors geben zwar, quadrirt, Gleichungen mit geraden Potenzen von y, daher die Wurzeln paarweise von entgegengesetzten Werthen, allein die negativen Wurzeln beziehen sich nur auf den negativen Werth des Sinus des vielfachen Sectors, der durch das Quadriren mit in die Gleichung gezogen wird.

159. Es sey sin h. 3S = f, so ist $f = 4y^3 + 3y$ (156.). Man führe wieder die halbe Axe, a, ein, so hat man für f zu setzen $\frac{f}{a}$, und $\frac{y}{a}$ für y. Dadurch ist

$$4y^3 + 3a^2y - a^2f = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel (Gleichung, 69.). Ihre Gesellschafterinn am Kreise, $4y^3 - 3a^2y + a^2f = 0$, hat drey mögliche Wurzeln. Denn die Gleichung, $x^3 - bx + c = 0$, hat drey mögliche Wurzeln, wenn $4b^3 > 27c^2$ ist (Gleichung 70.). Da am Kreise ist $a > f$, so wird die Bedingung wegen der drey möglichen Wurzeln erfüllt.

160. Es sey cos h. 3S = g, so ist $g = 4x^3 - 3x$ (154. II.). Wird die halbe Axe, a, eingeführt, so ist $4x^3 - 3a^2x - a^2g = 0$. Eine cubische Gleichung, $x^3 - bx - c = 0$, hat nur eine mögliche Wurzel, wenn $4b^3 < 27c^2$ ist. Das ist hier der Fall, da $a < g$ ist.

161. Es sey sin h. nS = f, so ist $\frac{1}{2}(e^{nw} - e^{-nw}) = f$, und $\frac{1}{4}(e^{2nw} - 2 + e^{-2nw}) = f^2$. Daraus ist $\frac{1}{4}(e^{2nw} + 2 + e^{-2nw}) = f^2 + 1$, woraus ist

$\frac{1}{2}(e^{nS} + e^{-nS}) = \sqrt{(f^2 + 1)}$. Diese Gleichung auf gedoppelte Art mit der ersten, für f verbunden, giebt

$$e^{nS} = \sqrt{(f^2 + 1)} + f,$$
$$e^{-nS} = \sqrt{(f^2 + 1)} - f.$$

Daraus ist

$$e^{S} = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} + f)},$$
$$e^{-S} = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} - f)}.$$

Da $e^{S} - e^{-S} = 2y = 2 \sin h.\ S$, so ist

$$2y = \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} + f)} - \sqrt[n]{(\sqrt{(f^2 + 1)} - f)}.$$

162. Es sey $\cos h.\ nS = g$, so ist $\frac{1}{2}(e^{nS} + e^{-nS}) = g$, und daraus auf ähnliche Art wie in (161.)

$$e^{S} = \sqrt[n]{(g + \sqrt{(g^2 - 1)})},$$
$$e^{-S} = \sqrt[n]{(g - \sqrt{(g^2 - 1)})}.$$

Da $e^{S} + e^{-S} = 2x = 2 \cos h.\ S$, so ist

$$2x = \sqrt[n]{(g + \sqrt{(g^2 - 1)})} + \sqrt[n]{(g - \sqrt{(g^2 - 1)})}.$$

Aus den Gleichungen für y und x lassen sich rückwärts f und g durch y und x darstellen.

163. Der hyperbolische Sinus und Cosinus des Theils eines Sectors läßt sich also durch den Sinus und Cosinus des vielfachen Sectors mittelst einer endlichen, zweymahl zweytheiligen, nur irrationalen, Formel darstellen. Der Sinus und Cosinus eines Kreissectors behält zwar dieselbe Form, die beiden Wurzelgrößen aber sind unmögliche Größen, weil f in $f\sqrt{-1}$ verwandelt wird, und g^2 kleiner als 1 ist. Die mehreren Werthe des Sinus und Cosinus des Theils lassen sich in einem endlichen algebraischen Ausdrucke mit möglichen Größen nicht begreifen. Bey der Entwickelung der irrationalen Größen zu Reihen verschwindet das Unmögliche in dem Aggregat.

Die nte Wurzel aus einer möglichen Größe hat nur einen einzigen möglichen Werth; aber die nte Wurzel aus einer unmöglichen Größe hat n unmögliche Werthe. In dem gegenwärtigen Falle läßt sich eine unmögliche Wurzel aus dem einen Theile der Formel für y oder x mit einer unmöglichen Wurzel aus dem andern Theile derselben verbinden, so daß das Aggregat möglich wird. Dieses muß auf n Arten thunlich seyn, damit y oder x dadurch n verschiedene Werthe erhalte, und bey einer Section in eine gerade Anzahl Theile für die Sinus auf 2n Arten, die aber nur in den Vorzeichen einen Unterschied geben.

164. Wenn $n = 3$ ist, so sind die Formeln für $2y$ und $2x$ die Ausdrücke der Wurzeln einer cubischen Gleichung, wie sie die Cardanische Regel für eine cubische Gleichung mit einer einzigen möglichen Wurzel giebt. Die Formel für $2y$ gilt für die Gleichung $z^3 + bz - c = 0$, die für $2x$ gilt für die Gleichung $z^3 - bz - c = 0$. Hat c das Vorzeichen +, so sind die Wurzeln jenen Werthen entgegengesetzt. Man hat nur in jenen Formeln für y, x, f, g zu setzen $\frac{y}{a}, \frac{x}{a}, \frac{f}{a}, \frac{g}{a}$, um die Formeln denen in dem Artikel, Gleichung (62. 73.) analog zu machen. Alsdann ist $2y$ oder $2x$ das dortige x.

165. Lambert hat in einer Abhandlung, Observations trigonometriques, Mem. de l'Acad. de Berlin, 1768, eine Tafel von 90 hyperbolischen Sectoren mit ihren Sinus und Cosinus nebst deren Logarithmen berechnet, welche Tafel auch in seinen Zusätzen zu den ... Tabellen, Berlin 1770, Tab. XXXII. enthalten ist. Wenn diese weiter ausgedehnt würde, könnte sie nicht allein zur Auflösung mancher Gleichungen, sondern auch zur Abkürzung trigonometrischer Rechnungen dienen.

166. Exempel. Es sey die Gleichung, $x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0$, aufzulösen. Sie

ist nach Cardans Regel, im Artikel Gleichung, 75, aufgelöset. Es ist an der Hyperbel die Gleichung, $4x^3 - 3a^2x - a^2g = 0$ aus (160.). Folglich ist

$\frac{3}{4}a^2 = 13,3592$ $\quad$ $la = 0,62536$

$\frac{3}{4}a^2g = 24,6377$ $\quad$ $lg = 0,74294$

$a = 4,2204$ $\quad$ $l\cos h.\,3S = 0,11758$

$\cos h.\,3S = \frac{g}{a}$ $\quad$ $3S = 0,3314+$ (aus der Tafel.)

$x = a \cos h.\,S$

$= 4,368$ $\quad$ $S = 0,1105+$

$\cos h.\,S = 1,035 -$

Am a. O. ist gefunden $x = 4,36004$. Die Rechnung ist hier ohne sorgfältige Interpolation gemacht.

167. Die Formeln für die Zusammensetzungen der Winkel mittelst der Functionen der ihnen zugeordneten Linien gelten auch für die hyperbolischen Sectoren. Nur muß $\sin \alpha$ mit $\sin \alpha \sqrt{-1}$, und $\tang \alpha$ mit $\tang \alpha . \sqrt{-1}$ vertauscht werden. So ist $\cos hyp (A+B) = \cos h.\,A . \cos h.\,B + \sin h.\,A . \sin h.\,B$, welcher Werth von dem $\cos (A+B)$ am Kreise in dem Vorzeichen des zweyten Gliedes verschieden ist, weil $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ ist. S. Lambert a. a. O. in den Tafeln. Tab. XVIII.

IX. Analytische Werthe der Sinus von 3 zu 3 Graden.

168. Die analytischen Werthe der Sinus sind vollständige, wenn gleich bis auf zwey derselben, den $\sin 90°$ und $\sin 30°$, irrationale, und daher bey analytischen Rechnungen brauchbar; auch können sie, wo die Irrationalität nicht zu verwickelt wird, zur Berechnung der numerischen Werthe als Fundamentalwerthe dienen.

Hier folgen diese Werthe in einer gewissen systematischen Abtheilung.

I.

$\sin 90° = 1.$
$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}.$
$\sin 30° = \frac{1}{2}.$
$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$
$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.$
$\sin 75° = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}.$

II.

$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$
$\sin 54° = \frac{1}{4}\sqrt{(6+2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}.$
$\sin 18° = \frac{1}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}.$
$\sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$

III.

$\sin 81° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$
$\sin 9° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$
$\sin 63° = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$
$\sin 27° = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$

IV.

$\sin 66° = \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}.$
$\sin 24° = \frac{1}{8}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$
$\sin 6° = \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}.$
$\sin 84° = \frac{1}{8}\sqrt{(18+6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}.$
$\sin 48° = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(18-6\sqrt{5})}.$
$\sin 42° = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})}.$
$\sin 12° = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{(18-6\sqrt{5})}.$
$\sin 78° = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})}.$

V.

$$\sin 51° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

$$\sin 39° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 21° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 69° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(9+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

$$\sin 33° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

$$\sin 57° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 3° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})}.$$

$$\sin 87° = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(9-3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

Die Wurzelgrößen, in welchen die Größe unter dem Wurzelzeichen den Factor $3 \pm \sqrt{5}$ hat, lassen sich in zwey Wurzeln zerlegen, da $\sqrt{(3 \pm \sqrt{5})} = \sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

169. Die Herleitung dieser Formeln beruht auf den Werthen von sin 45°, sin 30°, sin 36°, und den Formeln von der Zusammensetzung der Sinus. Daß $\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und $\sin 30° = \frac{1}{2}$ ist, ist offenbar. Der sin 15° und sin 75° (= cos 15°) werden entweder durch die Formeln in (36.) aus cos 30° oder sin 60° gefunden, oder durch die in (24.), da 15° = 45° − 30°, und 75° = 45° + 30°. Aus dem Binomium $2 \pm \sqrt{3}$ läßt sich die Quadratwurzel in der angegebenen Form ausziehen, s. Wurzel.

170. Der Sinus von 36° ist die halbe Seite des ordentlichen Fünfecks, und kann aus einer geometrischen Construction hergeleitet werden. (S. Vieleck). Oder man setze in (65.) den Winkel $\Phi = \frac{180°}{5}$, so ist $\sin 5\Phi = 0$, also $0 = 5y - 20y^3 + 16y^5$, wo y die Werthe der Sinus von $\frac{180}{5}$ Gr. sind. Es müssen hier alle Winkel, deren Sinus 0 ist, in 5 Theile getheilt werden. Die Werthe von $\sin \Phi$ oder y sind demnach, 0, $\sin 36°$, $\sin 72°$, $\sin 108°$ ($= \sin 72°$), $\sin 144°$ ($= \sin 72°$); $\sin 180°$; $\sin 216°$ ($= -\sin 36°$); $\sin 252°$ ($= -\sin 72°$). So sind die Wurzeln jener Gleichung, $0; \pm \sin 36°; \pm \sin 72°$. Nun ist, nachdem sie mit y dividirt ist, $16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$, also (Gleichung, 33.) $y^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5}$, und $y = \frac{1}{4}\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})}$. Das obere Vorzeichen giebt den $\sin 72°$, das untere den $\sin 36°$. Diese Werthe sind auch negativ zu nehmen, da die Wurzel aus y^2 beide Vorzeichen erhalten muß. Zu gegenwärtiger Absicht werden sie nicht gebraucht.

Der $\sin 54°$ ist der $\cos 36°$, und $\sin 18° = \cos 72°$. Sie werden durch die Formel $\cos A = \sqrt{(1 - \sin A^2)}$ gefunden. Aus dem Binomium $6 \pm 2\sqrt{5}$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{5} \pm 1$, da 5 das Product zweyer Zahlen 1 und 5 ist, deren Summe $= 6$. Oder aus $\cos 36° = \sin 54°$ werden $\sin 18°$ und $\cos 18° = \sin 72°$ durch die Formeln in (36.) hergeleitet.

171. Die Formeln in dem Abschnitte III. werden mittelst der Verbindung der Winkel 36° und 18° mit 45° gefunden; die Formeln in IV. mittelst der Verbindung der Winkel in II. mit 30°, und 18° mit 60°; die Formeln in V. mittelst der Zusammensetzung der Winkel in III. mit 30° oder 60°. Es ist nämlich $81 - 30 = 51$; $30 + 9 = 39$; $30 - 9 = 21$; $63 - 30 = 33$; $30 + 27 = 57$; $30 - 27 = 3$; $60 + 27 = 87$; $60 + 9 = 69$.

172. Die analytischen Werthe der Sinus der Winkel von der Form $\frac{3(2m+1)}{2}$ in Graden werden zum

Theil sehr zusammengesetzt. Die einfachern mögen hier noch Platz finden.

$$\sin 22°\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$
$$\sin 67°\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}.$$
$$\sin 7°\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(6-3\sqrt{2})}.$$
$$\sin 82°\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(6+3\sqrt{2})}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$
$$\sin 37°\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(6+3\sqrt{2})}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$
$$\sin 52°\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{2}+2\sqrt{6})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(6-3\sqrt{2})}.$$

Die Sinus von $22°\frac{1}{2}$ und $67°\frac{1}{2}$ werden aus dem cos 45° durch die Formeln (36.) gefunden. Die zuerst gesetzten Werthe der übrigen vier Sinus werden mittelst derselben Formeln aus dem cos 15° und cos 75° erhalten, die beygefügten Werthe aber aus der Verbindung des Winkels $\pm 22°\frac{1}{2}$ mit 30° und 60°.

173. Wallis hat in seinem tractatus de sectionibus angularibus Opp. Th II. die analytischen Werthe der Chorden von $1\frac{1}{2}$ zu $1\frac{1}{2}$ Grad berechnet. Das Verzeichniß derselben steht daselbst pag. 586 — 589. Die Chorden sind alle als Quadratwurzeln dargestellt. Es ist nämlich $4 \sin A^2 = 2 - 2\cos A = 2 - 2\sin(90° - A)$, das ist, $(\text{chord } A)^2 = 2 - \text{chord compl. } A$.

X. Formeln für die Sinus und Cosinus der Winkel von der Form $\frac{A}{2^n}$.

174. Es sey der Sinus eines Bogens $= a$, der Sinus der Hälfte $= b$; des Viertheils $= c$; des Acht-

theils $= d$, u. s. w. Ferner seyn die Cosinus dieser Bogen $= \alpha; \beta; \gamma; \delta$; etc. Nun ist $2b^2 = 1 - \sqrt{(1 - a^2)}$ aus (36), oder $4b^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4a^2)}$; und $4c^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4b^2)}$; $4d^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4c^2)}$; u. s. f. Daher ist

$$2b = \sqrt{(2 - \sqrt{(4 - 4a^2)})}.$$
$$2c = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - 4a^2)})})}.$$
$$2d = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - 4a^2)})})})}.$$
$$2e = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(4 - 4a^2)})})})})}.$$

etc.

175. Ferner ist $4\beta^2 = 2 + 2\alpha$; $4\gamma^2 = 2 + 2\beta$; $4\delta^2 = 2 + 2\gamma$; u. s. f. also

$$2\beta = \sqrt{(2 + 2\alpha)}.$$
$$2\gamma = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\alpha)})}.$$
$$2\delta = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\alpha)})})}.$$
$$2\varepsilon = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + 2\alpha)})})})}.$$

u. s. f.

176. Die doppelten Sinus, 2a, 2b, 2c, etc. sind die Chorden des doppelten von den Winkeln, wozu die Sinus a, b, c, etc. gehören. Vermittelst dieser sehr beschwerlichen Formeln hat Ludolph von Ceulen den Umfang des Kreises berechnet. Es sey $a = \sin 45°$, also $2a = \text{chord } 90°$, so ist die Seite des eingeschriebenen 64 Ecks, $2e = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})})}$. Ludolph berechnete nach einer solchen Formel die Seite des eingeschriebenen Vielecks von 1073741824 Seiten, wozu 28 Halbirungen erforderlich sind.

177. Es sey $a = \frac{1}{2}$, nämlich die halbe Seite des Sechsecks, so ist die Seite des eingeschriebenen 96 Ecks $2e = \sqrt{(2 - \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})}$. Das ist die von Archimedes berechnete Seite. Ludolph hat durch fortgesetzte Halbirung des Bogens von 60 Gr. die Seite des eingeschriebenen Vielecks von 6442450944 Seiten

durch 30 Halbirungen mittelſt einer ſolchen Formel berechnet. Endlich berechnete er durch die fortgeſetzte Halbirung des Bogens von 6 Gr. die Seite des eingeſchriebenen Vielecks von 322122547 20 Seiten durch 29 Theilungen. Hier iſt $a = \sin 3°$; und $4(1-a^2) = (4\cos 3°)^2 = 2 + 2\cos 6° = 2 + \sqrt{(8 + 2\cos 12°)}$. Es iſt $2\cos 12° = 2\sin 78° = \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; alſo $2 + 2\cos 12° = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})}$, ſo daß $\sqrt{(4 - 4a^2)} = \sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})})})}$. Dieſen Ausdruck hat Ludolph in ſeinen Formeln für die Chorden bey dieſer Rechnung.

178. Vieta hat aus den Formeln für die Coſinus der Winkel von der Form $\frac{A}{2^n}$ einen Ausdruck des Inhalts des Kreiſes hergeleitet. Opp. p. 400. Es ſey der Centriwinkel eines regulären eingeſchriebenen Vielecks $= A$; die Anzahl der Seiten $= n$, der Halbmeſſer $= r$; ſo iſt der Inhalt $= n \cdot r\sin\frac{1}{2}A \cdot r\cos\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}nr^2\sin A$. Der Inhalt des eingeſchriebenen Vielecks von $2n$ Seiten iſt demnach $= nr^2\sin\frac{1}{2}A$. Es verhält ſich alſo der Inhalt des Vielecks von n Seiten zu dem von $2n$ Seiten wie $\cos\frac{1}{2}A : 1$; das von $2n$ Seiten zu dem von $4n$ Seiten wie $\cos\frac{1}{4}A : 1$; das von $4n$ Seiten zu dem von $8n$ Seiten wie $\cos\frac{1}{8}A : 1$; u. ſ. f. Daher verhält ſich das Vieleck von n Seiten zu dem von $2^p n$ Seiten wie das Product $\cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{4}A \cdot \cos\frac{1}{8}A \cdot \ldots \cos\frac{A}{2^p} : 1$.

Da der Kreis die Gränze der Vielecke iſt, ſo verhält ſich das Vieleck von n Seiten zu der Kreisfläche wie das Product $\cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{4}A \cdot \cos\frac{1}{8}A$, etc. in infin. : 1.

Es ſey $n = 4$; ſo iſt $A = 90°$ und $\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}}$. In den Formeln für die Coſinus der ſucceſſiv halbirten Winkel iſt nun

$\alpha = V\frac{1}{2}$; $\beta = V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V\frac{1}{2})$;
$\gamma = V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V\frac{1}{2}))$;
$\delta = V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V\frac{1}{2})))$;
$\varepsilon = V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V\frac{1}{2}))))$
etc.

und das eingeschriebene Viereck (= 2) verhält sich zu
Kreisfläche wie $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.$ etc.: 1.

Bey Vieta fehlt durchgehends der Factor $\frac{1}{2}$ vor
Wurzelzeichen. Für den Durchmesser = 2 findet er
Chorde des Complements von 45° = $V(2 + V$
von $22°\frac{1}{2} = V(2 + V(2 + V2))$; von $11°\frac{1}{4}$
$V(2 + V(2 + V(2 + V2)))$, u. s. f. Für den Du
messer = 1 sind diese Chorden durch 2 zu dividiren,
ist, unter jedem Wurzelzeichen durch 4. So
$\frac{1}{2}V(2 + V2) = V(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}V2) = V(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}V$
und so mit den übrigen allen. Diese Chorden sind
dann Cosinus in einem Kreise, der den Durchmesser i
Kreises zum Halbmesser hat. Montucla hat (Hist.
Mathem. T. I. p. 611.) die Formel so abgeschrieben
sie bey Vieta steht.

X. Zugabe einiger geometrischen Constructionen

179. Zur Versinnlichung geometrisch-analytisc
Formeln ist es dienlich sie, wo es bequem angeht, b
durch die Geometrie zu finden. Zu diesem Zwecke,
auch zur Übung in der Geometrie sind hier die Construc
nen von einigen der obigen Formeln beygefügt.

180. Es ist (Fig. 62.) AB der Durchmesser ei
Kreises, CD, EF sind zwey parallele Chorden, und I
die Chorde von dem Bogen DAE, als der Summe
DAC und CE. Der Durchmesser AB sey auf d
beiden parallelen Chorden senkrecht, daher er sie in G
H halbirt. Man nehme den Bogen AK = CE
DF, welche sich gleich sind, und ziehe BK und A
Die Chorde DE schneide GH in L, so sind die Drey

DGL, EHL dem BKA ähnlich, wegen der rechten Winkel bey G, H, K, und der gleichen spitzen bey D, E, B, die auf gleich großen Bogen stehen. Es ist also

$$BK:AB = GD:DL = EH:EL,$$

und daher

$$BK \times DL = AB \times GD,$$
$$BK \times EL = AB \times EH.$$

Daraus ist durch Addition, und Multiplication mit 2,

$$2BK \times ED = AB(CD + EF).$$

Diese Formel ist dieselbe mit der ersten in (129*). Daselbst ist ω, was hier der Bogen AK oder EC ist.

Nimmt man die Hälften der Chorden CD und EF, so ist

$$BK \times ED = AB(CG + EH).$$

Dieses ist die Formel in (58.). Denn CG, $\frac{1}{2}$ED, EH, sind die Sinus der Bogen, AC, $\frac{1}{2}$DAE, AE, für den Halbmesser AO oder $\frac{1}{2}$AB. Der Unterschied des ersten und zweyten dieser Bogen, so wie des zweyten und dritten, ist $= \frac{1}{2}$CE oder $\frac{1}{2}$AK, das Maaß des Winkels B, dessen Cosinus BK für den Halbmesser AB ist. Es ist hier der zu AE gehörige Winkel am Mittelpuncte was in (58.) der Winkel $a + nb$ ist, und B, was daselbst b heißt; auch ist $\cos B = \frac{BK}{AB}$.

181. Man ziehe den Durchmesser DOP, und die Chorden PE, PC, von welchen jene auf DE, diese auf DC senkrecht steht. Die Chorde PC schneide EF in M. Da EF parallel mit CD ist, so ist PM senkrecht auf EF, da auch Winkel EPC auf dem Bogen EC steht, so ist Winkel EPC = ABK, und es ist

$$AB : AK = EP : EM.$$

Noch ziehe man DN senkrecht auf EF, so ist MH = NH,

also $EM = FN$. Nun ist $EM + FN = EF - CD$, folglich ist

$$AB : AK = 2EP : EF - CD,$$

oder

$$2AK \cdot EP = AB\,(EF - CD).$$

Diese Formel giebt den Unterschied der Chorden mittelst der Chorde des Complements von dem arithmetisch mittlern Winkel, so wie jene erstere die Summe durch die Chorde dieses Winkels selbst.

Nimmt man die Hälften von den beiden Chorden, EF, CD, und von EP, so entsteht die Formel in (59.)

Es ist $\frac{AK}{AB} = \sin B$ = Sinus des halben Unterschiedes der zu CG, EH gehörigen Winkel.

182. Wenn CD, DE, EF als Chorden der Complemente ihrer Bogen zum Halbkreise betrachtet werden, so werden aus den hier gefundenen Formeln die in (60, 61.) erhalten.

183. Die Secante CF des Bogens AD (Fig. 63.) ist gleich der Summe von der Tangente AF desselben Bogens und der Tangente AG des halben Complements DE oder BE zum Quadranten AB.

Es sey AB der Quadrant eines Kreises, dessen Mittelpunct C ist, und $DE = EB$. Man mache den Winkel $ACG = BCE$, und ziehe CG an die berührende AG, der Verlängerung von AF in G. Nun ist $GCD + DCE = R$, und $AGC + GCA = R$. Da $DCE = GCA$, so ist $GCD = AGC$ oder FGC, also sind in dem Dreyeck CFG die Seiten CF, GF gleich groß.

184. Die Summe der Secante und Tangente eines Bogens ist gleich der Tangente von der Summe des Bogens und des halben Complements.

Es sey AB (Fig. 64.) der Quadrant eines Kreises, dessen Mittelpunct C ist. In diesem nehme man irgend einen Bogen AD, und halbire dessen Complement DB in E. Die Tangente des Bogens AD ist AF, des Bo-

gens AD ist AF, des Bogens AE ist AG. Da Winkel AGC = GCB = DCE, so ist CF = FG, also AG = AF + FC.

XI. Notizen zur Geschichte der Goniometrie.

Die Goniometrie ist ein so wichtiges System von Sätzen aus der analytischen Geometrie, daß es der Mühe werth ist, auch die ältern Formen derselben und der Methoden aufzusuchen. Die ganz geometrische Entwickelung in den frühern Schriften ist zwar oft etwas umständlich und mühsam, man lernt aber doch dabey den wirklichen Gang der Erfindung kennen, und ersieht den unmittelbaren Zusammenhang der Sätze mit den Elementen der Geometrie. Nach der in diesem Artikel gebrauchten Methode ist aus dem einzigen zum Grunde gelegten geometrischen Satze alles folgende bloß durch Rechnung hergeleitet.

In dem Artikel, Cyklotechnie, ist schon dasjenige, was zur Geschichte der Berechnung der goniometrischen Linien gehört, angeführt worden. Hier wird nur ein gleichsam chronologisches Verzeichniß der wichtigsten goniometrischen Sätze gegeben werden können. Die Methoden selbst zu studiren, bleibt den Liebhabern der mathematischen Archäologie überlassen.

Daß Archimedes schon die Summe der Chorden in dem ganzen Kreise oder einem Abschnitte desselben, wenn die Bogen gleichförmig zunehmen, bestimmt hat, ist in (65, 70.) bemerkt.

Ptolemäus hat in dem 1. B. seines Almagests zwey Sätze über die Zusammensetzung der Bogen mittelst ihrer Chorden auf eine Art erwiesen, die leichter ist als die in neuern Lehrbüchern, z. B. dem Segnerischen und Kästnerischen, angewandte. Es ist im wesentlichen dieselbe mit der in diesem Artikel (26.) gebrauchten. Für die Chorde der Summe zweyer Bogen hat Ptolemäus keine besondre Formel, sondern läßt sie aus der Chorde des Complements der Summe berechnen. Auch für die Chorde des Com-

plements eines Unterschiedes zweyer Bogen hat er keine besondere Formel gesucht. Zur Halbirung der Bogen gebraucht er den Satz, daß die Chorde eines Bogens A die mittlere proportionale ist zwischen dem Durchmesser und dem halben Unterschiede des Durchmessers von der Chorde des Complements des Bogens 2A zum Halbkreise *). Ptolemäus mag die Sätze von andern genommen haben, da ein älterer Astronom, Menelaus, sechs Bücher von den Chorden im Kreise geschrieben hat.

Regiomontanus giebt in seinem Werke über die Dreyecke (de triangulis omnimodis libri quinque) vielerley Auflösungen (auch einige algebraische in bestimmten Zahlen) die ebenen und sphärischen Dreyecke betreffend. Doch kommt von goniometrischen Sätzen nur folgendes darin vor: aus dem Sinus eines Bogens und dem Verhältnisse der Sinus der Bogen, wovon jener Bogen die Summe oder der Unterschied ist, die Bogen, das ist ihre Verhältnisse zu jenem zu finden. Er zeigt, wie die Rechnung zufolge der geometrischen Construction angestellt wird. (Vergl. 29.)

Rhäticus zeigt in der Fabrica canonis doctrinae triangulorum durch eine geometrische Construction, wie die Sinus einer arithmetischen Reihe von Winkeln nach einander gefunden werden, wenn sie von den ersten beiden Winkeln bekannt sind, auf zweyerley Art. Das erstere Verfahren giebt die Formeln:

$$\sin n\varphi = 2\cos\varphi . \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi;$$

$$\cos n\varphi = \cos(n-2)\varphi - 2\sin\varphi . \sin(n-1)\varphi.$$

Er nimmt den ersten Winkel gleich dem Unterschiede in der Reihe der Winkel. Nach derselben Art können aber

*) Dieser Satz wird aus der in (25) angeführten Eigenschaft des Kreises leicht bewiesen. Man nehme in (Fig. 59.) die Bogen AB. CD gleich groß, so ist $AB^2 + AD \times BC = BD^2$, und $2AB^2 + AD \times BC = AD^2$, also $AB^2 = AD \times \frac{1}{2}(AD - BC)$, wo BC die Chorde des Complements von 2AB zum halben Umfange ist.

auch die Sinus und Cosinus gefunden werden, wenn der erste Winkel irgend einer ist.

Das zweyte Verfahren giebt die Formeln:

$$\sin(A+n\varphi) = \sin(A+(n-2)\varphi) + 2\sin\varphi\,.\cos(A+(n-1)\varphi);$$

$$\cos(A+n\varphi) = \cos(A+(n-2)\varphi) - 2\sin\varphi\,.\sin(A+(n-1)\varphi).$$

Die zweyte dieser Formeln ist von der für $\cos n\varphi$ nicht weiter verschieden, als daß der erste Winkel der Reihe nicht mit dem Unterschiede gleich groß genommen wird. Auf demselben Wege findet sich auch die Formel,

$$\cos(A+n\varphi) = 2\cos\varphi\,.\cos(A+(n-1)\varphi) - \cos(A+(n-2)\varphi).$$

Die in (180, 181.) gegebenen Beweise sind im wesentlichen mit denen von Rhäticus geführten einerley; aber kürzer gefaßt und deutlicher.

Pitiscus führt in dem 5. Buche seiner Trigonometrie (1600.) einige Sätze an, die zur Abkürzung bey der Berechnung und bey dem Gebrauch des trigonometrischen Canons dienen.

I. $\sin(60^\circ - A) - \sin(60^\circ + A) = \sin A.$

II. $\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B = 2\operatorname{tang}(A-B)$, wenn $A+B = 90^\circ$ sind.

III. $\sec A = \operatorname{tang} A + \operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}A).$

IV. $\sec A + \operatorname{tang} A = \operatorname{tang}(\frac{1}{2}A + 45^\circ).$

Bey dem ersten und dritten Satze citirt er Fink und Landsberg, bey dem zweyten Adrianus Romanus. Die geometrischen Beweise sind in (183. 184.) mitgetheilt.

Die Sätze (27.) wurden vor der Einführung der Logarithmen gebraucht, um in trigonometrischen Rechnungen Producte in Summen oder Unterschiede zu verwandeln. Man nannte dieses, prostaphäretisch rechnen, welches sowohl das Addiren als Subtrahiren begriff. Dieses war zu jener Zeit ein wichtiges Erleichterungsmittel.

Vieta fand die Formeln für die Chorden der Vielfachen eines Bogens und die Chorden der Comple-

mente zum Halbkreiſe durch die Chorde des einfachen oder diejenige des Complements. (Theoremata ad angulares ſectiones in der Ausgabe ſeiner Schriften durch van Schooten, pag. 295. ff.). Er nennt die Chorde perpendiculum, die Chorde des Complements baſis. Beide ſtehen auf einander ſenkrecht. Die Baſis eines vielfachen Bogens anzugeben ſetzt er den Halbmeſſer $= 1$, die Baſis des einfachen $= N$ (das bedeutet Numerus), und eine Reihe von ſtetigen proportionalen, $1 : N : Q : C : QQ : QC : CC : QQC : QCC : CCC$; etc. wo $Q = N^2$, $C = N^3$ iſt. Dann ſetzt er aus dieſen Gliedern die Baſis des vielfachen Bogens zuſammen. Z. B. Baſis anguli noncupli iſt (vergl. 130. V.)

$$1CCC - 9QQC + 27QC - 30C + 9N.$$

Ferner ſetzt er die Chorde des einfachen Bogens $= 1$, des zweyfachen $= N$, und formirt die geometriſche Reihe, $1 : N : Q : C : QQ : QC : CC$: etc. Aus den Gliedern dieſer Reihe ſetzt er die Chorden (perpendicula) der vielfachen Bogen zuſammen, z. B. die Chorde des zehnfachen Bogens,

$$1CCC - 8QQC + 21QC - 20C + 5N.$$

übereinſtimmig mit VI. in (130.).

Noch ſetzt Vieta den Durchmeſſer $= 2$, die Chorde des einfachen Bogens $= N$, und ſetzt aus den Gliedern der geometriſchen Reihe, $1 : N : Q : C$; etc. theils die Baſis, theils die Perpendikel oder Chorden der vielfachen Bogen zuſammen, jene bey geraden Vielfachen, dieſe bey ungeraden. Dieſe Formeln beruhen auf den beiden in (58, 61.), nämlich

$$\sin n\varphi = 2 \sin\varphi . \cos(n-1)\varphi + \sin(n-2)\varphi;$$
$$\cos n\varphi = \cos(n-2)\varphi - 2 \sin\varphi . \sin(n-1)\varphi,$$

woraus erhalten wird,

$$\mathrm{ch}.n\omega = \mathrm{ch}.\omega . \mathrm{chc}.(n-1)\omega + \mathrm{ch}.(n-2)\omega;$$
$$\mathrm{chc}.n\omega = \mathrm{chc}.(n-2)\omega - \mathrm{ch}.\omega . \mathrm{ch}.(n-1)\omega.$$

Setzt man in der Formel für die Chorde ſucceſſiv die ungeraden Zahlen, und in der Formel für die Chorde des Complements die geraden Zahlen, ſo ergeben ſich die

Formeln bey Vieta. Montucla führt in seiner Geschichte der Mathematik, Th. I. S. 608. 2te Ausg. diese Formeln an, als wenn sie alle für die Chorde des vielfachen Winkels gehörten, und macht wegen der, zum Theil unrichtig gedruckten Vorzeichen, eine nicht zutreffende Bemerkung.

Die Formel für $\sin n\varphi$ führt auf die Werthe in (86 und 89.), wenn für n alle ganze Zahlen gesetzt werden. Die Formel für $\cos n\varphi$ giebt, wenn n gerade genommen wird, Werthe, die in der allgemeinen Formel für $\cos n\varphi$ in (105.) enthalten sind.

Vieta fand auch die Formeln (97.) für die Zusammensetzung des Sinus und Cosinus eines vielfachen Winkels aus den Potenzen des Sinus und Cosinus des einfachen. Wie sehr er diese schätzte, zeigt die Überschrift des dritten Theorems in dem Responso ad Adriani Romani problema, Opp. p. 315. Sie lautet so: Cujus inventi laetitia adfectus, o Diva Melusinis, tibi oves centum pro una Pythagoraea immolavi. Er giebt den Sätzen zweyerley Formen, die eine wie die in (97.), nur in Worten mit den ihm eigenen Kunstausdrücken, die andere durch Verhältnisse der Sinus und Cosinus des vielfachen Winkels.

Vieta hat zwar eingesehen, daß die positiven Wurzeln der Gleichung für die Chorde des einfachen Bogens, wenn die Chorde des vielfachen gegeben wird, Chorden von Winkeln sind, die durch Theilung des mittelbar durch die Chorde gegebenen Winkels entstehen, allein die negativen Wurzeln, die auf gleiche Art sich finden, hat er aus der Acht gelassen. So giebt er (Opp. p. 320.) den Gleichungen für die Chorde des dritten, fünften und siebenten Theils eines durch die Chorde gegebenen Winkels nur zwey drey, vier Wurzeln. S. Algebra, Th. I. S. 46.

Jacob Bernoulli war von seinem Bruder, bey Veranlassung einer Untersuchung über quadrirbare Räume in der Cykloide, aufgefordert worden, eine Formel für den Sinus eines Bogens zu finden, der zu einem andern, durch seinen Sinus gegebenen, Bogen das Ver-

hältniß n : 1 hat, wobey n irgend eine Gattung von Zahl bedeutet. Dieser fand (Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. Opp. T. II nr. 97.) auf eine künstliche Art, allein nur für ganze Vielfache, wenn x die Chorde des einfachen Bogens, a die Chorde des nfachen, b die Chorde des Complements des vielfachen ist, für den Durchmesser = 2, daß

$$aa = nnxx - \frac{nn.nn-1.}{3\cdot 4}x^4 + \frac{nn.nn-1.nn-4.}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6$$
$$- \frac{nn.nn-1.nn-4.nn-9.}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 + \text{etc.}$$

$$bb = 4 - nnx^2 + \frac{nn.nn-1.}{3\cdot 4}x^4 - \frac{nn.nn-1.nn-4.}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6$$
$$+ \frac{nn.nn-1.nn-4.nn-9.}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8 - \text{etc.}$$

und hieraus, durch die Methode der unbestimmten,

$$a = nx - \frac{n.nn-1.}{4.6}x^3 + \frac{n.nn-1.nn-9.}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5$$
$$- \frac{n.nn-1.nn-9.nn-25.}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}x^7 + \text{etc.}$$

$$b = 2 - \frac{nn}{4}x^2 + \frac{nn.nn-4.}{4.6.8}x^4 - \frac{nn.nn-4.nn-16.}{4.6.8.10.12}x^6$$
$$+ \frac{nn.nn-4.nn-16.nn-36.}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}x^8 - \text{etc.}$$

Bernoulli verwandelt diese beiden Formeln in folgende

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1\cdot 2}x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6}$$
$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-8} \ldots .$$
$$\ldots \left\{ \begin{matrix} \pm nx \; a \mp \\ \pm nnxx \mp 2 \pm b \end{matrix} \right\} = 0.$$

Die obere Zeile zwischen den Klammern gilt für ein ungerades n, die untere für ein gerades.

Die beiden Formeln sind einerley mit denen in (105.) gefundenen, wenn die Sinus und Cosinus in Chorden verwandelt werden.

Joh. Bernoulli trägt die Formel (130. I.) für die Relation zwischen den Chorden des einfachen und vielfachen Winkels, und die beiden in (97.), worin der Sinus und Cosinus des vielfachen durch Potenzen des Sinus und Cosinus des einfachen ausgedruckt werden, als von ihm erfundene vor, in den Act. Er. 1701. Opp. T. I. nr. 69. Die beiden letztern Formeln hatte aber ja schon Vieta gefunden, nur daß dieser den Exponenten des vielfachen bloß für eine ganze Zahl nahm, dagegen Bernoulli sagt, daß sie auch für gebrochne, ja irrationale Vielfache des Winkels gelten, da die erstere nur für ganze Vielfache anwendbar sey. Sonst hatte ja auch Vieta mehrerley Formeln für die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gefunden. In einem Aufsatze, Act. Er. 1722. Opp. T. II. nr. 127. behauptet Bernoulli, daß vor ihm niemand eine allgemeine Formel für die unbestimmte Theilung oder Vervielfachung der Winkel nach jedem Exponenten des Verhältnisses gegeben hätte. Den Beweis habe er aus besondern Ursachen zurückgehalten. Der Beweis ist in seinen Werken nicht zu finden. In einem nachgelassenen Aufsatze, Opp. T. IV. pag. 144. sagt er, daß er die beiden gedachten Formeln ohne Differentialrechnung, aus der Beschaffenheit der Bogen (ex ipsis visceribus et intima natura arcuum) hergeleitet habe.

In den Act. Erud. 1712. Opp. T. I. n. 89. gab Joh. Bernoulli die allgemeine Formel für tang $n\varphi$ durch tang φ, hergeleitet aus der Verwandlung der Kreisbogen in unmögliche Logarithmen. Die Bemerkung dieser für manche Fälle zur Abkürzung der Beweise dienenden Verwandtschaft beiderley Größen ist man Joh. Bernoulli schuldig. Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. Opp. T. I. nr. 70. Aus der Formel für tang $n\varphi$ läßt sich

die Allgemeinheit der Formeln für sin n φ und cos n herleiten.

Bis noch in das 18te Jahrhundert hinein ha man die goniometrischen Lehrsätze nur in Beziehung auf ometrische Constructionen entweder in Worten vorgetrag oder symbolische Bezeichnungen nur zur Abkürzung Ausdrucks gebraucht. Friedrich Mayer, Akadem in Petersburg, zeigte zuerst, wie die Buchstabenrechn auf jene Sätze angewandt werden könnte, um sie dadı als analytische Formeln zur Auflösung trigonometrisc Aufgaben zu gebrauchen. (Comm. vet. Ac. Petr T. II. a. a. 1727.). Er fand die Coefficienten in Formeln für die Chorde des vielfachen Winkels durch Chorde des einfachen mittelst der Summirung arithm scher Reihen höherer Ordnungen, aus den berechn Gliedern in den erstern Stellen, und schloß daraus auf Allgemeinheit, sogar für gebrochne Exponenten. Com Petr. T. III.

Euler hat in der Folge die Form dieser an tisch-goniometrischen Rechnung sehr verbessert und schmeidig gemacht. Zur vollkommenen Anschaulich dienen die von ihm eingeführten Bezeichnungen, sin cos φ, tang φ, sec φ u. dergl. wodurch man mit Symbol zugleich das Bezeichnete unterscheidend erke Daß man die Verhältnisse der Winkel dabey zugleich geben kann, wie in sin n φ, cos m φ, u. dergl. erleid die Übersicht der Rechnung gar sehr. Albert Gir im Anfang des XVII. Jahrhunderts hat schon zu For der sphärischen Trigonometrie dergleichen Bezeichnu gebraucht, als tan H, sec A, tan a, wo H die Hy tenuse eines sphärischen Dreyecks, A einen Winkel, a sen Ergänzung zum Rechten bedeuten (Kästners Ges Math. III. S. 109.). Allein Girards Schrift ist weder zu wenig bekannt geworden, oder man hat Bezeichnungen bloß als Abkürzungen angesehen, de chen jeder Geometer nach seiner Art macht, was sie in der That nur sind. Euler aber betrachtete die g metrischen Größen als Functionen der Winkel, di

andere analytiſche Functionen durch Rechnung mit einander verbunden werden können, die eine Bezeichnung erfordern, wodurch ihre Relation zu den Winkeln deutlich ins Auge fällt, ſo daß man auch die neuen Relationen zwiſchen den Winkeln und ihren zugehörigen Größen, die aus den angenommenen hervorgehen, daraus auf eine gleichmäßige Art herleiten könne. Als Functionen der Winkel müſſen die goniometriſchen Größen durch die Winkel beſtimmte Werthe erhalten Das geſchieht dadurch, daß der Halbmeſſer zur Einheit genommen wird, oder daß man nur auf die Verhältniſſe zum Halbmeſſer ſieht, nicht auf die abſolute Quantität der linearischen Größen. Auch dieſes iſt man Eulern ſchuldig. Nach der alten Anſicht der goniometriſchen Functionen waren es bloße Linien, die man unter ſich und mit dem Halbmeſſer zu Gleichungen verknüpfte, auch mit andern Linien in Verbindung brachte, und hier den Halbmeſſer zur Einheit nehmen, war nur Erſparung im Schreiben welche die Gleichartigkeit (Homogeneität) der Glieder zerſtörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, ſind ſie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, die mit Beybehaltung ihrer urſprünglichen Form ſehr mannichfaltige Verwandlungen zulaſſen, und durch ſich ſelbſt darbieten. Euler ſelbſt, ſo anſpruchlos er bey allen ſeinen Entdeckungen und Verbeſſerungen in der Mathematik iſt, ſcheint doch auf die von ihm in die Analyſis eingeführte Rechnung mit den Functionen der Winkel einen beſondern Werth zu legen. In der Abhandlung, ſubſidium calculi ſinuum, Comm Petr. novi. T. V. ſagt er, ſo wie Joh. Bernoulli die Logarithmen durch die Exponentialrechnung zu analytiſchen Größen gemacht habe, ſo habe auch er die Sinus und Tangenten der Winkel zuerſt als Rechnungsgrößen behandelt, dergeſtalt daß man mit ihnen wie mit andern Größen ohne Schwierigkeit verfahren könne. Wenn gleich dieſe Sache nicht von großer Wichtigkeit ſcheinen möchte, da ſie größtentheils auf den Bezeichnungen beruhe, deren er ſich für dieſe Größen bediene, und die Regeln ſie ſowohl durch Differentiation als Integration zu

entwickeln, längſt gefunden ſeyn, ſo habe doch eben dieſe Bezeichnungsart hernach der ganzen Analyſis ſehr beträchtliche Hülfsmittel verſchafft, und ein faſt neues Feld eröffnet, welches mit großem Vortheil von den Geometern bearbeitet worden ſey. Da die Analyſis insbeſondere durch ihre Bezeichnungsart ſo viel Großes leiſte, ſo begreife man, wie eine geſchickte Einführung der Sinus in den Algorithmus ſo nützlich geworden ſey. Er führt hierauf noch an, daß durch dieſes Hülfsmittel ſchwere Unterſuchungen ſehr erleichtert werden, beſonders bey Aufgaben aus der Mechanik, und vorzüglich in der theoretiſchen Aſtronomie, wo man ohne die Hülfe der Rechnung mit den Winkel-Functionen gar nicht fertig werden könne.

Eulers Behandlung dieſes Algorithmus lernt man am beſten aus ſeiner Introductio in Analyſin infin. und ſeinen Inſtitt. Calculi differentialis kennen. Der erſte Theil des erſtern Werkes enthält größtentheils Cyklometrie und Goniometrie mit fruchtbaren neuen Anwendungen auf die Analyſis, als Zerlegung einer Function in Factoren, Summirungen von Reihen, Entwickelung gebrochner Functionen. In dem zweyten Theile der Differentialrechnung ſind ebenfalls mancherley Verknüpfungen der höhern Analyſis, und insbeſondere der Lehre von den Reihen mit den circularen Functionen anzutreffen. Die Differenzenrechnung wird auf die Entwickelung dieſer Functionen angewandt. Die Tangente und Cotangente eines Winkels werden durch Reihen mittelſt der Bernoulliſchen Zahlen ausgedruckt.

In den Schriften der Petersburger Akademie der Wiſſenſchaften ſind noch manche hierher gehörige Abhandlungen von Euler anzutreffen. Zur Berechnung des Kreisumfanges in den ältern Comment. T. IX. und in den Novis Actis, T. XI. Zur Berechnung der Sinus und Tangenten, in den ältern Comment. T. XI. den neuern T. V. Über Reihen von Sinus und Coſinus vielfacher Winkel, in den neuern Comment. T. XVIII. in den Novis Actis, T. VII. XI. Über die Werthe von Sinus und Coſinus vielfacher Winkel, in den N. A. T. V. IX.

Über Reihen von Winkeln, deren Tangenten nach einem gewiſſen Geſetze fortſchreiten, in den N. Comm. T. IX. Noch zur Auflöſung der Gleichung, $m : n = \sin m^s : \sin n^s$, in den N. C. T. XVI.

Die Unterſuchung in der vorletzten Abhandlung von einer Fortſchreitung der Tangenten hat Pfaff weiter verfolgt und ſehr allgemein behandelt in ſeinen Disquiſitionibus analyticis, Vol. I. p 1 — 132.

In der Abhandlung, dilucidationes ſuper formulis, quibus ſinus et coſinus angulorum multiplorum exprimi ſolent, N. A. T. IX. zeigt Euler, daß der vollſtändige Werth von $2\cos n\varphi$, wenn $2\cos\varphi = x$ geſetzt iſt

$$2\cos n\varphi =$$

$$x^n - \frac{n}{1}x^{n-2} + \frac{n.n-3.}{1.2}x^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5.}{1.2.3}x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$+x^{-n} + \frac{n}{1}x^{-n-2} + \frac{n.n+3.}{1.2}x^{-n-4} + \frac{n.n+4.n+5.}{1.2.3}x^{-n-6} + \text{etc.}$$

wo die erſtere Reihe die für ganze n in (93.) gefundene iſt, außer daß $2x$ ſtatt x geſetzt worden. Die Doppelreihe gilt für jede Beſchaffenheit der Zahl n. Sie darf auch für ganze n in beiden Theilen ohne Ende fortgeſetzt werden, indem die Glieder von x^{-1} oder x^{-2}, etc. theils Null ſind, theils gegen die Glieder des zweyten Theils der Doppelreihe ſich heben.

Gleichfalls iſt, wenn $y = 2\sin\varphi$, und wie vorher, $x = 2\cos\varphi$, die vollſtändige allgemeine Reihe für $2\sin.n\varphi$ dieſe,

$$2\sin.n\varphi =$$

$$y\left[x^{n-1} - \frac{n-2}{1}x^{n-3} + \frac{n-3.n-4.}{1.2}x^{n-5} - \text{etc.}\right]$$

$$-y\left[x^{-n-1} + \frac{n+2}{1}x^{-n-3} + \frac{n+3.n+4.}{1.2}x^{-n-5} + \text{etc.}\right]$$

Euler hat die Beweise dieser Formeln aus einer sehr entfernten Quelle geschöpft, aus der Integration einer Differentialgleichung vom zweyten Grade. Fuß hat einen unmittelbaren Weg dazu gezeigt, in einer Abhandlung desselben Jahrgangs der Actorum novorum.

In den Novis Actis Acad. Petrop. T. VII. ist eine Abhandlung von Euler über die Summen folgender Reihen enthalten:

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc.} \text{ und}$$

$$B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

die summirbar sind, wenn die Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

es ist. Es seyn A, B, C, D, etc. die Binomial-Coefficienten zu der Potenz $(1 + z)^n$ von 1 an, so ist die Summe der erstern Reihe $= 2^n \cos\frac{1}{2}\varphi^n . \cos\frac{1}{2} n\varphi$, und die Summe der zweyten $= 2^n \cos\frac{1}{2}\varphi^n . \sin\frac{1}{2} n\varphi$. Die Formeln sind für jede Beschaffenheit von n gültig.

Eschenbach gab im J. 1785. zu Leipzig eine kleine Gelegenheitsschrift heraus, worin er die Reihe für tang $n\varphi$ durch tang φ bis zum 13ten Gliede entwickelte. Einen Auszug aus dieser mit großem Fleiße abgefaßten Schrift hat Hindenburg in dem Leipziger Mag. für Mathematik, 2tem St 1786. geliefert, und daselbst noch eine andere (bereits oben Seite 563. erwähnte) Methode als die beiden von Eschenbach gebrauchten sind, gezeigt. Nämlich die Tangente von $n\varphi$ wird durch $n\varphi$ nach der Formel (Cyklometrie, 17.) ausgedruckt, und in dieser der Bogen φ wieder durch seine Tangente (a. a. O. 10.). Hier wird es sogar möglich, ein allgemeines Glied der Reihe anzugeben. Eine kleine Verbesserung in der Form des Gliedes ist in dem Archiv der Mathematik, Heft VII. S. 343. nachgeholt.

Noch eine vierte Methode wäre folgende. In der allgemeinen Gleichung für $\sin n\varphi$ durch $\sin\varphi$ (105.) entwickele man die Potenzen von $\sin\varphi$ in Reihen durch tang φ, vermittelst der Formel, $\sin\varphi = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{(1 + \text{tg}\,\varphi^2)}}$,

(14.). Ferner entwickele man den Werth von tang n φ durch sin n φ, vermittelst der Formel,

$$\text{tang } n\varphi = \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{(1-\sin n\varphi^2)}}.$$

Aus den beiden Reihen, der für sin n φ durch tg φ, und der für tang n φ durch sin nφ wird nach dem incombinatorischer Analysis (39.) gewiesenen Verfahren eine Reihe für tg n φ durch tang φ hergeleitet.

Pfaff zeigt gelegentlich in einer Abhandlung über höhere Differentiale (Hindenburgische Sammlung ꝛc. II. S. 173.), wie aus der Formel für sin n φ (84.), und der für cos n φ (93.) vier andere Formeln ganz leicht hergeleitet werden können, durch Vertauschung von φ mit $\frac{1}{2}\pi - \zeta$. Dadurch erhält man aus der für cos n φ die Formeln in (105.), von welchen die zweyte mit der in (86.) dieselbe ist. Aus der für sin n φ entsteht solchergestalt die in (89.), und noch folgende,

$$\cos n\zeta = \cos\zeta\left(1 - \frac{nn-1}{1.2}\sin\zeta^2 + \frac{nn-1.nn-9}{1.2.3.4}, \sin\zeta^4 - \text{etc.}\right)$$

Der Verfasser beschränkt sich auf ganze Zahlwerthe von n. Da die Formeln (105.) allgemein für jede Beschaffenheit von n gelten, so sind auch jene erstern (84. und 93.) allgemein. Das schließt aber nicht die von Euler und Fuß gefundene Ergänzung aus. Die Form der Reihen in (105.) ist von der Form der Reihen (84. 93.) verschieden. Jene geben den Quotienten sin n φ : sin φ, und cos n φ : sin φ, für ein verschwindendes φ vollständig durch das erste Glied an; diese aber jenen Quotienten, und den, cos n φ : cos φ, durch eine unendliche Reihe, die divergirend seyn, und dadurch einer ebenfalls divergirenden Ergänzung bedürfen mag.

Goniometrisches Instrument, Goniometer, ist überhaupt ein Werkzeug Winkel zu messen, insbesondere die Neigung zweyer Ebenen gegen einander zu erfahren, als zu mineralogischen Untersuchungen die Winkel der Flächen an Krystallen.

Goldne Regel (regula aurea) heißt bey den Rechenmeistern die Vorschrift, wie aus drey Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte gefunden wird, s. Proportion.

Grad ist für Kreisbogen und Winkel der 360ste Theil des Kreisumfanges an jenen, von vier Rechten an diesen. Die Eintheilung des Kreisumfanges in 360 Theile ist uralt, vermuthlich daher entstanden, daß man die Sonnenbahn in 360 Theile eintheilte, so wie man das Jahr in den ältesten Zeiten zu 360 Tagen rechnete. Ptolemäus nennt den 360sten Theil des Kreises einen Theil (μοιρα); der ältere Plinius gebraucht auch allenthalben das Wort partes, wo wir gradus setzen würden. Die neulateinische Bedeutung des Wortes gradus eigentlich Schritt und Stuffe) ist aus der arabischen Sprache entstanden. In dieser heißt Dergeh eine Stuffe von einer Treppe oder Leiter, und dann auch ein astronomischer Grad. Als in dem mittlern Zeitalter die spanischen Mauren ihre Kenntnisse dem östlichern Europa mittheilten, ward das lateinische Wort gradus wegen der Ähnlichkeit mit dem arabischen gebraucht, um astronomische Grade zu bezeichnen. Das französische degré und das englische degree, sind das arabische Wort noch deutlicher. Die Spanier haben das Wort grado in ihrer Sprache eingeführt, vermuthlich als ein arabisch-lateinisches Kunstwort, noch früher als andere Völker. S. Kästners geometrische Abhandlungen. I. Samml. S. 458. Die hier angeführte Etymologie ist demselben von Tychsen zu Göttingen mitgetheilt.

Grad bey Potenzen ist ihr Exponent.

Grad bey algebraischen Gleichungen ist der Exponent der höchsten Potenz, ihrer unbekannten Größe.

La Grange's Lehrsatz ist eine Formel, aus irgend einer Function einer veränderlichen Größe x jede Function von x durch jene Function, vermittelst einer Reihe, auszudrucken, das ist, aus der Function,

$$y = x - z\varphi x,$$

irgend eine Function ψx durch Functionen von y darzuſtellen. Die Symbole, φx, ψx, bedeuten irgend welche Functionen von x, oder Zuſammenſetzungen aus x und gegebenen Größen. Die Größe z iſt von x und y ganz unabhängig, eine beliebig zu beſtimmende Größe, die hier nur durch ein Zeichen für veränderliche Größen angedeutet wird, um ſie von den gegebenen Größen in der Function φx zu unterſcheiden. Sie iſt auch die Progreſſionalgröße, nach welcher die Reihe für ψx geordnet wird, weswegen ſie auch durch ein Symbol für veränderliche Größen bezeichnet werden mag.

Die Formel iſt die allgemeinſte Umkehrungsformel, oder vielmehr Umwandlungsformel. Zugleich iſt ſie die allgemeinſte Differenzenformel, da der erſte Theil von ψx die Function ψy iſt, und alle folgende Theile die Function φy, und davon abgeleitete Functionen enthalten.

1. Zuerſt wird man eine Formel für ψx durch ψy, und eine aus Functionen von x und y zuſammengeſetzte Reihe, zu ſuchen haben, um aus dieſer die Functionen von x wegzuſchaffen, alſo die Auflöſung auf einen Eliminationsprozeß zu bringen.

Es ſey

$$\psi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc},$$
$$\psi y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc}.$$

Beide Reihen bedeuten einerley Functionen der veränderlichen Größe, und ſind nur in der Quantität der veränderlichen Größe verſchieden, wie z. B. die Reihen für $\sin\varphi$ und $\sin\omega$, oder für $\log z$ und $\log u$.

Jede einförmige Function von x kann durch eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende Reihe ausgedruckt werden, weil die Werthe der Functionen als Glieder einer arithmetiſchen Reihe von irgend einem Grade, auch einem unendlich hohen, betrachtet werden können, wozu die Stellenzahlen die Werthe von x ſind. Die Reihe kann wenig convergent ſeyn, oder divergiren. Von der praktiſchen Anwendung iſt aber hier nicht die Frage.

Dazu muß sie eine Form erhalten, daß die Coefficienten sehr abnehmen, und die Werthe von x kleiner als die dazu gehörige Einheit seyn. S. Differenzenrechnung, 16 — 18.

2. Man nehme das Differential, ∂y, unveränderlich, so ist

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = 2C + 6Dy + 12Ey^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = 6D + 24Ey + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = 24E + \text{etc.}$$

Setzt man in den Werthen dieser Differentialquotienten, $y = o$, so ist

$$B = \frac{\partial \psi y}{\partial y}; \qquad C = \frac{\partial^2 \psi y}{1.2\,\partial y^2}$$

$$D = \frac{\partial^3 \psi y}{1.2.3\,\partial y^3}; \qquad E = \frac{\partial^4 \psi y}{1.2.3.4\,\partial y^4};$$

u. s. f.

Bey dieser Annahme ist $A = \psi y$. Setzt man nun $x = y + z\varphi x$, so ist, bey derselben Annahme, $x = z\varphi x$. Folglich ist

$$\psi x = \psi y + z\varphi x \cdot \frac{\partial \psi y}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi y}{1.2.\partial y^2}$$

$$+ z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 \psi y}{1.2.3\,\partial y^3} + z^4(\varphi x)^4 \cdot \frac{\partial^4 \psi y}{1.2.3.4\,\partial y^4}$$

$$+ \text{etc.}$$

In der Encyclopédie méthodique (art. Series) wird dieser Satz d'Alembert zugeschrieben.

Re

3. Nun sind aus dieser Formel die Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc. heraus zu schaffen. Dieselben eine ähnliche Form, wie die Functionen ψx, da Beschaffenheit dieser Function ganz unbestimmt gelas ist, so daß statt der Function ψy und deren Differen len nun φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. nach der Reihe setzen sind. Zur Abkürzung setze man $\varphi y = u$, so ist

$$\varphi x = u + z\varphi x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{2\,\partial y^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 u}{6\,\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^2 = u^2 + z\varphi x \cdot \frac{\partial . u^2}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 . u^2}{2\,\partial y^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 . u^2}{6\,\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^3 = u^3 + z\varphi x \cdot \frac{\partial . u^3}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 . u^3}{2\,\partial y^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 . u^3}{6\,\partial y^3} + \text{etc.}$$

u. s. f.

4. Die Factoren zu den Potenzen von z in der Reihe für ψx, nach Herausschaffung von x, seyn P^α, P^β, P^γ, P^δ, u. s. f. wo α, β, γ, δ, etc. nicht Exponenten von Potenzen bedeuten, sondern die Stellenzahlen von verschiedenen Functionen der Größe y, übereinstimmend mit den Exponenten der Potenzen von z, so daß

$$\psi x = \psi y + P^\alpha z + P^\beta z^2 + P^\gamma z^3 + P^\delta z^4 + \text{etc.}$$

Auf dieselbe Art bezeichne man auch die Factoren der Potenzen von z in den entwickelten Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc.

nämlich

$$\varphi x = \varphi y + Q^{\alpha} z + Q^{\beta} z^2 + Q^{\gamma} z^3 + Q^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^2 = (\varphi y)^2 + R^{\alpha} z + R^{\beta} z^2 + R^{\gamma} z^3 + R^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^3 = (\varphi y)^3 + S^{\alpha} z + S^{\beta} z^2 + S^{\gamma} z^3 + S^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^4 = (\varphi y)^4 + T^{\alpha} z + T^{\beta} z^2 + T^{\gamma} z^3 + T^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
u. s. w.

5. Man setze nun in der obigen Reihe (2.), die den Werth von ψx giebt, für φx und die Potenzen dieser Function ihre Werthe aus (4), so ist

$$\psi x = \psi y + [\varphi y + Q^{\alpha} z + Q^{\beta} z^2 + Q^{\gamma} z^3 + Q^{\delta} z^4 + \text{etc.}]\, z \frac{\partial \psi y}{\partial y} + [(\varphi y)^2 + R^{\alpha} z + R^{\beta} z^2 + R^{\gamma} z^3 + \text{etc.}]\, z^2 \frac{\partial^2 \psi y}{2 \partial y^2} + [(\varphi y)^3 + S^{\alpha} z + S^{\beta} z^2 + \text{etc.}]\, z^3 \frac{\partial^3 \psi y}{6 \partial y^3} + [(\varphi y)^4 + T^{\alpha} z + \text{etc.}]\, z^4 \frac{\partial^4 \psi y}{24 \partial y^4} + [(\psi y)^5 + \text{etc.}]\, z^5 \frac{\partial^5 \psi y}{120 \partial y^5} + \text{etc.}$$

6. Die begleitenden Factoren von z in den Partialreihen vergleiche man mit den gleichstelligen der Reihe

$$\psi x = \psi y + P^{\alpha} z + P^{\beta} z^2 + P^{\gamma} z^3 + P^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$

und setze zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = p; \quad \frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = q \left(= \frac{\partial p}{\partial y}\right);$$
$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = r \left(= \frac{\partial q}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = s \left(= \frac{\partial r}{\partial y}\right);$$

3. Nun ſind aus dieſer Formel die Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc. heraus zu ſchaffen. Dieſe haben eine ähnliche Form, wie die Functionen ψx, da die Beſchaffenheit dieſer Function ganz unbeſtimmt gelaſſen iſt, ſo daß ſtatt der Function ψy und deren Differentialen nun φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. nach der Reihe zu ſetzen ſind. Zur Abkürzung ſetze man $\varphi y = u$, ſo iſt

$$\varphi x = u + z\varphi x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{2\partial y^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 u}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^2 = u^2 + z\varphi x \cdot \frac{\partial . u^2}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 . u^2}{2\partial y^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 . u^2}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

$$(\varphi x)^3 = u^3 + z\varphi x \cdot \frac{\partial . u^3}{\partial y} + z^2(\varphi x)^2 \cdot \frac{\partial^2 . u^3}{2\partial y^2} + z^3(\varphi x)^3 \cdot \frac{\partial^3 . u^3}{6\partial y^3} + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

4. Die Factoren zu den Potenzen von z in der Reihe für ψx, nach Herausſchaffung von x, ſeyn P^α, P^β, P^γ, P^δ, u. ſ. f. wo α, β, γ, δ, etc. nicht Exponenten von Potenzen bedeuten, ſondern die Stellenzahlen von verſchiedenen Functionen der Größe y, übereinſtimmig mit den Exponenten der Potenzen von z, ſo daß

$$\psi x = \psi y + P^\alpha z + P^\beta z^2 + P^\gamma z^3 + P^\delta z^4 + \text{etc.}$$

Auf dieſelbe Art bezeichne man auch die Factoren der Potenzen von z in den entwickelten Functionen φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$, etc.

nämlich

$$\varphi x = \varphi y + Q^{\alpha} z + Q^{\beta} z^2 + Q^{\gamma} z^3 + Q^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^2 = (\varphi y)^2 + R^{\alpha} z + R^{\beta} z^2 + R^{\gamma} z^3 + R^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^3 = (\varphi y)^3 + S^{\alpha} z + S^{\beta} z^2 + S^{\gamma} z^3 + S^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$
$$(\varphi x)^4 = (\varphi y)^4 + T^{\alpha} z + T^{\beta} z^2 + T^{\gamma} z^3 + T^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$

u. s. w.

5. Man setze nun in der obigen Reihe (2.), die den Werth von ψx giebt, für φx und die Potenzen dieser Function ihre Werthe aus (4), so ist

$$\psi x = \psi y + [\varphi y + Q^{\alpha} z + Q^{\beta} z^2 + Q^{\gamma} z^3 + Q^{\delta} z^4 + \text{etc.}]\, z \frac{\partial \psi y}{\partial y} + [(\varphi y)^2 + R^{\alpha} z + R^{\beta} z^2 + R^{\gamma} z^3 + \text{etc.}]\, \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} + [(\varphi y)^3 + S^{\alpha} z + S^{\beta} z^2 + \text{etc.}]\, z^3 \frac{\partial^3 \psi y}{6 \partial y^3} + [(\varphi y)^4 + T^{\alpha} z + \text{etc.}]\, z^4 \frac{\partial^4 \psi y}{24 \partial y^4} + [(\psi y)^5 + \text{etc.}]\, z^5 \frac{\partial^5 \psi y}{120 \partial y^5} + \text{etc.}$$

6. Die begleitenden Factoren von z in den Partialreihen vergleiche man mit den gleichstelligen der Reihe

$$\psi x = \psi y + P^{\alpha} z + P^{\beta} z^2 + P^{\gamma} z^3 + P^{\delta} z^4 + \text{etc.}$$

und setze zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = p; \qquad \frac{\partial^2 \psi y}{\partial y^2} = q \left(= \frac{\partial p}{\partial y} \right);$$
$$\frac{\partial^3 \psi y}{\partial y^3} = r \left(= \frac{\partial q}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^4 \psi y}{\partial y^4} = s \left(= \frac{\partial r}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial^5 \psi y}{\partial y^5} = t\left(= \frac{\partial s}{\partial y}\right); \text{ u. s. f.}$$

Dadurch ist, indem $\varphi y = u$ gesetzt worden,

$P^\alpha = p.u$

$P^\beta = p.Q^\alpha + \frac{1}{2}q.u^2$

$P^\gamma = p.Q^\beta + \frac{1}{2}q.R^\alpha + \frac{1}{3}r.u^3$

$P^\delta = p.Q^\gamma + \frac{1}{2}q.R^\beta + \frac{1}{3}r.S^\alpha + \frac{1}{24}s.u^4$

$P^\varepsilon = p.Q^\delta + \frac{1}{2}q.R^\gamma + \frac{1}{3}r.S^\beta + \frac{1}{24}s.T^\alpha + \frac{1}{120}t.u^5$

u. s. f.

7. Da für die Function ψx ist $P^\alpha = \varphi y.\frac{\partial \psi y}{\partial y}$ so ist die analoge Function in der Reihe für φx, nämlich $Q^\alpha = \varphi y.\frac{\partial \varphi y}{\partial y} = \frac{u\partial u}{\partial y} = \frac{\partial.u^2}{2\partial y}$ (Differentialformeln, 1.). Dadurch ist

$$P^\beta = \frac{p\partial.u^2}{2\partial y} + \frac{qu^2}{2} = \frac{p\partial.u^2 + u^2\partial p}{2\partial y}$$

$$= \frac{\partial.pu^2}{2\partial y} \text{ (a. a. O. 3.)}$$

8. Setzt man in dieser Function statt ψy die Function φy, also $\frac{\partial u}{\partial y}$ statt p, so entsteht daraus die Function Q^β, nämlich $Q^\beta = \frac{\partial.u^2\partial u}{2\partial y^2} = \frac{\partial^2.u^3}{6\partial y^2}$. Denn es ist $\partial.u^3 = 3u^2\partial u$; also $\partial^2.u^3 = \partial.3u^2\partial u$.

Vertauscht man ferner ψx mit $(\varphi x)^2$, also ψy mit $(\varphi y)^2$, so ist $R^\alpha = u.\frac{\partial u^2}{\partial y} = \frac{2u^2\partial u}{\partial y} = \frac{2\partial.u^3}{3\partial y}$.

Aus diesen Werthen von Q^β und R^α wird erhalten

$$P\gamma = \frac{p\partial^2.u^3}{6\partial y^2} + \frac{2q\partial.u^3}{6\partial y} + \frac{ru^3}{6},$$

$$\text{das iſt } P\gamma = \frac{\partial^2.pu^3}{6\partial y^2}.$$

(Differentio-Differentialformeln, 22.).

9. Durch die Vertauſchung von ψy mit φy, oder von p mit $\frac{\partial\varphi y}{\partial y}\left(=\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ iſt die mit $P\gamma$ analoge Function

$$Q\gamma = \frac{\partial^2.u^3\partial u}{6\partial y^3} = \frac{\partial^3.u^4}{24\partial y^3}.$$

Ferner durch die Vertauſchung von ψy mit $(\varphi y)^2$, alſo von p mit $\frac{\partial.u^2}{\partial y}$, oder $\frac{2u\partial u}{\partial y}$, iſt

$$R\beta = \frac{2\partial.u^3\partial u}{2\partial y^2} = \frac{\partial^2.u^4}{4\partial y^2}.$$

Auch iſt durch die Vertauſchung von ψx mit $(\varphi x)^3$, und von ψy mit $(\varphi y)^3$, wodurch p mit $\frac{\partial.u^3}{\partial y}$ vertauſcht wird,

$$S\alpha = \frac{u\partial.u^3}{\partial y} = \frac{3u^3\partial u}{\partial y} = \frac{3\partial.u^4}{4\partial y}.$$

Dadurch iſt

$$P\delta = \frac{p\partial^3.u^4}{24\partial y^3} + \frac{3q\partial^2.u^4}{24\partial y^2} + \frac{3r\partial.u^4}{24\partial y} + \frac{su^4}{24},$$

$$\text{oder } P\delta = \frac{\partial^3.pu^4}{24\partial y^3}.$$

(a. a. O. 23.)

Das Geſetz der Formation für die Functionen, welche die Potenzen von z in der Reihe für ψx begleiten, erhellt hieraus ſchon hinlänglich. Sie werden aus Functionen zuſammengeſetzt, die alle auf gleiche Art wie jene gebildet ſind.

10. Der allgemeine Beweis beruht darauf, daß zu zeigen iſt, wenn das Geſetz für alle Functionen, P^{α}, P^{β} . . . P^{ν} gilt, es auch für $P^{\nu+1}$ gelte. Jenes angenommen, gilt es auch für die Functionen Q^{ν}, $R^{\nu-1}$, $S^{\nu-2}$, $T^{\nu-3}$, etc. die zu Potenzen von z, niedrigern als $z^{\nu+1}$, gehören, wobey anſtatt der Differential-Quotienten p q, r, etc. die ſich auf ψy beziehen, die Differential-Quotienten in Beziehung auf φy, $(\varphi y)^2$, $(\varphi y)^3$, etc. oder u, u^2, u^3, etc. geſetzt werden.

Aus (4.) iſt

$$P^{\nu+1} = pQ^{\nu} + \tfrac{1}{2}qR^{\nu-1} + \tfrac{1}{6}rS^{\nu-2} + \tfrac{1}{24}sT^{\nu-3} \ldots + \frac{u^{\nu+1}\partial^{\nu}p}{1.2\ldots(\nu+1)\partial y^{\nu}},$$

wo die Buchſtaben an der Spitze von P, Q, R, etc. bloße Ordnungs- oder Stellenzahlen ſind, in dem letzten Gliede aber u^{ν} und ∂y^{ν} Potenzen mit dem Exponenten ν ſind, und $\partial^{\nu}p$ das νte Differential von p iſt, ſo wie $q\partial y$ das erſte, $r\partial y^2$ das zweyte, u. ſ. w. ſind.

Zufolge der Vorausſetzung iſt

$$Q^{\nu} = \frac{\partial^{\nu-1}.u^{\nu}\partial u}{1.2\ldots\nu\partial y^{\nu}} = \frac{1}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots\nu\partial y^{\nu}},$$

$$R^{\nu-1} = \frac{\partial^{\nu-2}.u^{\nu-1}\partial.u^2}{1.2\ldots(\nu-1)\partial y^{\nu-1}} = \frac{2}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu-1}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu-1)\partial y^{\nu-1}},$$

$$S^{\nu-2} = \frac{\partial^{\nu-3}.u^{\nu-2}\partial.u^3}{1.2\ldots(\nu-2)\partial y^{\nu-2}} = \frac{3}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu-2}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu-2)\partial y^{\nu-2}},$$

$$T^{\nu-3} = \frac{\partial^{\nu-4}.u^{\nu-3}\partial.u^4}{1.2\ldots(\nu-3)\partial y^{\nu-3}} = \frac{4}{\nu+1}.\frac{\partial^{\nu-3}.u^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu-3)\partial y^{\nu-3}},$$

u. ſ. w.

Die zweyte Form dieſer Functionen beruht darauf, daß $u^m \partial . u^n = n u^{m+n-1} \partial u = \frac{n}{m+n} \partial . u^{m+n}$ iſt.

Daher iſt $\partial . u^m \partial . u^n = \frac{n}{m+n} \partial \partial . u^{m+n}$

$= \frac{n}{m+n} \partial^2 . u^{m+n}$, und eben ſo $\partial^\mu . u^m \partial . u^n$

$= \frac{n}{m+n} \partial^{\mu+1} . u^{m+n}$.

Aus dieſen Werthen von Q^ν, $R^{\nu-1}$, $S^{\nu-2}$, etc. folgt

$$P^{\nu+1} = \Big[\frac{p \partial^\nu . u^{\nu+1}}{\partial y^\nu} + \frac{\nu}{1} . \frac{q \partial^{\nu-1} . u^{\nu+1}}{\partial y^{\nu-1}}$$

$$+ \frac{\nu . \nu-1 . r \partial^{\nu-2} . u^{\nu+1}}{1 . 2} . \frac{}{\partial y^{\nu-2}} + \frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . s \partial^{\nu-3} . u^{\nu+1}}{1 . 2 . 3} . \frac{}{\partial y^{\nu-3}}$$

$$+ \frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3 . t \partial^{\nu-4} . u^{\nu+1}}{1 . 2 . 3 . 4} . \frac{}{\partial y^{\nu-4}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\nu \ldots 1}{1 \ldots \nu} . \frac{\partial^\nu p}{\partial y^\nu} . u^{\nu+1} \Big] \frac{1}{1 . 2 \ldots (\nu+1)} .$$

Es iſt in dem Artikel, Differentio-Differentialrechnung (23.) gezeigt, daß

$$\partial^n . xy = x . \partial^n y + \frac{n}{1} \partial x . \partial^{n-1} y$$

$$+ \frac{n . n-1 .}{1 . 2} \partial^2 x \partial^{n-2} y + \frac{n . n-1 . n-2 .}{1 . 2 . 3} \partial^3 x . \partial^{n-3} y + \ldots$$

$$+ \ldots + n \partial^{n-1} x . \partial y + \partial^n x . \partial y .$$

In unſerer Formel ſteht nun $u^{\nu+1}$ für y; p für x; ferner $q \partial y$ oder ∂p für ∂x; ferner $r \partial y^2$ oder $\partial q \partial y$ für $\partial^2 x$; ferner $s \partial y^3$ ($= \partial r \partial y^2 = \partial^2 q \partial y = \partial^3 p$) für $\partial^3 x$, u. ſ. f.

Alſo iſt

$$P^{\nu+1} = \frac{\partial^{\nu} . pu^{\nu+1}}{1.2 \ldots (\nu+1)\partial y^{\nu}},$$

welches dieſelbe Form mit der für die Functionen P^{1} bis P^{ν} angenommenen iſt.

11. Es iſt alſo, wenn $y = x - z\varphi x$ geſetzt, und $\frac{\partial \psi y}{\partial y}$ durch p zur Abkürzung und Deutlichkeit bezeichnet wird,

$$\psi x = \psi y + z . p\varphi y + z^{2} . \frac{\partial . p(\varphi y)^{2}}{1.2\partial y} + z^{3} . \frac{\partial^{2} . p(\varphi y)^{3}}{1.2.3\partial y^{2}} + z^{4} . \frac{\partial^{3} . p(\varphi y)^{4}}{1.2.3.4\partial y^{3}} + z^{5} . \frac{\partial^{4} . p(\varphi y)^{5}}{1..5\partial y^{4}} + \text{etc.}$$

12. Man ſieht, daß dieſer Lehrſatz der erweiterte Taylorſche iſt. Nach dieſem wird eine Function von $y + z$, oder $\psi(y + z)$, durch die Reihe,

$$\psi y + pz + \tfrac{1}{2} qz^{2} + \tfrac{1}{6} rz^{3} + \tfrac{1}{24} sz^{4} + \text{etc.}$$

ausgedruckt, wo $p = \frac{\partial \psi y}{\partial y}$; $q = \frac{\partial p}{\partial y}$; $r = \frac{\partial q}{\partial y}$, u. ſ. f. iſt. (Differenzenrechnung, 17.). Die Größe z iſt eine willkührliche von y unabhängige Veränderung dieſer Functionalgröße. In dem von la Grange gegebenen Lehrſatze kommt ſtatt z eine Function einer veränderlichen Größe x, mit einer willkührlichen Größe multiplicirt, ſo daß $y + z\varphi x = x$ iſt, und die Function $\psi(y + z\varphi x)$ wird hier ebenfalls durch Functionen von y entwickelt. Die Differentialquotienten p, q, r, s, etc. erhalten nun gewiſſe Modificationen durch die Function φy.

13. La Grange iſt durch eine Unterſuchung von Lambert veranlaßt worden, Reihen für die Wurzeln algebraiſcher Gleichungen und ihrer Potenzen zu ſuchen,

welches ihn auf seine allgemeine Umkehrungs- oder Umwandlungsformel führte. Lambert erzählt in einer Abhandlung, Observations analytiques, Mem. de l'Ac. de Berlin, 1770, daß er in den Actis Helvet. 1757. einfache Reihen für die Wurzeln der Gleichungen vom zweyten und dritten Grade gegeben habe, insbesondere eine Reihe für die Wurzel der Gleichung $x^m + px = q$. Im J. 1764 erweiterte er seine Untersuchungen, und theilte sie Eulern und la Grange mit. Der letztere nahm sie in großer Allgemeinheit vor, in der Abhandlung, nouvelle méthode pour resoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mem. de l'Ac. de Berlin, 1768; übersetzt in Michelsens Sammlung, S. 190 — 270. Er findet aber durch eine mühsame Rechnung, nach einem künstlichen Verfahren eine Reihe für die mte Potenz einer der Wurzeln der Gleichung, $o = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.}$ Dieser Gleichung giebt er die Form,

$$a - bx + bx\xi = o.$$

Eine der Wurzeln sey p, so ist

$$p^m = x^m + m\left(\xi x^m + \frac{\partial . \xi^2 x^{m+1}}{2\partial x} + \frac{\partial^2 . \xi^3 x^{m+2}}{2.3\partial x^2} + \text{etc.}\right)$$

wo nach der Differentiation für x zu setzen ist $\frac{a}{b}$.

Hieraus schließt la Grange, doch ohne einen Beweis davon zu geben, erstlich, daß man für die Function $x\xi$, welche zuerst die endliche oder unendliche Reihe $\frac{cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.}}{b}$ war, jede andere Function von x setzen könne; darauf ferner, daß man anstatt einer Potenz der Wurzel p zu der Gleichung,

$$\alpha - x + \varphi x = o,$$

jede Function derselben, ψp, setzen könne. Er drückt

ſeinen Lehrſatz folgendergeſtalt aus. Es ſey p eine der Wurzeln dieſer Gleichung, ψp irgend eine Function derſelben, und zur Abkürzung $\frac{\partial . \psi x}{\partial x} = \psi' x$, ſo iſt

$$\psi p = \psi x + \varphi x \psi' x + \frac{\partial . (\varphi x)^2 \psi' x}{2 \partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 . (\varphi x)^3 \psi' x}{2.3 \partial x^2} + \frac{\partial^3 (\varphi x)^4 \psi' x}{2.3.4 \partial x^3} + \text{etc.}$$

wo nach der Differentiation α ſtatt x zu ſetzen iſt.

13. Der Lehrſatz iſt hier eine algebraiſche Auflöſungsformel. Bald hernach hat la Grange den Satz zu einer analytiſchen Formel für zwey veränderliche Größen gemacht, da er ſtatt der beſtimmten Größe α eine veränderliche ſetzte, ſo daß die Gleichung iſt

$$t = x + \varphi x,$$

aus welcher jede Function, von x, ψx, durch Functionen von t darzuſtellen iſt. Dieſes leiſtete er in einer lehrreichen Abhandlung über das Keplerſche Problem. Mém. de l' Ac. de Berlin, 1769.

Lambert bringt in der angeführten Abhandlung vom J. 1770. die la Grangiſche Formel auch heraus, aber auf einem ganz andern Wege, und beſchäftigt ſich daſelbſt noch weiter mit dieſer Unterſuchung.

14. La Place hat durch die Methode der partiellen Differentiale, nach einem beſondern Verfahren, den Lehrſatz bewieſen Zu dieſem Beweiſe war es nöthig noch eine veränderliche Größe einzuführen, welche der zu der Function φx geſetzte Factor iſt, der aber in der Formel ſelbſt wieder zu einer gegebenen unveränderlichen Größe wird. Der Beweis wird in dem Artikel, partielle Differentiale, mit Erläuterungen vorgetragen werden. Die Entwickelung der Formel giebt la Place in der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planétes, à Paris 1784. pag. 14. ſq. Man ſehe auch die Mem. de l'Acad. des Sc. a. 1777; ferner Couſin

Introd. à l'étude de l'aſtronomie phyſique, à Paris 1787, pag. 15 ſq. und Lacroix traité du calcul diff. et intégral, T. I. §. III. ſq.

La Grange ſelbſt hat in der Théorie des fonctions analytiques nr. 97. ff. nach einem etwas andern Verfahren, aber doch auch durch partielle Differentiale, ſeinen Lehrſatz erwieſen. Dieſen Beweis hat J. W. Pfaff ferner entwickelt, und mit Zuſätzen erweitert, in der von Hindenburg herausgegebenen Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen, Th. II. Abh. VII.

Lexell hat in den Novis Comm. Petr. T. XVI. den Beweis der Formel ſo geführt, daß er ſie als richtig annimmt, und zeigt, daß, wenn die Glieder der Reihe für ψx alle durch x ausgedruckt werden, ſich alles aufhebt, bis auf das erſte Glied ψx. Dies wäre alſo, was die Alten einen theoretiſch-analytiſchen Beweis nannten, wobey man aber nicht ſieht, wie man zu dem Satze ſelbſt gekommen ſeyn möchte, der alſo mehr zur Erläuterung dient, als zur Begründung. S. Beweis, und Analyſis als Methode.

J. F. Pfaff hat zuerſt in dem Hindenburgiſchen Archiv den Mathematik, 1. Heft, Abh. VI. und hernach in den Disquiſit. analyticis, in tractatu de reverſione ſerierum, §. IV – VIII. einen Beweis gegeben, mit welchem der in dieſem Artikel von mir geführte im weſentlichen übereinkommt. In der Form habe ich einiges geändert. Den Taylorſchen Lehrſatz habe ich nicht unmittelbar, wie es dort geſchehen iſt, gebraucht, und habe durch die Reihen in (4.) die analogen Functionen für φx und die Potenzen von φx, daraus ferner die geſuchten Functionen, die begleitenden zu den Potenzen von z, ganz einleuchtend beſtimmt.

In eben dieſer Abhandlung (S. 238.) iſt von noch zwey Beweiſen des Lehrſatzes Anzeige geſchehen. Einer iſt von dem P. Canovai in den Abhandlungen der Akademie von Siena, T. VII.; ein zweyter von Condorcet in den Sammlungen der Turiner Geſellſchaft, T. V. Der letztere iſt dem Pfaffiſchen ähnlich; die Fun-

ction φx hat darin aber nicht den Factor z. In dem Artikel, Series, der franzöſiſchen Encyklopädie, welcher Condorcet zum Verfaſſer hat, iſt dieſer Beweis, aber nur ganz kurz in wenigen Zeilen, vorgetragen.

Es wird nöthig ſeyn, den Lehrſatz durch einige Beiſpiele zu erläutern.

15. Aus der Gleichung, $\omega = \psi + e \sin \psi$, den Winkel ψ durch ω darzuſtellen. Es iſt hier ω der Winkel, welcher in der Aſtronomie die mittlere Anomalie heißt, und ψ die Anomalie des Excentri (circuli), wo die Winkel von der Sonnenferne an genommen werden. Die Excentricität der Bahn iſt $= e$.

Man ſetze ſtatt,

$$y,\ x,\quad z,\ \varphi x,\ \psi x,\ \psi y,\ \varphi y,$$

in (11.) hier

$$\omega,\ \psi,\ -e,\ \sin\psi,\ \psi,\ \omega,\ \sin\omega,$$

ſo iſt $p = \frac{\partial\omega}{\partial\omega} = 1$, und

$$\psi = \omega - e\sin\omega + \frac{e^2}{1.2}\cdot\frac{\partial.\sin\omega^2}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2.\sin\omega^3}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3.\sin\omega^4}{\partial\omega^3} - \frac{e^5}{1..5}\cdot\frac{\partial^4.\sin\omega^5}{\partial\omega^4} + \text{etc.}$$

Nun iſt (Goniometrie, 137.)

$$2\sin\omega^2 = \tfrac{2}{2} - \cos 2\omega.$$

$$4\sin\omega^3 = 3\sin\omega - \sin 3\omega.$$

$$8\sin\omega^4 = \frac{4.3}{2.2} - 4\cos 2\omega + \cos 4\omega.$$

$$16\sin\omega^5 = \frac{5.4}{1.2}\sin\omega - 5\sin 3\omega + \sin 5\omega.$$

$$32\sin\omega^6 = \frac{6.5.4}{2.2.3} + \frac{6.5}{1.2}\cos 2\omega + 6\cos 4\omega - \cos 6\omega.$$

etc.

Daher iſt (Differentio = Differentialrechnung 9).

$$\frac{\partial . \sin \omega^0}{\partial \omega} = + \tfrac{1}{2} . 2 \sin 2\omega,$$

$$\frac{\partial^2 . \sin \omega^3}{\partial \omega^2} = - \tfrac{1}{4} (3 \sin \omega - 3^2 . \sin 3\omega),$$

$$\frac{\partial^3 . \sin \omega^4}{\partial \omega^3} = - \tfrac{1}{8} (4 . 2^2 \sin 2\omega - 4^3 \sin 4\omega).$$

$$\partial^4 . \sin \omega^5 = + \tfrac{1}{16} \Big(\frac{5 . 4}{1 . 2} \sin \omega - 5 . 3^4 \sin 3\omega + 5^4 \sin 5\omega \Big).$$

etc.

Dadurch wird

$$\psi = \omega - e \sin \omega + \frac{e^2}{2 . 2} 2 . \sin 2\omega + \frac{e^3}{4 . 2 . 3} (3 \sin \omega - 3^2 \sin 3\omega) + \frac{e^4}{8 . 2 . 3 . 4} (4 . 2^3 \sin 2\omega - 4^3 \sin 4\omega) - \frac{e^5}{16 . 2 . 3 . 4 . 5} \Big(\frac{5 . 4}{1 . 2} \sin \omega - 5 . 3^4 \sin 3\omega + 5^4 \sin 5\omega \Big) + \frac{e^6}{32 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} \Big(\frac{6 . 5}{1 . 2} 2^5 \sin 2\omega - 6 . 4^5 \sin 4\omega + 6^5 \sin 6\omega \Big) + \text{etc.}$$

16. II. Exempel. Der Radius Vector, r, in der Ellipſe iſt, $r = 1 + e \cos \psi$, wenn die halbe große Axe $= 1$ geſetzt wird, ſ. unten 22. Hier iſt $\cos \psi$ dieſe ize Function von ψ, welche aus der Gleichung $\omega = \psi + e \sin \psi$ durch ω auszudrucken iſt.

Man ſetze nun in (11.) ſtatt

$y,\ x,\ z,\ \varphi x,\ \psi x,\ \psi y,\ \Phi y$

hier

$\omega,\ \psi,\ -e,\ \sin\psi,\ \cos\psi,\ \cos\omega,\ \sin\omega,$

ſo iſt daſelbſt $p = \frac{\partial\cos\omega}{\partial\omega} = -\sin\omega$, alſo

$$\cos\psi = \cos\omega + e\sin\omega^2 + \frac{e^2}{1.2}\cdot\frac{\partial\cdot-\sin\omega^3}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2\cdot-\sin\omega^4}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3\cdot-\sin\omega^5}{\partial\omega^3} - \text{etc.}$$

Setzt man hier ſtatt der negativen Potenzen von $\sin\omega$ die poſitiven, ſo werden die Differentiale ihrer Werthe entgegengeſetzt, weswegen die Vorzeichen der Glieder in die entgegengeſetzten zu verwandeln ſind. Verfährt man hier wie in (15.), ſo iſt

$$r = 1 + e\cos\omega - \frac{e^2}{2}(-1+\cos 2\omega)$$
$$- \frac{e^3}{4.2}(3\cos\omega - 3\cos 3\omega)$$
$$+ \frac{e^4}{8.2.3}(4.2^2\cos 2\omega - 4^2\cos 4\omega)$$
$$+ \frac{e^5}{16.2.3.4}\left(\frac{5.4}{1.2}\cos\omega - 5.3^5\cos 3\omega + 5^5\cos 5\omega\right)$$
$$- \frac{e^6}{32.2.3.4.5}\left(\frac{6.5}{1.2}.2^4\cos 2\omega - 6.4^4\cos 4\omega + 6^4\cos 6\omega\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

17. III. Exempel. Die wahre Anomalie ſey $= \Phi$, die halbe kleine Axe $= m = \sqrt{(1-e^2)}$, ſo iſt $\tan\frac{1}{2}\Phi = \frac{m}{1+e}\tan\frac{1}{2}\psi$, (ſ. unten 23.). Hier iſt $\tan\frac{1}{2}\psi$ die Function, welche durch ω auszudrucken iſt.

Man ſetze ſtatt

$$y,\ x,\ z,\ \varphi x,\ \psi x,\ \psi y,\ \varphi y,$$

in (11.) hier

$$\omega,\ \psi,\ -e,\ \sin\psi,\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi,\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega,\ \sin\omega,$$

ſo iſt daſelbſt (Different. Formeln, 38.)

$$p = \frac{\partial.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}{\partial\omega} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Ferner $p\sin\omega = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$.

$p\sin\omega^2 = 2\sin\frac{1}{2}\omega^2 = 1-\cos\omega$.

$p\sin\omega^3 = \sin\omega - \frac{1}{2}\sin 2\omega$.

$p\sin\omega^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\omega - \frac{1}{8}\cos 2\omega + \frac{1}{24}\cos 3\omega$.

$p\sin\omega^5 = \frac{3}{4}\sin\omega - \frac{1}{4}\sin 2\omega - \frac{1}{4}\sin 3\omega + \frac{1}{8}\sin 4\omega$.

$p\sin\omega^6 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\cos\omega - \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{3}{160}\cos 3\omega + \frac{1}{8}\cos 4\omega - \frac{1}{160}\cos 5\omega$.

etc.

Nun iſt

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega - ep\sin\omega + \frac{e^2}{1.2}.\frac{\partial.p\sin\omega^2}{\partial\omega} - \frac{e^3}{1.2.3}.\frac{\partial^2.p\sin\omega^3}{\partial\omega^2} + \frac{e^4}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3.p\sin\omega^4}{\partial\omega^3} - \text{etc.}$$

Nimmt man die hier angeſetzten Differentiale von den gleich vorher angegebenen Werthen, ſo iſt

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = (1-e)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega + \frac{e^2}{1.2}.\sin\omega + \frac{e^3}{2.2.3}(2\sin\omega - 2^2\sin 2\omega) - \frac{e^4}{4.2.3.4}(\sin\omega + 2.2^3\sin 2\omega - 3^3\sin 3\omega - \frac{e^5}{8.2.3.4.5}(6\sin\omega - 2.2^4\sin 2\omega - 2.3^4\sin 3\omega + 4^4\sin 4\omega)$$

$$+\frac{e^6}{16.1..6}\{2\sin\omega+8.2^5\sin 2\omega$$
$$-3.3^5\sin 3\omega-2.4^5\sin 4\omega+5^5\sin 5\omega)$$
— etc.

Dieſe Reihe mit $\frac{m}{1+e}$, oder $\frac{\sqrt{(1-ee)}}{1+e}$, oder $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ multiplicirt giebt tang $\frac{1}{2}\varphi$.

18. IV. Exempel. Man ſucht die wahre Anomalie φ ſelbſt unmittelbar durch die mittlere ω. Es iſt φ keine durch einen vollſtändigen Ausdruck von ψ angebbare Function dieſes Winkels. Es iſt aber $\partial\varphi=\frac{m\partial\psi}{1+e\cos\psi}$, (unten 24.), alſo $\varphi=m\int\frac{\partial\psi}{1+e\cos\psi}$, welches Integral nicht anders als durch eine unendliche Reihe zu erhalten iſt. Demnach iſt ſtatt der Function ψx, in (11.) hier zu ſetzen $m\int\frac{\partial\psi}{1+e\cos\psi}$. Eine ſolche Function wie φ von ψ iſt, iſt die Function ψy in (11.) von y, ſo daß ſtatt ψy daſelbſt hier kommt $m\int\frac{\partial\omega}{1+e\cos\omega}$. Dadurch iſt nun $p=\frac{m}{1+e\cos\omega}$. Es iſt alſo

$$\varphi=m\int\frac{\partial\omega}{1+e\cos\omega}-\frac{me\sin\omega}{1+e\cos\omega}$$
$$+\frac{me^2}{1.2}\left(\partial^1.\frac{\sin\omega^2}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega-\frac{me^3}{1.2.3}\left(\partial^2.\frac{\sin\omega^3}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega^2$$
$$+\frac{me^4}{1.2.3.4}\left(\partial^3.\frac{\sin\omega^4}{1+e\cos\omega}\right):\partial\omega^3-\text{etc.}$$

Die Glieder dieſer Reihe geben jedes wieder eine Reihe. Man entwickele ſowohl den Quotienten $\frac{1}{1+e\cos\omega}$ in eine Reihe, als die Wurzelgröße $m=\sqrt{(1-e^2)}$, wiewohl auch letztere unentwickelt bleiben mag, da ſie unmittelbar durch den numeriſchen Werth von e gegeben wird.

In dem Quotienten $\frac{1}{1+e\cos\omega}$, der nach den Potenzen von e und $\cos\omega$ fortgeht, müſſen die Potenzen von $\cos\omega$ in Coſinus der Vielfachen von ω verwandelt werden, theils wegen der Integration bey dem erſten Gliede, theils wegen der Differentiation bey den folgenden.

Es iſt

$$\frac{1}{1+e\cos\omega}=1-e\cos\omega+e^2\cos\omega^2-e^3\cos\omega^3+\text{etc.}$$

$$=1-e\cos\omega+\tfrac{1}{2}e^2(1+\cos 2\omega)$$

$$-\tfrac{1}{4}e^3(3\cos\omega+\cos 3\omega)+\tfrac{1}{8}e^4(3+4\cos 2\omega+\cos 4\omega)$$

$$-\tfrac{1}{16}e^5(10\cos\omega+5\cos 3\omega+\cos 5\omega)$$

$$+\tfrac{1}{32}e^6(10+15\cos 2\omega+6\cos 4\omega+\cos 6\omega)$$

$$+\text{etc.}\qquad\text{(Goniometrie 141.)}$$

Zu den Gliedern dieſer Reihe ſetze man den Differentialfactor $\partial\omega$, und nehme die Integrale, nach der Formel, $\cos\varphi.\partial\varphi=\partial\sin\varphi$, oder $n\cos n\varphi.\partial\varphi=\partial\sin n\varphi$, woraus folgt $\int\cos n\varphi.d\varphi=\frac{\sin n\varphi}{n}$. So wird das erſte Glied von φ erhalten.

Man multiplicire hierauf die Reihe für den Quotienten $\frac{1}{1+e\cos\omega}$ mit $e\sin\omega$, und verwandle die Producte, wie $\cos n\omega.\sin\omega$, in das Aggregat,

$$\tfrac{1}{2}\sin(n+1)\omega-\tfrac{1}{2}\sin(n-1)\omega,$$

(Goniometrie, 27.). Dieſe Rechnung giebt das zweyte Glied der Reihe für φ.

Dieſes Glied multiplicire man mit $\frac{1}{2}e^{\sin\omega}$, und verwandle die Producte je zweyer Sinus, wie $\sin n\omega . \sin\omega$ in das Aggregat $\frac{1}{2}\cos(n-1)\omega - \frac{1}{2}\cos(n+1)\omega$. Das Aggregat aller Theile bezeichne man durch (A).

Dieſes multiplicire man mit $\frac{1}{2}e^{\sin\omega}$, und verwandle die Producte, wie $\cos n\omega . \sin\omega$, in die Differenz zweyer Sinus. Das Aggregat ſey (B).

Dieſes multiplicire man mit $\frac{1}{2}e^{\sin\omega}$, und verwandle das Product je zweyer Sinus in die Differenz zweyer Cosinus. Das Aggregat ſey (C).

Auf dieſe Weiſe fahre man fort, bis man zu derjenigen Potenz von e gelangt, bey welcher man ſtehen bleiben will, ſo wie man in jedem der Aggregate die Rechnung nicht weiter als bis zu dieſer Potenz von e treibt.

Die Reihe (A) wird einmahl differentiirt; der Differentialfactor, der die Sinus von Vielfachen des ω enthält, iſt das dritte Glied von $\frac{1}{m}\Phi$.

Die Reihe (B) wird zweymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^2 . \sin\omega = -\sin\omega . \partial\omega^2$, oder $\partial^2 . \sin n\omega = -n^2 \sin n\omega . \partial\omega^2$. Der Differentialfactor giebt das vierte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\Phi$.

Die Reihe (C) wird dreymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^3 . \cos n\omega = +n^3 \sin n\omega . \partial\omega^3$. Der Differentialfactor giebt das fünfte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\Phi$.

Auf dieſe Weiſe fährt man nach den Formeln in dem Artikel, Differentio-Differentialgleichung (9.) fort. Es iſt

$$\partial^4 . \sin n\omega = +n^4 . \sin n\omega . \partial\omega^4.$$

$$\partial^5 . \cos n\omega = -n^5 . \sin n\omega . \partial\omega^5.$$

$$\partial^6 . \sin n\omega = -n^6 . \sin n\omega . \partial\omega^6.$$

$$\partial^7 . \cos n\omega = +n^7 . \sin n\omega . \partial\omega^7.$$

etc.

Nimmt man alle Reihen zuſammen, mit ſorgfältiger Beobachtung der Vorzeichen, und ordnet die Glieder

entweder nach den Potenzen von e, oder nach den Vielfachen von ω durch ihre Sinus, ſo erhält man den Werth von $\frac{1}{m}\varphi$ bis zu der angenommenen Gränze. Multiplicirt man dieſen durch m, oder mit dem Werthe von m, nämlich $1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 -$ etc. ſo iſt der Werth der wahren Anomalie φ durch die mittlere ω, und Sinus der Vielfachen von ω ausgedrückt.

19. Wird die Multiplication mit dem Werthe von m vorgenommen, ſo iſt

$$\varphi = \omega - 2e\sin\omega + \frac{5}{4}e^2\sin 2\omega$$
$$+ \frac{1}{12}e^3(3\sin\omega - 13\sin 3\omega)$$
$$- \frac{1}{96}e^4(44\sin 2\omega - 103\sin 4\omega)$$
$$- \frac{1}{960}e^5(50\sin\omega - 645\sin 3\omega + 1097\sin 5\omega)$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieſer von mir berechnete Werth trifft mit dem von Cagnoli in ſeiner Trigonometrie, nr. 771 überein. Die Annäherung in der von ihm daſelbſt mitgetheilten Formel für φ iſt bis zur neunten Potenz von e getrieben.

La Grange hat der Formel für φ eine andere Geſtalt gegeben. Es kommen in derſelben Potenzen von m oder $\sqrt{(1-ee)}$ als Diviſoren der Glieder vor. Dieſes beruhet auf dem von ihm gewählten Verfahren zur Entwickelung der Reihe für φ. Mém. de l'Ac. de Berlin a. 1769. p. 230.

Die hier als Exempel beygebrachten Formeln ſind das Hauptſtück in der Theorie der Planeten, ſo fern ihre gegenſeitigen Störungen nicht in Betracht kommen.

20. Zur deutlichern Einſicht in alle dieſe Formeln wird es für einen Theil der Leſer nöthig ſeyn, die geometri-

Dieſes Glied multiplicire man mit $\frac{1}{2}e\sin\omega$, und verwandle die Producte je zweyer Sinus, wie $\sin n\omega . \sin\omega$ in das Aggregat $\frac{1}{2}\cos(n-1)\omega - \frac{1}{2}\cos(n+1)\omega$. Das Aggregat aller Theile bezeichne man durch (A).

Dieſes multiplicire man mit $\frac{1}{2}e\sin\omega$, und verwandle die Producte, wie $\cos n\omega . \sin\omega$, in die Differenz zweyer Sinus. Das Aggregat ſey (B).

Dieſes multiplicire man mit $\frac{1}{2}e\sin\omega$, und verwandle das Product je zweyer Sinus in die Differenz zweyer Coſinus. Das Aggregat ſey (C).

Auf dieſe Weiſe fahre man fort, bis man zu derjenigen Potenz von e gelangt, bey welcher man ſtehen bleiben will, ſo wie man in jedem der Aggregate die Rechnung nicht weiter als bis zu dieſer Potenz von e treibt.

Die Reihe (A) wird einmahl differentiirt; der Differentialfactor, der die Sinus von Vielfachen des W. ω enthält, iſt das dritte Glied von $\frac{1}{m}\Phi$.

Die Reihe (B) wird zweymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^2 . \sin\omega = -\sin\omega . \partial\omega^2$, oder $\partial^2 . \sin n\omega = -n^2 \sin n\omega . \partial\omega^2$. Der Differentialfactor giebt das vierte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\varphi$.

Die Reihe (C) wird dreymahl differentiirt, nach der Formel, $\partial^3 . \cos n\omega = +n^3 \sin n\omega . \partial\omega^3$. Der Differentialfactor giebt das fünfte Glied der Reihe für $\frac{1}{m}\varphi$.

Auf dieſe Weiſe fährt man nach den Formeln in dem Artikel, Differentio-Differentialgleichung (9.) fort. Es iſt

$$\partial^4 . \sin n\omega = +n^4 . \sin n\omega . \partial\omega^4.$$

$$\partial^5 . \cos n\omega = -n^5 . \sin n\omega . \partial\omega^5.$$

$$\partial^6 . \sin n\omega = -n^6 . \sin n\omega . \partial\omega^6.$$

$$\partial^7 . \cos n\omega = +n^7 . \sin n\omega . \partial\omega^7.$$

etc.

Nimmt man alle Reihen zuſammen, mit ſorgfältiger Beobachtung der Vorzeichen, und ordnet die Glieder

entweder nach den Potenzen von e, oder nach den Vielfachen von ω durch ihre Sinus, so erhält man den Werth von $\frac{1}{m}\varphi$ bis zu der angenommenen Gränze. Multiplicirt man diesen durch m, oder mit dem Werthe von m, nämlich $1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 -$ etc. so ist der Werth der wahren Anomalie φ durch die mittlere ω, und Sinus der Vielfachen von ω ausgedrückt.

19. Wird die Multiplication mit dem Werthe von m vorgenommen, so ist

$$\varphi = \omega - 2e\sin\omega + \frac{5}{4}e^2\sin 2\omega$$
$$+ \frac{1}{12}e^3(3\sin\omega - 13\sin 3\omega)$$
$$- \frac{1}{96}e^4(44\sin 2\omega - 103\sin 4\omega)$$
$$- \frac{1}{960}e^5(50\sin\omega - 645\sin 3\omega + 1097\sin 5\omega)$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieser von mir berechnete Werth trifft mit dem von Cagnoli in seiner Trigonometrie, nr. 771 überein. Die Annäherung in der von ihm daselbst mitgetheilten Formel für φ ist bis zur neunten Potenz von e getrieben.

La Grange hat der Formel für φ eine andere Gestalt gegeben. Es kommen in derselben Potenzen von m oder $\sqrt{(1-ee}$, als Divisoren der Glieder vor. Dieses beruhet auf dem von ihm gewählten Verfahren zur Entwickelung der Reihe für φ. Mém. de l'Ac. de Berlin a. 1769. p. 230.

Die hier als Exempel beygebrachten Formeln sind das Hauptstück in der Theorie der Planeten, so fern ihre gegenseitigen Störungen nicht in Betracht kommen.

20. Zur deutlichern Einsicht in alle diese Formeln wird es für einen Theil der Leser nöthig seyn, die geometri-

schen Sätze, welche hier angewandt sind, durch eine Construction zu erweisen.

Es ist ABD (Fig. 65.) die Hälfte einer Ellipse, deren Mittelpunct C, große Axe AD, halbe kleine CB, einer Brennpunct F ist. Mit dem Halbmesser AC wird der Halbkreis AED beschrieben, welcher in der ältern Astronomie der excentrische heißt. Nach einem Puncte L auf der Ellipse ziehe man FL, so ist FL der Radius Vector, und der W. DFL die wahre Anomalie. Durch L sey ML parallel mit BC, und treffe den Kreis in N, so ist der W. DCN die Anomalie des excentrischen (Kreises). Die mittlere Anomalie ist ein der Zeit von D bis L proportionaler Winkel.

21. Man setze AC = a; CB = b; CF = c, DFL = φ; DCN = ψ. Die Area der ganzen Ellipse ist = π a b (s. Quadratur), und nach dem einen von Kepler entdeckten Gesetze ist $2\pi : \omega = \pi a b : \text{area } DFL$. Ferner sind an der Ellipse die Flächenräume DML : DMN = ML : MN, und die Dreyecke MFL : MFN = ML : MN, daher die Flächenräume DFL : DFN = ML : MN. Es ist ML : MN = CB : CE = b : a (Ellipse, 1.), also DFL : DFN = b : a. Verbindet man diese Proportion mit der, $2\pi : \omega = \pi a b : DFL$, so ist $\pi b : a\omega = \frac{1}{2}\pi a b : DFN$, und $DFN = \frac{1}{2} a a \omega$, wo ω ein Kreisbogen für den Halbmesser = 1 ist. Es ist $DFN = \text{Sect. } DCN + \Delta FCN = \frac{1}{2} a a \psi + \frac{1}{2} a c \sin\psi$.

Daher ist $\omega = \psi + \frac{c}{a} \sin\psi$, oder, wenn $\frac{c}{a} = e$, einer absoluten Zahl, gesetzt wird, $\omega = \psi + e \sin\psi$.

22. Es ist a : b = MN : ML (Ellipse, 5.), und $MN = a \sin\psi$, also $ML = b \sin\psi$. Ferner $CM = a \cos\psi$; $FM = c + a\cos\psi$, also $FL^2 = r^2 = (c + a\cos\psi)^2 + b^2 \sin\psi^2$.

Da $aa = bb + cc$ (Ellipse, 9.), und $\sin\psi^2 = 1 - \cos\psi^2$

ist, so ist $r^2 = a^2 + 2ac\cos\psi + c^2\cos\psi^2$, also $r = a + c\cos\psi$, oder $\frac{r}{a} = 1 + e\cos\psi$.

23. Es ist $\sin\varphi = \frac{ML}{FL} = \frac{b\sin\psi}{a + c\cos\psi}$; und $\cos\varphi = \frac{FM}{FL} = \frac{c + a\cos\psi}{a + c\cos\psi}$. Ferner $1 + \cos\varphi = \frac{(a+c)(1+\cos\psi)}{a + c\cos\psi}$. Hieraus ist $\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{b\sin\psi}{(a+c)(1+\cos\psi)}$; das ist (Goniometrie, 38.)

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{b}{a+c}\tang\tfrac{1}{2}\psi = \frac{b:a}{1+e}\tang\tfrac{1}{2}\psi;$$

oder auch $\tang\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$,

oder $\tang\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}\tang\frac{1}{2}\psi$.

24. Hieraus ist $\frac{\partial\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{b}{a+c}\cdot\frac{\partial\psi}{2\cos\frac{1}{2}\psi^2}$, oder $\frac{\partial\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{b}{a+c}\cdot\frac{\partial\psi}{1+\cos\psi}$. Mittelst des in (22.) gebrauchten Werthes von $1 + \cos\varphi$ entsteht hier

$$\partial\varphi = \frac{b\,\partial\psi}{a + c\cos\psi}, \text{ oder } \partial\varphi = \frac{(b:a)\,\partial\psi}{1 + e\cos\psi}.$$

Diese Zusammenstellung der Sätze mit den einfachsten Beweisen ist aus der oben angeführten Abhandlung von la Grange, Mem. de l'Acad. de Berlin, a. 1769. p. 205. genommen. Bey den astronomischen Schriftstellern findet man sie nicht so gut bey einander.

Gränze einer Größe ist diejenige Größe, welcher sich diese, als eine veränderliche betrachtet, immer mehr nähern kann, so daß der Unterschied kleiner werden mag, als jede noch so klein angenommene Größe.

So ist der Kreis die Gränze der eingeschriebenen oder der umgeschriebenen ordentlichen Vielecke; der Cylinder die Gränze von Prismen, deren Grundflächen die in und um die Grundfläche des Cylinders beschriebenen ordentlichen Vielecke sind, bey derselben Höhe mit dem Cylinder; ein Kegel auf ähnliche Art die Gränze von Pyramiden.

Die Summe einer unendlichen (nicht abbrechenden) Reihe ist die Gränze, welcher sich die arithmetische Summe der Glieder (oder das Aggregat, bey verschiedenen Vorzeichen der Glieder) immer mehr nähert, je mehr Glieder genommen werden, in dem Falle, daß die Glieder immer kleiner werden.

Die Gränze einer Größe kann Null oder ein unendlich großes seyn. So ist in einer geometrischen abnehmenden Reihe Null die Gränze der Glieder, gleichsam das letzte Glied in einer Reihe, worin es kein letztes giebt. In der zunehmenden geometrischen Reihe, worin der Exponent größer als die Einheit ist, ist das unendlich große die Gränze.

Die Gränze hat man von der sich annähernden Größe zu unterscheiden. Die eingeschriebenen Vielecke in einem Kreise bleiben immer von dem Kreise selbst verschieden; die Glieder einer geometrischen Reihe werden nie Null noch unendlich groß.

Die Gränze eines Verhältnisses zweyer veränderlichen Größen ist dasjenige, welchem sich ihr veränderliches Verhältniß immer mehr nähert, je größer sie genommen werden, oder in einem andern Falle, je kleiner sie sind.

Es sey $ay - bx = c$, so ist

$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{ax}$, und das Gränzverhältniß von $y : x$ ist

$= b : a$.

Es sey

$$yy + axy + bx^2 + cy + dx + e = o,$$

so ist durch die Division mit xx,

$$\frac{yy}{xx} + \frac{ay}{x} + b + \frac{cy}{xx} + \frac{d}{x} + \frac{e}{xx} = o.$$

Die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$ für unendlich große x und y, wenn es solche giebt, sey $= p$, so ist

$$pp + ap + b = o;$$

also $p = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$,

und die Gränze von $y : x$ ist $= p : 1$. Ist hier $\frac{1}{4}aa < b$, so giebt es keine unendliche große Werthe von x und y, wie es der Fall für die Coordinaten an einer Ellipse ist. Ist $\frac{1}{4}aa > b$, so sind zwey Gränzverhältnisse vorhanden, wie nämlich an einer Hyperbel; und ist $\frac{1}{4}aa = b$, so ist nur ein einfaches Gränzverhältniß $x : y$ da, wie an der Parabel.

Bey höhern Gleichungen sind auch mehrere Gränzverhältnisse für unendliche x und y möglich, wie in dem Artikel, krumme Linien, gezeigt wird.

Fehlt in der Gleichung zwischen x und y das unveränderliche Glied, so läßt sich auch ein Gränzverhältniß für abnehmende x und y angeben. Z. B. in der Gleichung,

$$yy + axy + bxx + cy + dx = o,$$

ist das Gränzverhältniß der ohne Ende abnehmenden y und x, das Verhältniß $d : -c$. Denn man dividire alle Glieder der Gleichung durch x, so ist

$$\frac{yy}{x} + ay + bx + \frac{cy}{x} + d = o.$$

Die drey ersten Glieder werden ohne eine Gränze des Abnehmens kleiner, je kleiner x und y genommen werden, und nur die beiden letzten behalten eine endliche Größe, so

daß die Gränze der Gleichung ist $\frac{cy}{x} + d = o$, woraus $y : x = d : -c$ folgt.

Für $x = o$ hat y außer dem Werthe o noch den Werth $-c$, weil das Aggregat der beyden Glieder $yy + cy = o$ ist, entweder, wenn $y = o$, wie $x = o$, gesetzt wird, oder wenn $y = -c$ genommen wird. Es sind hier zwey Fortschreitungen der zu den x gehörigen y. Eben so ist für $y = o$ entweder $x = o$, oder $= -\frac{d}{b}$.

Aus der Gleichung, $y^3 + x^3 = axy$, werde das Gränzverhältniß von x und y für abnehmende x und y gesucht. Es ist

$$\frac{y^3}{x^2} + x = \frac{ay}{x},$$

also ist Null die Gränze von $\frac{y}{x}$, und eben so von $\frac{x}{y}$. Man dividire die Gleichung durch x^2, so ist

$$\frac{y^3}{x^3} + 1 = \frac{ay}{x^2},$$

und die Gränze von $\frac{y}{x^2}$ ist $= \frac{1}{a}$. Eben diese ist auch die Gränze von $\frac{x}{y^2}$. Die Gleichung giebt drey Fortschreitungen der y, die zu x geordnet sind, und umgekehrt; in jeder derselben ist das Gränzverhältniß der verschwindenden x und y ein anderes.

Gränze einer Reihe, deren Glieder theils positiv, theils negativ sind, ist diejenige, von der Anzahl der Glieder unabhängige Größe, von welcher das endliche Aggregat der Glieder wechselsweise in Plus oder Minus verschieden ist. Eine solche giebt es für die Summe der Sinus und Cosinus der Winkel, die in arithmetischer Pro-

greſſion ſind (Goniometrie, 72, 73.). Bey den Werthen der Wurzeln algebraiſcher Gleichungen, wenn ſie durch eine Reihe dargeſtellt werden, kann eine ſolche Gränze auch Statt finden.

Das Gränzverhältniß der Veränderungen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen iſt nichts anders als ihr Differentialverhältniß. Es iſt dasjenige, was dem Verhältniſſe der endlichen Veränderungen zum Grunde liegt, und in dieſen durch die Quantität der Veränderungen modificirt wird. S. Differentiale.

Gromatica iſt eine lateiniſche Benennung der Feldmeßkunſt, von Groma oder Gruma, ein Werkzeug zum Feldmeſſen. S Fabri theſaurus erud. ſcholaſt. edit. Gesneri ſub voce Gruma.

Größe (Quantitas, Quantum) iſt, was aus gleichartigen Theilen zuſammengeſetzt iſt. Alles, was entweder in der Wirklichkeit oder in der Vorſtellung dieſe Beſchaffenheit hat, macht den Gegenſtand der Mathematik aus, dieſes der reinen, jenes der angewandten. Dieſe Wiſſenſchaft heißt daher ganz ſchicklich die Größenlehre.

Die gewöhnliche Erklärung der Größe iſt, ſie ſey dasjenige, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. Man kann dadurch aber verleitet werden, Beſchaffenheiten, die nur uneigentlich als Größen angeſehen werden können, für wahre Größen zu halten, als Kraft, Wärme, Licht. Dieſe kann man nur einer mittelbaren Meſſung und Vergleichung unterwerfen, nämlich vermittelſt wahrer Größen, mit welchen ſie verbunden werden. Man macht freylich einen Unterſchied zwiſchen extenſiver und intenſiver Größe (Quantitas extenſiva et intenſiva), allein es iſt, um die Begriffe gleich Anfangs vollkommen deutlich zu erhalten, beſſer, die intenſiven Größen gar nicht als Größen anzuſehen, und zu wiſſen, daß ſie nur durch andere, als Repräſentanten, einer mathematiſchen Vergleichung fähig ſind.

mung mit ihr gemeinschaftlich haben, eine gewisse Eigenschaft in der größten oder kleinsten Quantität zukommt. Z. B. es werde die krumme Linie gesucht, welche unter allen von gleichem Umfange mit ihr, auch solchen, die aus geraden Linien zusammengesetzt sind, den größten Raum einschließt. Oder es werde der Körper gesucht, der unter allen von gleicher Oberfläche den größten räumlichen Inhalt hat. Es werde zwischen zwey Puncten, die nicht in derselben lothrechten Linie liegen, die krumme Linie gesucht, auf welcher ein Körper, oder eigentlich ein schwerer Punct, in der kürzesten Zeit von dem obersten bis zu dem untersten Puncte herabfällt. Aufgaben dieser Art werden unter der zwar speciellen Benennung, isoperimetrisches Problem, begriffen, gegenwärtig am gewöhnlichsten unter der Benennung, Variations-Rechnung. Unter dem letztern Namen wird diese feine und wichtige Untersuchung ihre Stelle erhalten.

Die Untersuchung, von welcher in dem gegenwärtigen Artikel gehandelt wird, gehört zum Theil zu den elementarischen. Manche merkwürdige hieher gehörige Aufgaben aus der Geometrie lassen sich durch die gemeinen Lehren derselben auflösen. Was man aus diesen nähern Quellen schöpfen kann, braucht man nicht durch höhere Rechnung zu suchen, welche man übrigens zur Vergleichung der Methoden nützlich anwenden kann.

Die Lehre vom Größten und Kleinsten ist wegen ihrer mannichfaltigen Anwendungen sowohl in der reinen als angewandten Mathematik sehr wichtig. Aus der erstern kommen in diesem Artikel Beyspiele vor. Auch für die Philosophie ist diese Lehre wichtig geworden, da sie mit der Frage von den Endursachen zusammenhängt, so fern man dabey annimmt, daß es bey den Naturwirkungen Zweck sey, alles mit dem geringsten Aufwande von Kraft oder Mitteln überhaupt zu bewirken. Leibnitz leitete daher das Gesetz der Zurückstrahlung und Strahlenbrechung her, indem er annahm, das Licht gehe von einem Puncte zu einem andern auf dem leichtesten Wege, so wie vor ihm Fermat gesagt hatte, daß das Licht die kürzeste Zeit ge-

brauche. Das Gesetz von der kleinsten Wirkung, welches Maupertuis aufstellte, erregte einen heftigen gelehrten Streit (Kästners Mechanik. S. 577. ff.). Man muß sich hüten, nothwendige mathematische Folgen als Zwecke zu betrachten, oder die Frage, wie? mit der Antwort auf die Frage, wozu? auflösen zu wollen.

I. Geometrische Verfahrungsarten.

1. Unter allen Dreyecken über einer gemeinschaftlichen Grundlinie, deren Scheitelpuncte in eine der Lage nach gegebene gerade Linie fallen, hat dasjenige den kleinsten Umfang, dessen Schenkel mit jener Linie gleich große Winkel machen.

Es ist AB (Fig. 66.) die gegebene Grundlinie des Dreyecke, DE die der Lage nach gegebene gerade Linie; APB irgend ein Dreyeck über AB, mit dem Scheitel P auf DE; ACB dasjenige, dessen Schenkel AC, BC mit DE die gleichen Winkel ACD, BCE machen. Man ziehe BF senkrecht auf DE, und verlängere den Schenkel AC bis an die gleichfalls verlängerte BFG in G, so ist FG = BF. Nun ziehe man PG, so ist PG = BP, und AP + BP = AP + PG. Nun ist AP + PG > AG, das ist, AP + PG > AC + BC. Daher ist die Summe der drey Seiten in dem Dreyeck APB größer als die der drey Seiten in dem Dreyeck ACB.

2. Wenn DE parallel mit AB ist, so ist △ ACB gleichschenklicht und gleichen Inhalts mit △ APB. Unter allen Dreyecken gleichen Inhalts, über derselben Grundlinie, hat das gleichschenklichte den kleinsten Umfang.

3. Unter allen Dreyecken gleichen Inhalts hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Denn es habe, wenn es möglich ist, ein ungleichseitiges Dreyeck den kleinsten Umfang unter allen Dreyecken von einem gegebenen Inhalt. Die eine Seite desselben sey a, so müssen die beiden andern gleich groß seyn, weil sonst der Umfang noch verkleinert werden kann, ohne

den Inhalt zu verändern. Nimmt man eine dieser Seiten, b, b, zur Grundlinie, so müssen aus demselben Grunde die beiden andern Seiten gleich groß seyn, oder es ist a = b. Dieses widerspricht der Voraussetzung. Also ist sie unmöglich.

4. Unter allen Dreyecken mit gleichem Umfange, und über derselben Grundlinie, hat das gleichschenklichte den größten Inhalt.

Es sey (Fig. 67.) APB irgend ein Dreyeck, und PQ eine parallele durch P mit AB. Man zeichne das gleichschenklichte Dreyeck ACB, dessen Scheitel C in PQ falle, so ist der Umfang von ACB kleiner als der von APB. Das gleichschenklichte Dreyeck ADB, dessen Umfang dem von APB gleich ist, muß also größer seyn als das Δ ACB oder als Δ APB.

5. Unter allen Dreyecken von gleichem Umfange ist das gleichseitige das größte.

Auf ähnliche Art wie in (3.) wird erwiesen, daß ein ungleichseitiges Dreyeck von dem gegebenen Umfange nicht den größten Inhalt haben könne.

6. Diejenige geradlinichte Figur, welche den kleinsten Umfang unter allen gleichnamigen Figuren von gleichem Inhalte hat, ist eine gleichseitige.

Gleichnamige Figuren sind die, in welchen die Anzahl der Seiten gleich groß ist. Man setze, daß eine geradlinichte Figur, die nicht gleichseitig ist, bey dem gegebenen Inhalte den kleinsten Umfang habe. In dieser ziehe man neben zwey ungleichen Seiten eine Diagonale, und zeichne über dieser als Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreyeck von demselben Inhalte wie das ungleichschenklichte. Setzt man jenes Dreyeck statt dieses, so erhält die neue Figur, bey unverändertem Inhalte und derselben Anzahl ihrer Seiten, eine kleinere Summe ihrer Seiten (2.), wider die Voraussetzung, daß in der angenommenen Figur die Summe der Seiten ein Kleinstes seyn sollte.

7. Diejenige geradlinichte Figur, welche den gröſsten Inhalt unter allen gleichnamigen Figuren von gleichem Umfange hat, iſt eine gleichſeitige.

Der Beweis iſt wie in (6.).

8. Es laſſen ſich unzählig viele gleichſeitige Figuren, deren Inhalt oder Umfang gegeben iſt, zeichnen. Denn wenn man irgend eine gleichſeitige Figur gezeichnet hat, ſo verhält ſich ihr Inhalt zu dem gegebenen, wie das Quadrat einer ihrer Seiten zu dem Quadrat der gleichnamigen Seite in der ähnlichen Figur von dem gegebenen Inhalte. Ihr Umfang verhält ſich zu dem gegebenen, wie eine ihrer Seiten zu der gleichnamigen in der ähnlichen Figur. In dem Artikel, Kreis, wird gezeigt, daſs die gleichſeitige Figur mit dem kleinſten Umfange oder dem gröſsten Inhalte eine reguläre iſt.

Man hat hier ein Beyſpiel von einem Minimum minimorum und Maximum maximorum.

9. Ein Kreis, deſſen Mittelpunct C iſt (Fig. 68.), iſt nebſt zwey Puncten A, B, auſſerhalb deſſelben, gegeben. Die Summe der geraden Linien AD, BD, welche von A und B nach einem Puncte des Umfanges des Kreiſes gezogen werden, iſt am kleinſten in dem Puncte D, wo die Winkel ADC, BDC, ſtumpf und gleich groſs ſind. Umgekehrt, die Winkel ADC, BDC ſind gleich, wenn die Summe AD + BD ein Kleinſtes iſt

Denn man ziehe durch D die berührende EF, und an irgend einen Punct des Umfanges P die Linien AP, BP. Die letztere ſchneide EF in Q. Nun iſt AD + BD kleiner als AQ + BQ, alſo noch vielmehr kleiner als AP + BP. — Der umgekehrte Satz wird daher leicht erwieſen.

10 Die Summe der geraden Linien, welche von den Puncten A und B an einen Punct auf dem Umfange des um den Mittelpunct C beſchriebenen Kreiſes gezogen werden, iſt am gröſsten, wenn, wie in (Fig. 69.), die ſpitzen Winkel ADC, BDC der Linien AD, BD mit dem Halbmeſſer CD gleich groſs ſind.

Man ziehe nach irgend einem Puncte P des Umfanges die geraden AP, BP, welche den Umfang in Q, R schneiden. Die Linien AD, BD schneiden denselben in F, G, und der Durchmesser durch D treffe ihn in E. Ferner sey durch die Puncte D, P die gerade MN gezogen. Zuerst ist zu zeigen, daß der Unterschied der Winkel ADM und BDN größer ist als der Unterschied von APM und BPN.

Der Winkel ADM hat zum Maaße die halbe Summe der Bogen DF + DP, weil der Nebenwinkel zum Maaße hat $\frac{1}{2}$ (EF + EP). Das Maaß von BDN ist $\frac{1}{2}$ GP; und von dem Unterschiede ADM — BDN die halbe Summe von DF + DP — GP. Da EF = EG ist, so ist DF = DP + PG, also ist von ADM — BDN das Maaß der Bogen DP.

Ferner ist von dem Winkel APM das Maaß die Hälfte von DF + FQ, oder die Hälfte von DP + PR + RG + FQ, so wie vom Winkel BPN die Hälfte von DP + PR; also von dem Unterschiede, APM — BPN die Hälfte von FQ + GR. Es ist aber FQ < DP, und GR < DP. Denn in dem Dreyeck APF ist Winkel APF < äussere DFP, also Bogen FQ < Bogen DP. Eben so ist in dem Dreyeck BPG der Winkel BPG < äussere DGP, und Bogen GR < Bogen DP.

Folglich ist ADM — BDN > APM — BPN, Daraus folgt, daß AD + BD > AP + BP ist, welches sich aus dem Beweise des S. 1. leicht herleiten läßt. Je weiter in Fig. 66. der Punct P von dem Puncte C (dem Puncte der kleinsten Summe der Linien AC, BC, und der gleichen Winkel ACD, BCE) abrückt, desto größer wird die Summe der Linien AP, BP, und die Ungleichheit der Winkel APD, BPE.

11. Innerhalb eines Dreyecks ABC, worin kein Winkel größer als $\frac{4}{3}$ R oder 120° ist (Fig. 70.), seyn nach einem Puncte D von den Winkelpuncten die geraden, AD, BD, CD gezogen: wenn ihre Summe ein Kleinstes ist, so sind die Winkel ADB, BDC, CDA gleich groß.

Es sey CD eine der drey Linien, welche die kleinste Summe geben. Mit dem Halbmesser CD beschreibe man den Kreisbogen MN, so liegt auf diesem der Punct D so, daß die Summe AD + BD ein Kleinstes ist. Folglich sind die Winkel, ADC, BDC, gleich groß. Ist BD eine der drey Linien, welche die kleinste Summe ausmachen, so ist BDC = BDA, also sind alle drey Winkel um D gleich groß.

12. Unter allen Dreyecken, die in einen Kreis eingeschrieben werden können, ist das gleichseitige das größte.

Denn man zeichne über irgend einer Chorde des Kreises ein gleichschenklichtes Dreyeck, so ist dieses größer als jedes andere über derselben Chorde in dem Kreise beschriebene, weil es die größte Höhe hat. Soll dieses Dreyeck zugleich das größte unter allen in dem Kreise beschriebenen Dreyecken seyn, so muß die vorher als Grundlinie angenommene Seite jedem der beiden gleichen Schenkel gleich seyn, weil sonst über einem dieser Schenkel noch ein größeres gleichschenklichtes Statt hätte.

Eine andere Beweisart ist zu finden in einer Abhandlung von John Stedman: Of triangles described in circles and about them. Phil. Transf. 1775. p. 296.

In dem Dialog, Meno, von Plato, Kap. 22. kommt ein Beyspiel aus der Geometrie vor, welches mit dem jetzt eben bewiesenen Satze zusammenhängt. Sokrates führt an, daß die Geometer oft zufolge einer Voraussetzung ihre Untersuchungen anstellten. Wenn z. B. gefragt würde, ob in einen gewissen Kreis ein gewisser dreyseitiger Raum (χωριον τριγωνον) eingetragen werden könne, so würde der Geometer etwa antworten, ich weiß es noch nicht, ob der gegebene Raum dazu geeignet sey, aber ich glaube dazu eine vorbereitende Voraussetzung machen zu können. Was nun folgt, ist ganz unverständlich, und hat den Philologen viele Mühe ohne Erfolg gemacht. Wenn die Einzeichnung des Raums in Form eines Dreyecks gemeynt ist, so bedarf es hiezu

keiner hypothetischen Untersuchung, sondern die bestimmte Antwort ist: Ein Dreyeck von dem gegebenen Inhalte läßt sich in den gegebenen Kreis einzeichnen, wenn es nicht größer ist als das gleichseitige in dem Kreise beschriebene Dreyeck. Man sieht, daß Plato unsern Satz noch nicht gekannt hat, es müßte denn in dem gegenwärtigen Texte etwas ausgelassen seyn.

13. Unter allen Vielecken mit gleich vielen Seiten, die in einem Kreise beschrieben sind, ist dasjenige, welches den größten Flächenraum hat, ein gleichseitiges.

Denn man schneide in dem größten dieser Vielecke zwey neben einander liegende Seiten durch eine Diagonale ab, so müssen jene beiden Seiten gleich groß seyn, weil sonst statt des abgeschnittenen Dreyecks ein größeres in dem Kreisabschnitte gesetzt werden könnte. Darum müssen alle Seiten sich gleich seyn.

14. In dem Dreyeck ABC (Fig. 71.) ist aus einem Winkelpuncte C nach der Mitte D der gegenüber liegenden Seite AB die CD gezogen. Diese werde in E so getheilt, daß EC = 2 ED ist. Aus E beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser EF einen Kreis, und nehme auf dessen Umfange einen Punct F, nach welchem von A, B, C die geraden, AF, BF, CF, gezogen werden. Es ist $AF^2 + BF^2 + CF^2 = AB \times AD + CD \times CE + 3EF^2$.

Denn erstlich ist $AF^2 + BF^2 = 2AD^2 + 2DF^2$ (Dreyeck, 24.), und daher

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 2AD^2 + 2DF^2 + CF^2.$$

Nun ziehe man FG senkrecht auf CD, so ist, in dem Falle der Figur, (Dreyeck, 20, 19.),

$$CF^2 = CE^2 + EF^2 + 2CE \times EG,$$
$$DF^2 + 2ED \times EG = DE^2 + EF^2.$$

Da CE = 2 ED genommen ist, so ist $2CE \times EG = 4ED \times EG$, und es entsteht aus den beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction diese,

$$CF^2 + 2DF^2 = CE^2 + 2DE^2 + 3EF^2.$$

Nun ist, zufolge der Voraussetzung, daß $CE = 2DE$ ist, $CE^2 = 4DE^2$, und $6DE^2 = 3DE \times 2DE = CD \times CE$, also ist

$$CF^2 + 2DF^2 = CD \times CE + 3EF^2.$$

Dadurch ist

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 2AD^2 + CD \times CE + 3EF^2.$$

Setzt man noch AB statt $2AD$, so ist $2AD^2 = AB \times AD$, und es wird nun die in dem Satze aufgestellte Gleichung erhalten.

Für jede Lage des Punctes G wird dieselbe Gleichung gefunden. Bleibt G auf der Seite von E wie in der Figur, so bleibt alles in dem Beweise ungeändert. Liegt G auf der andern Seite von E, so verändern $2CE \times EG$ und $2ED \times EG$ nur ihre Beziehungen, heben sich aber ebenfalls einander auf.

Die Gleichung, $CF^2 + 2DF^2 = CD \times CE + 3EF^2$, die in dem Beweise gefunden ward, laßt sich auch aus einer der arithmetischen Gleichungen (Dreyeck, 26.) herleiten, wobey man zu dem Beweise des gegenwärtigen Satzes die senkrechte FG zu ziehen nicht nöthig hat.

15. Zieht man von A, B, C, nach dem Puncte E die geraden AE, BE, CE, so ist die Summe ihrer Quadrate, $AE^2 + BE^2 + CE^2$, ein Kleinstes, und $= AB \times AD + CD \times CE$.

Denn für jeden andern Punct F ist die Summe der Quadrate noch um $3EF^2$ größer als die Summe der Rechtecke $AB \times AD + CD \times CE$.

Der Punct E ist der gemeinschaftliche Schwerpunct der drey Puncte A, B, C als schwer betrachtet.

Bey mehr als drey Puncten findet eine ähnliche Relation für die Quadrate der von ihnen nach ihrem Schwerpuncte gezogenen Linien statt. S. Kreis.

16. Unter allen Prismen von gleicher Höhe über gleich großen und ähnlichen Grundflachen hat das senkrechte die kleinste Oberfläche.

Und, unter allen Prismen, über gleich großen und ähnlichen Grundflächen, und mit gleicher Summe der

Seitenflächen, hat das senkrechte die größte Höhe oder den größten Inhalt.

17. Unter allen gleichnamigen senkrechten Prismen von gleicher Höhe, über einer der Größe nach gegebenen Grundfläche, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grundfläche eine reguläre Figur ist.

18. Unter allen gleichnamigen senkrechten Prismen von gleicher Höhe, deren ganze Oberfläche dieselbe ist, ist dasjenige das größte, welches zur Grundfläche eine reguläre Figur hat.

19. Unter allen senkrechten Parallelepipeden von gegebenem Inhalte hat der Würfel die kleinste Oberfläche, und umgekehrt, unter allen solchen Körpern mit gleicher Oberfläche hat der Würfel den größten Inhalt.

20. Der senkrechte Cylinder, dessen Durchmesser seiner Höhe gleich ist, hat eine kleinere Oberfläche (krumme mit den Grundflächen) als jeder andere, ihm gleicher senkrechte; auch ist jener größer als jeder andere senkrechte, der gleiche Oberfläche mit ihm hat.

21. I. Unter allen gleichnamigen Pyramiden von gleicher Höhe, über Grundflächen von gleichem Inhalte und Umfange, hat diejenige, in welcher alle Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt sind, die kleinste Oberfläche zwischen den Seitenlinien.

II. Unter allen gleichnamigen Pyramiden, die über Grundflächen von gleichem Inhalte und Umfange stehen, und an welchen die Summe der Oberflächen zwischen den Seitenlinien gleich groß ist, hat diejenige, in welcher die Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich geneigt sind, den größten Inhalt.

III. Unter allen gleichnamigen Pyramiden, von gleicher Höhe über Grundflächen gleichen Inhalts, mit gleichen Neigungswinkeln der Seitenflächen gegen die Grundfläche, hat diejenige, deren Grundfläche eine reguläre Figur ist, die kleinste Oberfläche zwischen den Seitenlinien.

Man bemerke, daß in einer Pyramide, deren Grundfigur um einen Kreis beschrieben werden kann, die Seitenflächen gegen die Grundfläche gleiche Neigung haben, wenn der Grundpunct der Höhe in den Mittelpunct des Kreises fällt.

22. Das reguläre Tetraedron hat unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleichem Inhalte die kleinste Oberfläche, und unter allen dreyseitigen Pyramiden mit gleicher Oberfläche (aller vier Flächen) den größten Inhalt.

23. Die Beweise dieser Sätze, welche hier sich nicht wohl geben ließen, finden sich in einem den Liebhabern der feinern Geometrie sehr zu empfehlenden Werke: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata, auct. Sim. L'Huilier. Varsaviae 1782. 285 pagg. in-4. Einen Auszug der vornehmsten Sätze mit den Beweisen hat der Verfasser seiner Polygonometrie, ou de la mesure des figures rectilignes, à Genève et Paris 1789. beygefügt.

II. Analytische Methoden für Functionen von einer veränderlichen Größe.

24. Die einfachste Function, für welche ein Größtes oder Kleinstes Statt findet, ist diese, $ax^2 - bx + c$, deren veränderlicher Werth durch u bezeichnet werde, so daß $ax^2 - bx + c = u$ ist. Oder es ist

$$x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{u-c}{a}, \text{ also (Gleichung, 33.)}$$

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} - \frac{c-u}{a}\right)}.$$

Damit x möglich sey, muß $bb - 4a(c-u)$ positiv seyn, das ist, es muß seyn $u >$ oder $= \frac{4ac-bb}{4a}$. Der kleinste Werth, den ein positives u haben kann, ist also

$\frac{4ac-bb}{4a}$. Für diesen Werth von u ist $x = \frac{b}{2a}$, da die Größe unter dem Wurzelzeichen = o ist. Ist a positiv, und ist 4ac — bb es auch, wie es aus einem positiven u folgt, so hat die Gleichung, $ax^2 - bx + c = o$, keine mögliche Wurzeln (Gleichung. 36.).

Soll u negativ seyn, so ist $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} - \frac{c+u}{a}\right)}$, und der größte Werth, den u, absolut genommen, haben kann, ist $= \frac{bb-4ac}{4a}$. Für diesen Werth von u ist $x = \frac{b}{2a}$, und die Gleichung, $ax^2 - bx + c = o$, hat zwey mögliche Wurzeln.

25. Wenn die Gleichung, $ax^2 - bx + c = o$, keine mögliche Wurzeln hat, so ist ihr Werth immer positiv, was man auch für x setzen mag (Gleichung, 46.). Für sehr große positive oder negative x in Vergleichung mit $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ ist der Werth der Gleichung groß, und nimmt bey der Verminderung von x ab, bis zu einer gewissen Gränze, dem kleinsten Werthe der Gleichung.

Hat die Gleichung zwey mögliche Wurzeln, so wird ihr Werth, wenn x zwischen diesen Wurzeln genommen wird, negativ (Gleichung 45), und nimmt von o an zu bis zu einer gewissen Gränze, dem größten negativen Werthe, um von da an wieder bis zu o abzunehmen.

26. Exempel. Eine gegebene Zahl (oder Linie) in zwey Theile zu theilen, so daß das Product der beiden Theile ein Größtes sey. — Die Zahl sey a, der eine Theil x, so ist der andere a — x, ihr Product $= ax - xx$. In der Auflösung (24.) ist für a, b, c zu setzen, — 1, ; a ; o, und so ist hier der zweyte Fall, da die Gleichung, $ax - xx = o$, oder $xx - ax = o$ zwey

mögliche Wurzeln, $x = o$ und $x = a$, hat. Der größte Werth von $xx - ax$ ist $= -\frac{1}{4}aa$, von $ax - xx$ also $+\frac{1}{4}aa$, und der zugehörige Werth von $x = \frac{1}{2}a$.

27. Exempel. Eine gegebene Zahl a in drey Theile so zu theilen, daß zwey derselben das Verhältniß $m : n$ haben, und die Summe der Producte aus je zweyen ein Größtes sey.

Die beiden ersten Theile seyn mx; nx, so ist der dritte $= a - (m+n)x$, und die Summe der Producte $= (m+n)ax - (m^2 + mn + n^2)x^2$. Der größte Werth dieser Summe ist $= \frac{(m+n)^2 aa}{4(mm+mn+nn)}$, für $x = \frac{(m+n)a}{2(mm+mn+nn)}$.

28. Die allgemeine Methode, für jede Function einer veränderlichen x den größten oder kleinsten Werth der Function nebst dem zugehörigen von x zu finden, beruht auf folgenden Betrachtungen.

Es sey u eine Function von x. Der positive Werth von u nehme um Δu zu, wenn der positive Werth von x um $+\Delta x$ sich verändert. In diesem Falle ist der Quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ positiv. Für einen andern Werth von x nehme u um Δu ab, wenn x um Δx zunimmt, so ist in diesem Falle der Quotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ negativ. Der erstere Werth von x sey kleiner, als der zweyte, so zeigt die entgegengesetzte Beschaffenheit jener Quotienten an, daß zwischen beiden x ein Werth von x liegt, für welchen die Function u ein Größtes ist. Ist der zweyte Werth von x kleiner als der erste, so liegt zwischen den beiden zugehörigen Werthen der Function u ein kleinster Werth derselben. Es könnten mehr als ein Größtes oder Kleinstes zwischen jenen Werthen von u liegen; hier ist es aber nicht nöthig, darauf zu achten.

Zu demjenigen x, für welches der Übergang zum Entgegengesetzten geschieht, gehört der größte oder kleinste

Werth der Function u. Um dieses x zu bestimmen, muß der Werth des Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, der sich aus der Beschaffenheit der Function u ergiebt, Null gesetzt werden. Wenn $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$ ist, so ist dieser Quotient weder positiv noch negativ, und macht den Übergang zum Entgegengesetzten. Da aber derselbe für endliche Veränderungen von x und u entweder positiv oder negativ ist, so kann man nur den ersten Theil dieses Quotienten, den von den Veränderungen unabhängigen Theil Null setzen, das ist, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ nehmen. Die Gleichung für x, welche hieraus entsteht, giebt denjenigen Werth von x, zu welchem der größte oder kleinste Werth von u gehört, vorausgesetzt, daß ein solcher Werth Statt hat. Denn es kommt allerdings noch zugleich auf die Beschaffenheit des ganzen zweyten Theils von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ an, ob dieser Quotient für die auf beiden Seiten jenes x liegenden Werthe, $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$, entgegengesetzte Beschaffenheit habe.

29. Es ist nach dem Taylorschen Lehrsatze, (Differenzenrechnung, 38.)

$$u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wenn a. a O. für fx, u, $f(x+u)$ gesetzt werden u, Δx, $u + \Delta u$.

Setzt man für die Differential-Quotienten nach ihrer Ordnung, p, q, r, s, etc. so ist

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = p + \tfrac{1}{2} q \Delta x + \tfrac{1}{6} r \Delta x^2 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Man setze nun $p = 0$, und es sey für einen dadurch erhaltenen Werth von x, der durch x' ausgezeichnet werde,

nicht $q = o$, so ist für diesen Werth von x die Function $+ u$ ein Gräßtes, wenn q negativ ist, ein Kleinstes, wenn q positiv ist.

Denn erstlich sind für entgegengesetzte Veränderungen von x' die Werthe des Quotienten $\Delta u : \Delta x$ entgegengesetzt, da Δx so klein genommen werden mag, daß die Glieder $\frac{1}{3} r \Delta x^2$ und alle folgende zusammen nicht mit $\frac{1}{2} q \Delta x$ verglichen werden können, und daher die Beschaffenheit jenes Quotienten zu ändern nicht vermögen. Zweytens gehört bey einem positiven Werthe von q der positive Werth von $\Delta u : \Delta x$ zu einem x, das größer ist als x', der negative Werth dieses Quotienten zu einem x, das kleiner als x' ist; umgekehrt bey einem negativen Werth von q, wenn beidemahl u positiv ist. Daher ist zufolge der Bemerkung in (28.) der zu x' gehörige Werth von u in dem erstern Falle ein Kleinstes, in dem andern ein Größtes.

30. Oder noch deutlicher: Es ist, wenn $p = o$ genommen wird,

$$\Delta u = \tfrac{1}{2} q \Delta x^2 + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4 + \text{etc.}$$

Ist q positiv, so ist $+ u + \Delta u$ größer als $+ u$, man mag $x' + \Delta x$ oder $x' - \Delta x$ statt des x', wozu u gehört, setzen, wenn x unbestimmt klein genommen wird. Ist aber q negativ, so ist Δu negativ, man mag Δx additiv oder subtractiv nehmen. In dem ersten Falle ist daher $+ u$ ein Kleinstes, in dem andern ein Größtes.

Wäre der zu x' gehörige Werth von u negativ, so ist der absolute Werth dieser Function für ein positives q ein Größtes, für ein negatives q ein Kleinstes.

31. Um beide Fälle unter einer Regel zu begreifen, lasse man auch hier den in dem Artikel, entgegengesetzte Größen, erklärten analytischen Sprachgebrauch gelten, nach welchem $-a-b$ für kleiner als $-a$ gehalten wird, wenn a und b bloß die Quantität bedeuten. Dann ist $-u+\Delta u$ größer als $-u$, und $-u-\Delta u$ kleiner als $-u$, und die Regel bleibt, daß ein positives q ein Kleinstes, ein negatives q ein Größtes anzeigt. Ist u negativ, so ist es, absolut genommen,

oder der Quantität nach, für $+q$ ein Größtes, für $-q$ ein Kleinstes.

32. Es sey nebst $p=0$ auch $q=0$, aber nicht $r=0$, so ist der zu x' gehörige Werth von u weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Denn da nun ist

$$\Delta u = +\tfrac{1}{3}r\Delta x^3 + \tfrac{1}{24}s\Delta x^4 + \text{etc.}$$

so ist, für unbestimmt kleine Δx, die Veränderung Δu von entgegegesetzter Beschaffenheit, so daß für $x'-\Delta x$, x', $x'+\Delta x$, die Werthe der Function sind $u \pm \Delta u$, u, $u \mp \Delta u$, daher die Werthe der Function entweder zunehmende oder abnehmende sind. Die beiden durch Δu bezeichneten Veränderungen können ungleich seyn.

33. Ist nebst $p=0$, und $q=0$, auch $r=0$, aber nicht $s=0$, so ist die zu x' gehörige Function u ein Größtes, wenn s negativ ist, ein Kleinstes, wenn s positiv ist.

Auf diese Art ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, wenn in der Reihe der Differential-Quotienten, der erste, welcher nicht $=0$ ist, von einer geraden Ordnung ist; kein Größtes oder Kleinstes in dem entgegengesetzten Falle.

34. Es sey nun

$$u = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + gx^2 + hx + k,$$

wo die Coefficienten auch entgegengesetzte Werthe haben mögen, und m eine ganze Zahl ist, so ist (Differentialformeln, 1.)

$$\partial u = (mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} + (m-3)cx^{m-4} \ldots + 2gx + h)\partial x,$$

und die Werthe derjenigen x, für welche u ein Größtes oder Kleinstes ist, sind die Wurzeln der Gleichung,

$$0 = mx^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} + (m-3)cx^{m-4} \ldots + 2gx + h. \quad (N)$$

35. Wenn die Gleichung,

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + hx + k \quad (M)$$

alle Wurzeln möglich und ungleich ſind, ſo hat die derivirte Gleichung (N) $m-1$ mögliche ungleiche Wurzeln, für deren jede ein abſolutes Gröſstes der Function u Statt hat. Denn es ſeyn α, β zwey nächſte Wurzeln der Gleichung (M), ſo nehmen die Werthe deſſelben, wenn für x eine Reihe Werthe von α bis β ſo geſetzt werden, von a bis zu einer gewiſſen Gränze zu, und darauf ab bis zu Null. Die gröſsten Werthe der Gleichung ſind abwechſelnd poſitiv und negativ. Die negativen werden nach (31.) als Kleinſte betrachtet.

36. Hat die Gleichung (N) eine oder mehrere Wurzeln, zu welchen in der Gleichung (M) abſolute Kleinſte, poſitive oder negative, gehören ſo hat die Gleichung (M) eben ſo viele Paare unmöglicher Wurzeln. Denn in einer Gleichung nur lauter möglichen ungleichen Wurzeln finden keine abſolut Kleinſte ſtatt (35). Das kleinſte Gröſste iſt $= o$, in dem Falle, da die Gleichung (N) eine Wurzel mit (M) gemein hat. Alsdann ſind zwey Wurzeln in (M) gleich groß. Man mag ſich dieſes durch eine Zeichnung erläutern. Wenn in Fig. 28. Tab. II. Th. I. die Abſciſſenlinie für die Curve, welche eine Gleichung vom vierten Grade abbildet, überhalb des Puncts b, parallel mit XY läge, ſo würde der Werth der Gleichung in dem Puncte b abſolut ein Kleinſtes ſeyn, die Abſciſſenlinie ſchnitte die Curve nur zweymahl, und die Gleichung hätte nur zwey mögliche Wurzeln. Läge die Abſciſſenlinie, parallel mit XY, unter d und c zugleich, ſo entſtanden zwey abſolute Kleinſte, und die Gleichung hätte gar keine mögliche Wurzeln. Berührte ſie die Curve in b, ſo hätte die Gleichung zwey gleiche und zwey ungleiche Wurzeln.

37. Die Gleichung (N) habe zwey gleiche Wurzeln, α, α, und das Aggregat ihrer Glieder ſey $= (x-\alpha)^2 P$, wo P das Product der übrigen Wurzelfactoren iſt. Da $\frac{\partial u}{\partial x} = (x-\alpha)^2 P$ geſetzt iſt, ſo iſt q oder $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(x-\alpha)P + (x-\alpha)^2 \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$, und beide Quotienten ſind

$= o$ für den Werth α von x. Aber der dritte Differential-Quotient $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ oder r ist nicht $= o$. In diesem Falle ist also kein Größtes oder Kleinstes für $x = \alpha$, wodurch $p = o$ ist, vorhanden. Es schließen sich nun ein Größtes und ein Kleinstes in Fig. 28. Th. I. an einander, oder zwey Biegungen der Curve fallen zusammen. Der Punct, wo sie zusammen kommen, ist ein Wendungspunct. Hat die Gleichung (M) nicht den Factor $(x-\alpha)^3$, oder drey gleiche Wurzeln; so hat sie wegen des hier angenommenen Ereignisses zwey unmögliche Wurzeln.

38. Die Gleichung (N) habe drey gleiche Wurzeln α, oder es sey p, das ist, $\frac{\partial u}{\partial x} = (x-\alpha)^3 P$, so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3(x-\alpha)^2 P + (x-\alpha)^3 . \frac{\partial P}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6(x-\alpha)P + 6(x-\alpha)^2 . \frac{\partial P}{\partial x} + (x-\alpha)^3 . \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

Es ist also mit $p = o$, für $x = \alpha$, zugleich $q = o$, und $r = o$, aber nicht $s = o$, also ist nun ein Größtes oder Kleinstes vorhanden. In Fig. 28. schließen sich zwey Größte (Kleinste) und ein Kleinstes (Größtes) an einander, oder drey Biegungen der Curve fallen zusammen. Der Punct, wo sie zusammen kommen, heißt ein Schlangenpunct. Hat die Gleichung (M) nicht vier gleiche Wurzeln α, so hat sie, wegen des hier angenommenen Ereignisses zwey unmögliche Wurzeln.

Überhaupt, wenn die Gleichung (N) eine gerade Anzahl gleicher Wurzeln, α, hat, so entsteht kein Größtes oder Kleinstes für $x = \alpha$ aus der Gleichung (M); bey einer ungeraden Anzahl aber ist ein einziges Größtes oder Kleinstes für $x = \alpha$ vorhanden.

39. Exempel. I. Es sey $u = x^2 - ax + b$, so ist $p = 2x - a$, und $q = +2$. Für $p = o$ ist $x = \frac{1}{2}a$, und $u = -\frac{1}{4}aa + b$.

Ist dieser Werth positiv, so ist er (wegen $q = +2$) ein Kleinstes, auch der absoluten Größe nach; ist er negativ, so ist er ein relatives Kleinstes, das ist, absolut ein Größtes. In jenem Falle hat die Gleichung, $u = o$, keine mögliche Wurzeln. (Vergl. 24.)

40. Exempel II. Es sey $u = x^3 - ax^2 + bx - c$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2ax + c;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 2a.$$

Die Gleichung, $o = 3xx - 2ax + b$, giebt die Werthe von x, für welche u ein Größtes oder Kleinstes ist. Es ist $x = \frac{1}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{(aa - 3b)}$, und dadurch $q = \pm 2\sqrt{(aa - 3b)}$. Sind beide Werthe von u für diese Werthe von x gleichnamig, so hat die Gleichung, $u = o$, zwey unmögliche Wurzeln. Sind sie ungleichnamig, so hat sie drey mögliche Wurzeln. Ist $aa = 3a$, so ist $q = o$, und es ist gar kein Größtes oder Kleinstes vorhanden. Die Gleichung, $u = o$, hat in diesem Falle auch zwey unmögliche Wurzeln, wenn nicht $c = \frac{1}{27}a^3$ ist, wodurch $u = (x - \frac{1}{3}a)^3$ wird. Ist $a^2 < 3b$, so hat selbst die Gleichung, $p = o$, keine möglichen Wurzeln, und dadurch hat die Gleichung, $u = o$, auch zwey unmögliche. (Vergl Gleichung, 68, 69.)

Der größte und kleinste Werth von u sind,

$$u = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

wo das obere Vorzeichen den kleinsten Werth, das untere den größten Werth giebt.

41. Exempel III. Es sey $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 48x + 44.$$

Die Wurzeln der Gleichung,

$$0 = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24,$$

oder

$$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

sind die Werthe von x, zu welchen größte oder kleinste Werthe von u gehören. Diese Wurzeln sind, + 1; + 2; + 3. Die dazu gehörigen Werthe von u sind + 3; + 4; — 97; die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ oder q sind + 8; — 4; + 8. Also ist + 3 ein Kleinstes; + 4 ein Größtes, und — 97 ein relatives Kleinstes, das ist ein absolutes Größtes. Die Gleichung, u = o, hat zwey unmögliche Wurzeln.

42. Aufg. Zu finden, welches unter allen in einem Kreise eingeschrieben n Rechtecken das größte ist.

Der Halbmesser sey = a, die eine Seite = 2x, so ist die andere $= 2\sqrt{(aa - xx)}$, und der Inhalt des Rechtecks $= 4x\sqrt{(aa - xx)}$. Man setze $u = x\sqrt{(aa - xx)}$, oder $uu = aaxx - x^4$. Aus der letztern Gleichung ist $p = 2aax - 4x^3$, und $q = 2aa - 12x^2$. Die Gleichung, p = o, giebt $2aa = 4x^2$, und daher ist q = — 4aa. Also ist das Quadrat das größte unter allen in einem Kreise eingeschriebenen Rechtecken.

42. Aufg. Wenn xx + yy = aa, zu finden, für welche Werthe von x und y das Product xyy ein Größtes ist.

Es sey $u = xyy = x(aa - xx)$, so ist $\frac{\partial u}{\partial x} = aa - 3x^2$, und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x$. Es ist also u ein Größtes, wenn $xx = \frac{1}{3}aa$ ist. Dadurch ist $yy = \frac{2}{3}aa$, folglich xx : yy = 1 : 2, und x : y wie 5 : 7 in den kleinsten Zahlen.

Verhält sich die Stärke zweyer Balken von gleicher Länge wie das Product aus der Dicke in das Quadrat der Höhe, so ist der stärkste Balken, der aus einem gege-

nen runden Stamme geschnitten werden kann, derjenige, an welchem die Dicke und Höhe das jetzt gefundene Verhältniß haben. Der Durchmesser des Stammes ist a. Theilt man denselben in drey gleiche Theile, errichtet über dem einen Theilungspuncte eine senkrechte bis an den Kreis, und zieht nach dem Endpuncte derselben von den Endpuncten des Durchmessers zwey Chorden in dem Halbkreise, so haben diese das Verhältniß $1 : \sqrt{2}$. S. Belidor Science des Ingénieurs. L. IV. ch 2.

43. Aufg. Das Verhältniß des Halbmessers von der Grundfläche eines senkrechten Kegels zu seiner Höhe zu finden, wenn bey einem gegebenen Inhalte die krumme Oberfläche ein Kleinstes ist.

Der Halbmesser der Grundfläche sey $= x$; die Höhe des Kegels $= y$, so ist der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$; die krumme Oberfläche $= \pi x\sqrt{(xx+yy)}$. Es ist also $x^2 y$ eine gegebene Größe, und $x\sqrt{(xx+yy)}$ soll ein Kleinstes seyn.

Es sey $xxy = a$, und $u = x\sqrt{(xx+yy)}$, so ist $u = \sqrt{\left(x^4 + \frac{aa}{xx}\right)}$, und $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(4x^3 - \frac{2a^2}{x^5}\right) \times \left(x^4 + \frac{aa}{xx}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Dieser Quotient ist $= 0$, wenn $4x^5 = \frac{2a^2}{x^1}$, oder, wenn $2x^6 = a^2$. Da $x^4 y^2 = a^2$ ist, so ist $2x^2 = y^2$, wenn die krumme Oberfläche ein Kleinstes ist.

Daß die Oberfläche ein Kleinstes ist, erhellt folgendergestalt. Es soll $u = x\sqrt{(xx+yy)}$ ein Kleinstes seyn, also ist es auch $u^2 = x^4 + x^2 y^2 = x^4 + \frac{aa}{xx}$.

Nun ist $\frac{\partial . u^2}{\partial x} = 4x^3 - \frac{2aa}{x^3}$,

und $\frac{\partial^2 . u^2}{\partial x^2} = 12x^2 + \frac{6aa}{x^4}$. Da dieser zweyte Dif-

ferential-Quotient positiv ist, so ist die Oberfläche ein Kleinstes.

44. Aufg. Das Verhältniß des Halbmessers von der Grundfläche eines senkrechten Kegels zu seiner Höhe zu finden, wenn bey einem gegebenen Inhalte die ganze Oberfläche, (die krumme mit der ebenen Grundfläche) ein Kleinstes ist.

Mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen ist der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$; die ganze Oberfläche $= \pi x \sqrt{(x x + y y)} + \pi x^2$. Man setze $x x y = a$, und $\pi x \sqrt{(x x + y y)} + x^2 = u$, oder $\sqrt{(x^4 + a y)} + x^2 = u$, so soll u ein Kleinstes seyn. Nun ist

$$\partial u = \tfrac{1}{2}(4 x^3 \partial x + a \partial y)(x^4 + a y)^{-\frac{1}{2}} + 2 x \partial x,$$

und $$a \partial y = -\frac{2 a a \partial x}{x^3} = -2 x y^2 \partial x.$$

Dadurch ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2 x^3 - x y^2)(x^4 + a y)^{-\frac{1}{2}} + 2 x.$$

Setzt man diesen Quotienten $= 0$, so ist nach ein paar leichten Reductionen

$$0 = 2 x^2 - y^2 + 2 (x^4 + a y)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$y^2 - 2 x^2 = 2 \sqrt{(x^4 + a y)}.$$

Auf beiden Seiten quadrirt, wird

$$y^4 - 4 x^2 y^2 = 4 a y = 4 x^2 y^2.$$

Also ist $y^2 = 8 x^2$,

und die Seite des Kegels $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = 3 x$.

Daß die Oberfläche ein Kleinstes ist, erhellt, ohne den Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zu suchen, daher, daß die Gränze von u für ein unendlich großes y, also unendlich kleines x, ist xy oder $\frac{a}{x}$, das ist, ein unendlich großes. Die Oberfläche nimmt folglich von einer gewissen Gränze an immer zu, wenn die Höhe zunimmt.

Die kleinste Oberfläche (krumme und ebene zusammen) ist $= 4\pi x^2 =$ dem vierfachen von der Grundfläche; die krumme also dreymal so groß als die Grundfläche, wobey der Inhalt $= \frac{2}{3}\pi x^3\sqrt{2}$ ist.

45. Aufg. Eine Zahl a in zwey Theile zu theilen, so daß das Product aus der mten Potenz des einen Theils in die nte Potenz des andern Theils ein Größtes sey.

Der eine Theil sey x, also der andere $a-x$, und $x^m(a-x)^n = u$. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}$$
$$= (ma-mx-nx)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}.$$

Dieser Quotient wird $= o$, wenn $x = \frac{ma}{m+n}$; $x = o$; $x = a$ ist. Zu dem ersten dieser Werthe gehört ein Größtes. Denn in der Reihe der u liegt derselbe zwischen zwey Werthen, die $= o$ sind. Zur Übung suche man den Werth des Quotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Es ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$$\big[-(m+n)x(a-x)$$
$$+(m-1)(ma-mx-nx)(a-x)$$
$$-(n-1)(ma-mx-nx)x\big]x^{m-2}(a-x)^{n-2}.$$

Setzt man hier $x = \frac{ma}{m+n}$; also $a-x = \frac{na}{m+n}$, so wird der zweyte und dritte Theil $= o$, und es bleibt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-2}}$. Da dieser Werth negativ ist, so ist u ein Größtes.

46. Es seyn P und Q zwey Functionen von x, und $u = \frac{P}{Q}$. Es soll der größte oder kleinste Werth dieser gebrochenen Function gefunden werden. Man nehme das Differential, $\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ}$, und

setze den Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder $\frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ\partial x} = o$.

Es ist dadurch $Q\partial P - P\partial Q = o$. Der Werth von x, den diese Gleichung giebt, ist derjenige, zu welchem ein größter oder kleinster Werth der gebrochnen Function gehört.

Um zu entscheiden, ob ein größter oder ein kleinster Werth vorhanden sey, suche man den Differential-Quotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Da $\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{QQ}$ ist, so ist

$$\partial^2 u = \frac{\partial.(Q\partial P - P\partial Q)}{QQ} - \frac{2(Q\partial P - P\partial Q)\partial Q}{Q^3}.$$

Weil $\frac{\partial u}{\partial x} = o$ genommen wird, so ist der zweyte Theil $= o$, und es ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial.(Q\partial P - P\partial Q)}{QQ\partial x^2} = \frac{Q\partial^2 P - P\partial^2 Q}{QQ\partial x^2}$. Von der Beschaffenheit dieses Quotienten, nachdem er positiv oder negativ ist, hängt es ab, ob die Function ein Kleinstes oder ein Größtes ist. Da der Nenner ein Quadrat ist, so kommt es allein auf die Beschaffenheit des Zählers, $Q\partial^2 P - P\partial^2 Q$, an.

47. Exempel. Zu finden, in welchen Fällen die Formel, $\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$, ein Größtes oder Kleinstes wird.

Es ist hier $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6xx - 12}{(xx + 3x + 2)^2}$, und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{12x}{(xx + 3x + 2)^2} - \frac{2(6xx - 12)(2x + 3)}{(xx + 3x + x)^3}.$$

Ist $\frac{\partial u}{\partial x} = o$; so ist $xx = 2$, und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$\frac{12x}{(xx+3x+2)^2}$. Nimmt man $x = +\sqrt{2}$, so ist $u = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}-17$; ein Kleinstes, weil $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ oder q positiv ist. Nimmt man $x = -\sqrt{2}$, so ist $u = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2}-17$, ein Größtes, da q negativ ist, aber ein relatives, da es selbst negativ ist, also ein absolutes Kleinstes. Es ist z. B. für

$x = -\frac{4}{3}$; $u = -35$.
$x = -\sqrt{2}$; $u = -33,97$.
$x = -\frac{3}{2}$; $u = -35$.

48. Es sey u eine **vielförmige Function** von x (Function, 9.), und die Differentialgleichung zwischen u und x sey $P\partial x + Q\partial u = 0$, wo P und Q Functionen von x und u sind, auch P von x allein, und Q von u allein Functionen seyn können.

Man setze auch hier den Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, so ist $\frac{P}{Q} = 0$. Dadurch ist entweder $P = 0$, oder Q unendlich groß. Dieses letztere hat nicht Statt, wenn die Gleichung zwischen x und u eine rationale ganze ist, weil dazu x oder u unendlich groß seyn müßten. Die Gleichung $P = 0$ verbunden mit der Gleichung zwischen x und u, liefert durch Herausschaffung von u eine Gleichung für x, deren Wurzeln diejenigen Werthe von x sind, zu welchen ein Größtes oder ein Kleinstes gehört. Die größten oder kleinsten Werthe von u werden aus derjenigen Gleichung zwischen x und u gefunden, worin bey dem Eliminations-Proceß u nur noch in der ersten Potenz vorhanden ist, welches also für jedes der aus der Endgleichung bestimmten x durch einen einfachen Werth gefunden wird.

Es ist darauf zu bestimmen, ob die gefundenen Werthe Größte oder Kleinste sind. Dieses kommt wiederum auf die Beschaffenheit von $\frac{\partial^2 u}{dx^2}$ an. Die Gleichung, $P\partial x + Q\partial u = o$ werde aufs neue differentiirt, so ist, wenn ∂x als unveränderlich genommen wird,

$$R\partial x^2 + S\partial x\partial u + T\partial x\partial u + V\partial u^2 + Q\partial^2 u = o,$$

wo $R\partial x$ und $T\partial x$ die Differentiale von P und Q in Beziehung auf x allein sind, S und V die Differentiale derselben Functionen in Beziehung auf u allein. Da $\frac{\partial u}{\partial x} = o$ gesetzt ist, so ist

$$R\partial x + \frac{Q\partial^2 u}{\partial x} = o, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{R}{Q}.$$

Man differentiire also die Function P aufs neue in Beziehung auf x allein, und dividire den Differentialfactor R durch Q. Ist der Quotient für einen der gefundenen Werthe von x und das zugehörige u positiv, so ist u ein Größtes; ist der Quotient negativ, so ist u ein Kleinstes.

49. Exempel. Die größten oder kleinsten Werthe von u und die zugehörigen x zu finden, wenn $x^3 - 3aux + u^3 = o$.

Es ist hier $P = 3x^2 - 3au$; $Q = 3u^2 - 3ax$. Aus der Gleichung, $P = o$, folgt $x^2 = au$. Der Werth von u in die ursprüngliche Gleichung gesetzt, giebt $x^6 - 2a^3x^3 = o$. Also ist $x^3 = o$, und auch $x^3 = 2a^3$. Der erstere Werth giebt $\frac{P}{Q} = \frac{o}{o}$, welches ein endlicher Werth seyn kann, in welchem Falle kein Größtes oder Kleinstes vorhanden ist.

Man setze für x eine so kleine Größe $\pm h$, daß ihre Potenzen weggelassen werden können, wenn die Frage

nur ist, ob die entgegengesetzte Beschaffenheit von h die Werthe von u entgegengesetzt mache. Aus den ersten beiden Gliedern der gegebenen Gleichung folgt $u = \frac{hh}{3a}$ + etc. aus dem zweyten und dritten folgt $u^2 = 3ah$ + etc., oder $u = \pm\sqrt{(3ah + \text{etc.})}$. Da der erstere Werth von u positiv bleibt, es mag + h oder − h genommen werden, so ist der Werth, u = o, ein Kleinstes. Auch ist bey dieser Form von u das verschwindende P gegen das gleichfalls verschwindende Q unendlich klein. Hingegen für $u = \pm\sqrt{(3ah + \text{etc.})}$ findet kein möglicher Werth Statt, wenn h negativ genommen wird. Es sind hier drey Fortschreitungen der u (an der zugehörigen Curve drey Zweige); eine derselben hat die Form, $u = Ax^2 + Bx^5 + Cx^8 + \text{etc.}$ Die beiden andern haben die Form,

$u = \pm Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{4}{2}} + Cx^{\frac{7}{2}} + \text{etc.}$ Jene erstreckt sich für positive und negative, die beyden andern begegnen sich für x = o.

Nimmt man $x^3 = 2a^3$, oder $x = a\sqrt[3]{2}$, so ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{a}$, also u ein Größtes. Es ist dieses $u = a\sqrt[3]{4}$.

50. Wenn zwey Fortschreitungen der u für einen gewissen Werth von x, der a sey, einen gemeinschaftlichen Werth von u enthalten, so daß entweder für kleinere oder für größere Werthe von x als a ist, keine der Fortschreitungen möglich ist, so erhält $\frac{\partial u}{\partial x}$ einen unendlich großen Werth für x = a. Man kann dieses am deutlichsten einsehen, wenn man die Function u als Ordinaten einer Curve betrachtet. Die beiden Fortschreitungen, wovon hier die Rede ist, geben zwey Zweige, die für x = a eine gemeinschaftliche berührende haben, in welche die

Ordinate fällt. Hier ist nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ unendlich groß (berührende Linie, 14.).

In der Gleichung (49.) ist für die beiden Fortschreitungen der u, von der Form, $u = \pm Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{4}{3}} +$ etc. der Quotient der verschwindenden u, x, nämlich $\frac{u}{x} = \pm Ax^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{A}{\sqrt{x}}$, das ist, unendlich groß. Da für $x = o$, ganz verschiedene Werthe von $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}$ Statt haben, so wird er $= \frac{o}{o}$ gefunden, wie bey Doppelpuncten oder vielfachen Puncten (berührende Linie 24—26.). S. auch Function 50. ff.

Eine gemeinschaftliche berührende Ordinate an zwey Zweigen einer Curve ist zwar für den einen die größte, für den andern die kleinste in der Folge der Ordinaten; allein, weil auf der einen Seite keine Ordinaten weiter möglich sind, so kann sie weder als ein Kleinstes noch als ein Größtes angesehen werden. Auch ist für sie $\frac{P}{Q}$ unendlich groß, nicht Null.

Die Ordinate an einer Spitze ist daher auch nicht als ein Größtes oder Kleinstes zu betrachten, wenn beide Zweige, die in der Spitze zusammenstoßen, zu einer gemeinschaftlichen Abscisse gehören. Sie ist an beiden die letzte oder die erste. Liegen die Zweige von der Spitze nach entgegengesetzten Gegenden, so möchte man die Ordinate an der Spitze als ein Größtes oder Kleinstes ansehen können. Allein wegen der Aehnlichkeit mit jenem Falle, und da $\frac{\partial u}{\partial x}$ hier nicht Null, sondern unendlich groß ist, wird man eine solche Ordinate nicht als ein Größtes oder Kleinstes anzusehen haben.

III. Methode für Functionen von zwey oder mehr veränderlichen Größen.

51. Es sey u eine Function zweyer veränderlichen Größen, x, y, und es sollen diejenigen Werthe von u gefunden werden, die ein Größtes oder Kleinstes sind. Stellt man sich die u als Ordinaten an eine krumme Fläche vor, auf deren Basis die Ordinaten x, y genommen werden, so sieht man leicht ein, daß für denjenigen Werth von x und von y, der die verlangte Beschaffenheit hat, die Ordinate u, sowohl in der Richtung der x, ohne y zu ändern, als in der Richtung der y, ohne x zu ändern, ein Größtes oder Kleinstes seyn müsse. Ist nun $\partial u = P\partial x + Q\partial y$, so muß $\frac{\partial u}{\partial x}$ sowohl als $\frac{\partial u}{\partial y} = o$ seyn, das ist, es muß $P = o$, und $Q = o$ seyn. Allein dieses wird noch allgemeiner zu erweisen seyn, und insbesondere ist eine sichere Methode nöthig, um zu entscheiden, ob jene Annahmen Größte oder Kleinste geben.

52. Man setze, daß a einer der Werthe von x sey, für welche u die verlangte Beschaffenheit hat, und b der zugehörige Werth von y. In der Function von x und y setze man $x = a + h$; $y = b + k$, wo h und k positiv oder negativ seyn können, entwickele die Theile der Function u, so erhält u die Form

$$u = A + Bh + Ck + Dh^2 + 2Ehk + Fk^2 + Gh^3 + 3Hh^2k + 3Khk^2 + Lk^3 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten durch die Beschaffenheit der Function u bestimmt werden. Das erste Glied, A, ist das Größte oder Kleinste, welches bestimmt werden soll. Man setze h und k so klein, daß die Glieder von dem Gk^3 an die Beschaffenheit von $u - A$ nicht zu ändern vermögen, man mag die Vorzeichen von h und k ändern wie man will, $+h$ und $+k$; oder $+h$ und $-k$; oder $-h$ und $+k$; oder $-h$ und $-k$ nehmen.

Ist nun u ein Kleinstes, so ist

$$Bh + Ck + Dh^2 + 2Ehk + Fh^2$$

positiv, für jede jener vier Annahmen von h und k; ist u ein Größtes, so ist jenes Aggregat in allen Fällen negativ. Damit dieses für jede Beschaffenheit von h und k Statt habe, muß erstlich $B = o$, und $C = o$ seyn. Zweytens muß $Dh^2 + 2Ehk + Fk^2$ nicht $= o$ werden können, weil sonst dieses Aggregat entgegengesetzte Werthe erhalten könnte, bey veränderter Größe und Beschaffenheit der willkührlichen h und k. Es muß also die Gleichung,

$$Dh^2 + 2Ehk + Fk^2 = o,$$

unmögliche Wurzeln haben, als wodurch ihre Werthe immer gleichnamig bleiben (Gleichung, 46.). Die Gleichung,

$$h^2 + \frac{2E}{D}kh + \frac{Fkk}{D} = o,$$

hat unmögliche Wurzeln, wenn F und D gleichnamig (beide positiv oder beide negativ) sind, und zugleich $\frac{Fkk}{D} > \frac{E^2kk}{D^2}$, das ist, wenn $DF > E^2$ ist (Gleichung 36.). Der Werth des Aggregats ihrer Glieder ist alsdann immer positiv; daher ist der Werth von $Dhh + 2Ekh + Fkk$ immer entweder positiv oder negativ, nachdem D dieses oder jenes ist. Betrachtet man k als Wurzel jener Gleichung, so ist in dem Falle, daß sie unmögliche Wurzeln hat, ebenfalls F mit D gleichnamig, und $DF > E^2$, und jenes Aggregat ist positiv oder negativ, nachdem F dieses oder jenes ist, übereinstimmig mit dem, was die Beschaffenheit von D giebt. Die Bedingung $DF > E^2$ schließt zugleich ein, daß D und F gleichnamig sind, da eine negative Größe immer als kleiner gegen eine positive angesehen wird. Es kann nämlich nicht $-\beta^2 > \alpha^2$ seyn, weil dadurch $\alpha^2 + \beta^2 < o$ wäre.

Ist also $B = o$, $C = o$, und $DF > E^2$, so ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, ein Größtes, wenn D und F negativ sind, ein Kleinstes, wenn D und F positiv sind. Aus den beiden Gleichungen, $B = o$, $C = o$, ergeben sich die Bestimmungen von x und y, für welche u ein Größtes oder Kleinstes ist.

53. Es sey $f(x, y)$ eine Function von x und y, so ist, wenn $f(x, y) = u$ gesetzt wird,

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\frac{h}{1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\frac{k}{1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).\frac{hh}{1.2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right).\frac{2hk}{1.2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).\frac{kk}{1.2} + \text{etc.}$$

wo die weggelassenen Glieder Producte von drey oder mehr Factoren, h, k, enthalten. Die Klammern zeigen partielle Differential-Quotienten an (Differentialgleichung, 14.). Der Quotient $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$ zeigt an, daß u zuerst nur in Beziehung auf x, und das Differential nur in Beziehung auf y zu differentiiren ist, oder in umgekehrter Ordnung, worauf das zweyte Resultat durch $\partial x \partial y$ dividirt wird.

Dieser Satz wird in dem Artikel, Taylorscher Lehrsatz, mit Erweiterung auf noch mehrere veränderliche Größen, erwiesen. Die gegenwärtige Formel wird man leicht aus Differentialrechnung, 38. herleiten können. Es ist daselbst statt u zu setzen theils h, theils k. Dadurch ist in (52)

$$B = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \; C = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \; D = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

$$E = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right); \; F = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

wo in den unbestimmten Differentialquotienten für x und

y die gefundenen zusammen gehörigen a und b zu setzen sind.

54. Diese Methode läßt sich auch auf Functionen von mehr als zwey veränderlichen Größen ausdehnen, wobey mehrere Bedingungen im Falle eines Größten und Kleinsten zu erfüllen sind. Sie ist von la Grange, der zuerst die allgemeinste Auflösung für solche Functionen gegeben, und die Kennzeichen für Größte und Kleinste aus einander gesetzt hat. (Miscellanea Societ. Taurinensis. T. I.). Euler hat in seiner Differentialrechnung, P. II. Cap. XI. nur Functionen von zwey veränderlichen Größen betrachtet, und hier die Kennzeichen zur Unterscheidung des Größten und Kleinsten nicht vollständig angegeben. Er sagt daselbst, §. 290., wenn die beiden Differentialquotienten zweyten Grades, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, nachdem für x und y die aus den beiden Gleichungen, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$, und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ gefundenen Werthe gesetzt sind, beide ungleichnamig ausfallen, so sey kein Größtes oder Kleinstes vorhanden; wenn beide positiv sind, so sey u ein Kleinstes; wenn beide negativ sind, so sey u ein Größtes. Das erstere ist richtig. Aber es folgt noch kein Größtes oder Kleinstes, wenn beide Differentialquotienten gleichnamig sind, weil dazu auch noch seyn muß $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$.

Die von la Grange gegebene Auflösung findet man in Lacroix traité du calc. diff. et intégral. T. I. nr. 155.

55. Exempel. Es sey $u = xx + yy + xy - ax - by$, so ist $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x + y - a$; $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y + x - b$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = +2$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$

$+2;\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=+1$. Setzt man die beiden ersten Differentialquotienten $=0$, oder $2x+y-a=0$ und $2y+x-b=0$, so ergiebt sich $x=\frac{2a-b}{3}$, $y=\frac{2b-a}{3}$. Ferner ist das Product, $+4$, der beiden Differentialquotienten $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\times\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ größer als das Quadrat von $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)$, also ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, und zwar ein Kleinstes, weil jene beiden Quotienten positiv sind. Man setze nun in der Function u für x und y die gefundenen Werthe, so ist $u=-\frac{1}{3}(aa+bb-ab)$, ein relatives Kleinstes, aber absolut ein Größtes, da bey einer hinlänglich kleinen Veränderung von x und y die Veränderung von u positiv ist, u also absolut kleiner wird *).

56. Exempel. Eine Zahl a in drey Theile so zu theilen, daß das Product ihrer Quadrate ein Größtes sey.

Es sey $u=x^2y^2(a-x-y)^2$, so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2xy^2(a-x-y)\,(a-2x-y),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2x^2y\,(a-x-y)\,(a-2y-x).$$

*) Das Exempel ist aus Eulers Diff. Rechn. p. 649. genommen. Es ist daselbst der kleinste Werth von u gesetzt $=-\frac{aa+ab-bb}{3}$. Man muß dieses nicht für irrig halten, da nach Eulers Bezeichnungsart das Zeichen — vor einem Bruche sich bloß auf das erste Glied des Zählers bezieht.

Da keiner der Theile Null seyn soll, so kann man nur setzen, $a - 2x - y = 0$; und $a - 2y - x = 0$, welches giebt $x = \frac{1}{3}a$; $y = \frac{1}{3}a$. Den ersten Quotienten differentiire man noch einmahl in Beziehung auf x, und setze in dem Differential für x und y die gefundenen Werthe, so ist $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -4.\frac{a^4}{81}$. Den zweyten differentiire man noch einmahl in Beziehung auf y, so ist nach derselben Substitution, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -4.\frac{a^4}{81}$. Den ersten differentiire man in Beziehung auf y, oder den zweyten in Beziehung auf x, so ist $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = -2.\frac{a^4}{81}$. Das Product jener beiden Quotienten ist größer als das Quadrat des letztern, also ist ein Größtes oder Kleinstes vorhanden, und zwar das erstere, da jene beiden Quotienten negativ sind.

Allgemeiner ist die Aufgabe von Lacroix vorgetragen, a. a. O. nr. 156., wo $u = x^m y^n (a - x - y)^p$ gesetzt ist.

Zur Geschichte der Lehre vom Größten und Kleinsten.

Unter den Alten hat Apollonius in seinem Werke von den Kegelschnitten der Untersuchung über die größten und kleinsten geraden Linien, die von einem Puncte auf der Axe (in der Ellipse auf der einen oder der andern) an die Curve gezogen sind, theils einzelnen, theils mehrern in einem Puncte außer der Axe zusammenstoßenden, oder die von einem gegebenen Puncte her genommen werden, eine besondere Abtheilung gewidmet. Sie enthält 77 Sätze, weil nach der Methode der Alten alles sehr zergliedert und stufenweise vorgetragen wird. So nimmt Apollonius zuerst den Punct auf der großen Axe in dem Abstande, so groß als der halbe Parameter, von dem Scheitel, dar-

auf in einem kleinern, und dann in einem größern Abstande, wobey die Linien alle an der einen Seite der Axe liegen. Ferner nimmt er in der Ellipse den Punct, von welchem Linien an die eine Hälfte ihres Umfanges gezogen werden, auf der kleinen Axe oder ihrer Verlängerung, zuerst in dem Abstande von dem einen Scheitel so groß als der halbe zu der kleinen Axe gehörige Parameter (die dritte Proportionale zu der kleinen und der großen Axe), wo es drey Fälle giebt, nachdem der halbe Parameter kleiner, oder so groß, oder größer als die kleine Axe ist. Dann wird der Abstand größer als der halbe Parameter, und endlich kleiner als derselbe, größer aber als die halbe Axe genommen. In dem letzten Falle geht die größte Linie nach einem Puncte des Umfanges zwischen den beyden Scheiteln. Die Sätze 27—30 enthalten, daß die berührende an dem Endpuncte einer kleinsten oder größten senkrecht auf sie steht, und S. 32, daß die Normale auf die berührende, von dem Berührungspuncte bis an die Axe genommen ein Kleinstes ist. In S. 44. 45. wird bewiesen, daß (auf derselben Seite der Axe und in der Ellipse in einem und demselben Quadranten) nicht mehr als zwey Kleinste, bis an die Axe genommen, sich in einem Puncte schneiden, wenn sie verlängert werden. In der Hälfte einer Ellipse können nach S. 47. nicht vier Kleinste vom Umfange bis an die Axe gezogen, sich in einem Puncte schneiden, nur drey. Die Beweise von 44. und 45. sind weitläuftig. Die Algebra giebt für die Ordinaten an der Parabel, die zu Linien durch einen gegebenen Punct gehören, worauf das Segment zwischen der Curve und der Axe ein Kleinstes ist, eine Gleichung vom dritten Grade mit zwey positiven Wurzeln, wenn sie alle möglich sind. An der Ellipse hat die Gleichung für solche Ordinaten drey positive und eine negative; an der Hyperbel zwey positive und zwey negative Wurzeln. Sehr merkwürdig sind der 51ste und 52ste Satz. Es wird hierin gezeigt, in welchem Falle auf keiner der durch einen gegebenen Punct an die Curve gezogenen Linien von der Axe an der dem Puncte entgegengesetzten Seite ein Kleinstes abge-

schnitten wird, in welchem Falle nur auf einer aller dieser Linien ein Kleinstes Statt hat, und in welchem auf zwey Linien ein Kleinstes vorhanden ist. In der Ellipse ist nur ein Quadrant zu nehmen, und der gegebene Punct soll in einer auf die zu dem Quadranten gehörige halbe große Axe senkrechten liegen, so wie bey den andern beiden Kegelschnitten diese senkrechte auf die Axe selbst fallen muß. Die Gränzscheidungen dieser drey Fälle sind, wenn der Abstand des gegebenen Punctes von der Axe größer, oder so groß, oder kleiner ist als eine gewisse, für die Hyperbel und Ellipse insbesonders, sehr künstlich bestimmte Linie. Diese Untersuchung möchte zu den feinsten in der alten Geometrie gehören. Apollonius leistet durch seine Geometrie, was der Algebraist leistet, wenn er die Gränzscheidung der möglichen positiven Wurzeln einer cubischen und vollständigen biquadratischen Gleichung angiebt. Für cubische ist das Verfahren bekannt. Bey vollständigen biquadratischen wird es schon Schwierigkeiten machen. Von dem 64sten Satze an bis zu Ende zeigt Apollonius, auf welche Art Größte oder Kleinste für die ganzen Linien, die aus einem gegebenen Puncte an einen Kegelschnitt gezogen werden, Statt haben. Es sind dieses die Normalen auf die Curve, eben so wie bey den Segmenten zwischen der Curve und der Axe, wenn diese Kleinste sind. Das ganze fünfte Buch des Apollonius müssen wir, nach dem Zustande unserer Theorie von Größten und Kleinsten, eine Abhandlung über die Normalen von gegebenen Puncten an einen Kegelschnitt nennen. S. den Artikel, Normale.

In dem Artikel, Geometrie, S. 322. ist angeführt, daß nur die vier ersten Bücher des Werks über die Kegelschnitte, im Original noch vorhanden sind. Das fünfte, dessen Inhalt hier erzählt worden, ist nebst dem sechsten und siebenten erst im Jahr 1661 aus einer arabischen Uebersetzung lateinisch von Joh. Alph. Borelli herausgegeben, mit Beyhülfe eines gelehrten Arabers, des Maroniten Abrahami Ecchellensis. Noch eher als das arabische Manuscript in der Großherzoglichen Bibliothek zu Florenz aufgefunden war, hatte sich Viviani

daselbst mit der Wiederherstellung des fünften Buchs der Kegelschnitte beschäftigt. Die Entdeckung desselben reizte ihn an, sein Werk zu vollenden, welches er auch noch vor der Erscheinung der Uebersetzung des Apollonischen Werks herausgab. Der Prinz Leopold von Medicis bezeugte mit Siegel und Unterschrift, daß er drey Convolute mit benannter Anzahl der Blätter von einem Manuscripte des Viviani über die Größten und Kleinsten an Kegelschnitten erhalten habe. Das Werk des Viviani hat den Titel: De maximis et minimis geometrica divinatio in V. Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum. Liber I. Florentiae 1659. Liber II. ib. eod. 154 Seiten in folio jedes. Das erste Buch hat mit dem Vortrage des Apollonius nichts gemein. Es wird darin gezeigt, wie durch einen Scheitel eines Kegelschnittes ein anderer, der ein größter sey, eingeschrieben, oder der ein kleinster sey, umgeschrieben werde. Für die gesuchte Ellipse oder Hyperbel ist die Hauptaxe gegeben. Die eingeschriebene oder umgeschriebene Figur schneidet die gegebene nicht, berührt sie nur im Scheitel. Statt des Kegelschnittes wird auch ein gegebener geradlinichter Winkel genommen. Es ist leicht zu bemerken, daß beide Kegelschnitte in dem Scheitel einen gemeinschaftlichen Halbmesser der Krümmung haben. Der Krümmungskreis ist größer als alle berührende Kreise, die innerhalb der Curve fallen, und kleiner als alle, die über derselben hinaus liegen. Viviani hat den Halbmesser der Krümmung an dem Scheitel eines Kegelschnittes gebraucht, ohne ihn als solchen zu kennen.

In dem zweyten Buche handelt Viviani zuerst von den größten oder kleinsten Linien, die aus einem gegebenen Puncte an einen Kegelschnitt sich ziehen lassen. Doch hat seine Ausführung nicht die schöne systematische Einheit wie bey Apollonius; auch fehlen die feinsten Sätze, welche der griechische Geometer gefunden hat. Merkwürdig ist, daß hier (prop. 21.) zuerst eine Trajectoria vorkommt, die Semita minimarum linearum, wie Viviani sie nennt, für unendlich viele Parabeln über einer

durch die Glieder einer arithmetischen Progression multiplicirt werden, so entsteht eine Gleichung, welche eine von den zwey gleichen Wurzeln jener, oder zwey von den drey gleichen, drey von den vier gleichen u. s. f. enthält. Hudde's Verfahren kommt mit demjenigen, welches die Differentialrechnung lehrt, ganz überein. Sein Aufsatz hierüber ist in den Zusätzen der von van Schooten besorgten Ausgabe der Geometrie von Descartes enthalten, pag. 507. In dem am Ende beygefügten Abrisse einer Abhandlung über diese Materie bemerkt Hudde schon, daß es Fälle gebe, wo man nicht wisse, ob die nach seinem Verfahren gefundene Gleichung ein Größtes oder ein Kleinstes liefere, oder ob überhaupt das eine oder das andere Statt habe.

In Huygens Werken, 2. Bd. ist ein Beweis von Fermats Regel nebst der Erweiterung auf gebrochne rationale Functionen zu finden.

Tschirnhausen brachte die Frage vom Größten und Kleinsten auf diese, den Punct einer Curve zu finden, wo die berührende der Abscissenlinie parallel ist. Nova methodus determinandi maxima et minima, auct. D. T. Acta Erud. 1683.

Die Differentialrechnung gab die allgemeinste, kürzeste und einleuchtendste Methode zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe einer Function an die Hand. Newton trägt in seiner Schrift, Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Probl. III. diese Aufgabe vor, löset sie dadurch auf, daß er die Fluxion der Function Null setzt, und zeigt noch neun Aufgaben, das Größte oder Kleinste betreffend, an, ohne ihre Auflösung mitzutheilen. Einige derselben möchten nicht leicht seyn. Die Schrift ist schon im Jahr 1671 aufgesetzt, s. Th. I. S. 833.

Leibnitz machte seine Differentialrechnung zugleich mit ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Größten und Kleinsten bekannt, in den Actis Erud. 1684. s. Th. I. S. 842. Die Aufgabe von dem Tage der kürze-

sten Dämmerung scheint eine der ersten gewesen zu seyn, woran die beiden Bernoulli die neue Methode versuchten. Diese Aufgabe machte ihnen aber doch viel zu schaffen, da Johann Bernoulli gesteht, daß er und sein Bruder sich fünf Jahre lang damit beschäfftigt hätten. Io. Bernoulli Opp. T. I. nr. 10. Iac. Bernoulli Opp. T. I. nr. 53. T. II. p. 1075. Doch hatte Nunnez (Nonius) in Portugall die Aufgabe geometrisch aufgelöset, in einer besondern Schrift über die Dämmerungen, Lissabon 1542, nur daß er nicht ein so einfaches Resultat wie die beiden Bernoulli fand.

Joh. Bernoulli legte den Geometern einige geometrische Aufgaben vor, worin ein Kleinstes zu bestimmen gefordert wird, daß sie ihre Methoden daran versuchen möchten. Iourn. des Sc. 1697. Opp. I. 39. Er bestimmte, auf welcher Cykloide ein Körper von einem gegebenen Puncte bis zu einer gegebenen lothrechten in der kürzesten Zeit fällt. Opp. T. I. p. 210. 254. Weniger schwer waren die Auflösungen der Frage, die vortheilhafteste Lage eines Segels zu finden, gegeben die Richtung des Windes und des Kiels; auch den vortheilhaftesten Winkel des Steuerruders mit dem Kiel zur Drehung des Schiffes zu bestimmen. Opp. T. II. p. 32. 41. Noch ein paar Fragen über Größte bey dem Stoße, Opp. T. III. p. 62. 64. Jacob Bernoulli zeigte, wie auf krummlinichten und geradlinichten Körpern die kürzeste Linie zwischen zwey gegebenen Puncten gefunden werde. Opp. T. II. p. 1023. 1025.

Am bekanntesten ward die Methode, mittelst der Differentialrechnung die Größten und Kleinsten zu bestimmen, durch des Marquis de l'Hospital Analyse des infiniment petits, erste Ausg. 1696, worin (Sect. III.) an mehreren nicht schweren Beyspielen der Gebrauch der Rechnung gezeigt wird. In dem letzten Abschnitte wird noch ein besonderes Verfahren gelehrt, die Differentialrechnung auf algebraische Curven anzuwenden, um die größten oder kleinsten Ordinaten zu bestimmen, wovon

die von Hudde gefundene Methode hergeleitet wird, die nur für dieſe Gattung von Curven anwendbar iſt.

Die Fälle, wo ein Gröſstes, oder ein Kleinſtes, oder keines von beiden vorhanden iſt, wenn gleich das Differential der Function in Vergleichung mit dem Differential der Functionalgröſse Null iſt, zu unterſcheiden, gebrauchte man entweder geometriſche Conſtructionen, oder, wie in dieſem Artikel geſchehen iſt, den Taylorſchen Lehrſatz. In Maclaurins Werke über die Fluxionen (1742) trifft man beide Methoden an, im I. B. 9 Kap. und II. B. 5. Kap. Die geometriſche iſt ſehr künſtlich und ſchwierig. Maclaurin nimmt neben der vorgegebenen Curve, an welcher die gröſsten oder kleinſten Ordinaten beſtimmt werden ſollen, eine zweyte Curve an, deren Ordinaten dem Differentialquotienten $\partial y : \partial x$ proportional ſind, wo x die Abſciſſen, y die Ordinaten an jener ſind. Ob in frühern Schriften ſchon die beſtimmte Regel für alle Fälle gegeben ſey, muſs ich der Nachforſchung gelehrter Leſer überlaſſen.

Cramer beſtimmt in ſeiner Analyſe des lignes courbes algébriques die Lage der berührenden an einer Curve bloſs durch die Analyſis des Endlichen, daher auch im 11ten Kap. die Puncte der gröſsten und kleinſten Ordinaten durch die Annahme, daſs die berührende der Abſciſſenlinie parallel ſey, mit Rückſicht auf die hier möglichen Beſchränkungen beſtimmt werden.

Euler hat in dem zweyten Theile ſeiner Differentialrechnung, Cap. X. XI. die Lehre von den gröſsten und kleinſten Werthen einer Function ſehr lichtvoll vorgetragen, und ſie auf den Taylorſchen Lehrſatz gegründet. Der Mangel, den ſein Vortrag noch bey Functionen von zwey veränderlichen Gröſsen hat, iſt von la Grange in den Miſcellaneis Soc. Taurin. T. I. gehoben, ſ. oben 54.

Über die Vergleichungen der Figuren und Körper, die in der Elementar-Geometrie betrachtet werden, in Beziehung auf den Inhalt bey denſelben Begränzungen durch Seitenlinien oder Seitenflächen iſt ein Hauptwerk

die in (25.) angeführte Schrift von L'Huilier. Aus der historisch-kritischen Einleitung gebe ich hier das Verzeichniß der darin beurtheilten Schriften und Abhandlungen, die zum Theil auch sich auf die isoperimetrische Aufgabe erstrecken.

De Molieres traité synthétique des lignes du premier et du second genre, 1641.

Moula de maximis in figuris rectilineis, Comm. Ac. Petrop. a. a. 1737.

Elvius Beweis, daß jede in einem Kreise eingeschriebene geradlinichte Figur den größten Raum einschließet, der von diesen Seiten, in eben der Ordnung gestellt, eingeschlossen werden kann. Abhandlungen der Schwed. Ak. der Wiss. 3r Band. Der Zusatz, in eben der Ordnung gestellt, ist unnöthig.

Klingenstierna Bemerkungen über die Abhandlung von Elvius. Eb. das, 4r Bd.

Eine Abhandlung von Cramer über denselben Satz in den Mem. de l'Acad. de Berlin für J. 1752.

In Thomas Simpsons Anfangsgründen der Geometrie ist ein kurzer aber sehr feiner Aufsatz über die Größten und Kleinsten enthalten.

Les trois coups d'essai géométriques par *Marsson*, à Strasbourg 1770. Scharfsinnig, aber auch hin und wieder übereilt.

Tommasini de maximis et minimis ad institutiones geometricas accommodatis Specimen, Pisis 1774. In einigen Stellen fehlt die Schärfe der Beweise, und die Anordnung hätte zur Faßlichkeit besser gemacht werden können.

L'Huilier hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1781 einen lehrreichen Aufsatz über den Bau der Bienenzellen geliefert. Die Bienenzellen sind sechsseitig prismatisch mit einem pyramidalischen Boden, der von drey Rhomben zusammengesetzt wird, welche an jeder der sechs Seitenflächen ein Dreyeck abschneiden, wodurch

Nun ist $\int \partial x \sqrt{(aa-xx)} =$ Area ACQM $=$ sect. ACM $+ \Delta$ CQM $= \frac{1}{2}aa$ Arc. sin $\frac{x}{a}$ $+ \frac{1}{2}x\sqrt{(aa-xx)}$, wo Arc. sin $\frac{x}{a}$ ein Bogen mit dem Halbmesser als Einheit ist.

So ist

$$Z = \tfrac{1}{2}m\left(aax + ffx - \tfrac{1}{3}x^3 - fx\sqrt{(aa-xx)} - aaf \text{ Arc. sin } \frac{x}{a}\right),$$

wo die Const $= o$ ist.

Den Inhalt des ganzen Hufs zu erhalten, setzt man $x = c$, und multiplicirt mit 2, so ist, wenn derselbe durch H bezeichnet wird,

$$H = m\left(aac - \tfrac{1}{3}c^3 - aaf \text{ Arc. sin } \frac{c}{a}\right),$$

da $aa - cc = ff$ ist.

2. Wenn die schneidende Ebene durch DE gelegt wird, so ist $c = a$, und $f = o$, also nun $H = \frac{2}{3}ma^2$. Setzt man $ma = h$, so ist $H = \frac{2}{3}aah$, wo h die Höhe des Hufes ist.

3. Die Oberfläche des Hufs von AF an bis MN sey $= S$, so ist $\partial S = MN \times \partial$. Arc. AM, das ist

$\partial S = my \cdot \frac{a\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}$ (Differ. Formeln, 29.), oder

$\partial S = ma\partial x - \frac{maf\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, also

$S = max - mfa$. Arc. sin $\frac{x}{a}$, ohne Constans. Die krumme Oberfläche des ganzen Hufs ist

$$2mac - 2mfa \text{ . Arc. sin } \frac{c}{a}.$$

Reihen derſelben in der Harmonice mundi prop. 27. Maraldi beſtimmte die Winkel der Rhomben, und zeigte, wie durch die Einſchichtung der pyramidalichen Böden zwiſchen einander die Feſtigkeit der Zellen in den Wachsſcheiben bewirkt wird, in den Mém. de l'Ac. des Sc. 1712. Reaumur gab den Geometern die Unterſuchung auf, ob durch die Geſtalt des Bodens eine Erſparung an Wachs erhalten würde. König lieferte eine Abhandlung darüber, wovon ein Auszug in den gedachten Memoiren vom J. 1739 zu finden iſt. Hernach hat Maclaurin in den Philoſ. Tranſ. für 1743 die Unterſuchung vorgenommen, auch Boscowich in ſeiner Ausgabe des philoſophiſch-phyſikaliſchen Lehrgedichts von Bened. Stay, Rom 1760. L'Huilier hat die angeführte Abhandlung mit einigen Abänderungen in die Schrift de relatione mutua etc. eingerückt. Ich habe auch in dem Hannöveriſchen Magazin vom Jahr 1772. St. 23. Betrachtungen über den Bau der Bienenzellen angeſtellt. Ich fand die Gleichheit aller Flächenwinkel, und das Minimum in dem Aufwande von Wachs, bemerkte auch dabey, daß das letztere eine geometriſche Folge von jener iſt. Die Bienen wiſſen Wachsflächen bloß unter einem Winkel von etwa 120 Grad an einander zu fügen, und dabey den Zellen eine gehörige Länge und Weite nach Maaßgabe ihres eigenen Körpers zu geben. Nicht die Erſparung an Wachs, wozu keine nöthigende Urſache war, ſondern die Zuſammenfügung der Zellen aus zwey paralleln Reihen iſt das kunſtreiche. Je drey Zellen laſſen zwiſchen ihren Böden eine Vertiefung, welche den Boden einer Zelle in der gegen über liegenden Reihe abgiebt, und die gemeinſchaftliche Kante je dreyer Zellen dient zum Schlußſtein für den Boden der entgegengeſetzten Zelle. Die Vertiefung hat, nach Maraldi's Bemerkung, den Nutzen, daß die Tropfen Honig, welche die Bienen der jungen Brut zur Nahrung bringen, dicht um ſie herum zuſammen fließen. Dazu ſetze ich nun noch, daß die Zellen eine hinlängliche Tiefe erhalten mußten, um zu Behältern des Honigs tauglich zu ſeyn.

Grundfläche (basis) ist die ebene Figur, über welcher ein Prisma, ein Kegel, ein Konoid errichtet ist. Den Durchschnitt eines Körpers mag man auch die Grundfläche des einen körperlichen Segments nennen, insbesondere bey runden Körpern, die durch die Umdrehung einer ebenen Figur um ihre Axe entstanden sind.

Grundlinie (basis), ist die gerade Linie, über welcher ein Dreyeck, Parallelogramm oder Trapezium errichtet ist. Auch die Durchschnittslinie einer ebenen Figur ist die Grundlinie des Segments, besonders, wenn sie und alle ihr parallelen durch eine gewisse gerade Linie halbirt werden.

Im Lateinischen ist nur ein Wort, **basis**, für zwey Begriffe, die man im Deutschen durch Grundfläche und Grundlinie unterscheidet.

An Kegeln und Konoiden sind Grundfläche und Scheitel das äusserste sich entgegengesetzte; in einem Dreyecke Grundlinie und Spitze.

Grundsatz ist ein Satz, der für sich so augenscheinlich ist, daß er keines Beweises bedarf. Man kann die Grundsätze eintheilen in logische oder formale, und in materiale. Die erstern enthalten eine Schlußform, die der Mathematik eigen ist. Dahin gehören die sieben ersten Grundsätze in dem 1. Buche der Euklidischen Elemente. Was einem und eben demselben gleich ist, ist selbst gleich. Gleiches zu Gleichem hinzugethan, giebt Gleiches u. s. f. S. Beweis. Th. I. S. 301. Die materiellen Grundsätze fließen unmittelbar aus dem Begriffe, den sie betreffen. Was einander deckt, ist gleich. Das Ganze ist größer als sein Theil. Alle rechte Winkel sind einander gleich. Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein. Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich groß.

Der 11te Grundsatz bey Euklides, die parallelen geraden Linien betreffend, ist nicht so wohl ein Grundsatz, als vielmehr der umgekehrte Satz eines streng erweisbaren Satzes.

Grundzahl ist dasselbe was Primzahl, und könnte recht gut zur Verdeutschung dieses halbfremden Wortes gebraucht werden. S. Primzahl.

Guldins Regel, s. Centrobaryca methodus.

H.

Halbmesser (Semidiameter), die Hälfte eines Durchmessers einer Curve. Im Kreise sind alle Halbmesser sich gleich. Hier heißt der Halbmesser auch der **Radius**.

Hapsologarithmus, Logarithme der Tangente eines Winkels, ein nicht üblich gewordenes Kunstwort. S. Anthapsologarithmus.

Harmonische Proportion ist zwischen vier Größen, a, b, c, d, wenn $a-b : c-d = a : d$; eine stetige zwischen drey Größen, a, b, c, wenn $a-b : b-c = a : c$ ist. Z. B. 5, 3, 21, 15, oder 3, 5, 8, 24, und 2, 3, 6.

In dem ersten Falle ist $(a-b)d = (c-d)a$, woraus folget $(2a-b)d = ac$, und $d = \frac{ac}{2a-b}$, so wie $a = \frac{bd}{2d-c}$. Das vierte Glied wird auf einerley Art gefunden, die Proportion mag zunehmend oder abnehmend seyn.

Für eine stetige Proportion ist $c = \frac{ab}{2a-b}$; und das mittlere Glied $b = \frac{2ac}{a+c}$.

Das arithmetische Mittel zwischen zwey Zahlen, verhält sich zu dem geometrischen, wie das geometrische zu dem harmonischen Mittel.

Die Benennung, harmonische Proportion, rührt daher, daß die numerischen Werthe der Töne aus dem harten Accord, C, E, G, c, stetige harmonische Proportionen geben, nemlich C, G, c, und C, E, G. Die Werthe jener Töne verhalten sich wie die Längen der Seiten, bey übrigens gleichen Umständen, nämlich wie 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, oder wie 30, 24, 20, 15. Hier sind 30, 20, 15, und 30, 24, 20, harmonisch proportional. Der Haupton, die Quarte und große Sexte geben auch eine harmonische Proportion, nämlich ihre Werthe, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, oder 20, 15, 12.

Eine harmonische Progression ist eine Folge von Größen, deren je drey einander nächste eine stetige harmonische Proportion ausmachen Es sind a, b, c, d, e, etc. in harmonischer Progression, wenn $c = \frac{ab}{2a-b}$; $d = \frac{bc}{2b-c}$; $e = \frac{cd}{2c-d}$, u. s. f.

Z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{4}{14}$, u. s. f. Hier ist $\frac{4}{8}$ die Oberoctave von D, $\frac{4}{10}$ dasselbe Intervall von E, $\frac{4}{12}$ von G. Aber $\frac{4}{7}$ ist ein Ton, der ein wenig niedriger als B ist, den auch Kirnberger in die gewöhnliche Tonleiter einschieben wollte. Ferner $\frac{4}{11}$ ist ein Ton zwischen f und fis der nächst höhern Octave, $\frac{4}{13}$ ein Ton zwischen as und a.

Die contraharmonische Proportion, s. an ihrem Orte. Th. I.

Harmonische Theilung einer Linie ist, wenn sie in drey Theile so getheilt wird, daß die ganze sich zu dem einen der äußern Theile verhält, wie der andere äußere Theil zu dem mittlern. Auf der Linie AD,

A B C D

sey AD : AB = CD : BC, so ist sie harmonisch getheilt. Es ist nämlich hier AD : AB = AD—AC : AC—AB; also sind AD, AC, AB in stetiger harmonischer Proportion.

Diese Theilung kommt in der Lehre von den Kegelschnitten vor. Eine gerade Linie, die aus dem Durchschnittspuncte zweyer berührenden an den Kegelschnitt und die gerade zwischen den Berührungspuncten gezogen ist, wird von jenem Durchschnittspuncte, der Curve und der Linie zwischen den Berührungspuncten harmonisch getheilt. S. Kegelschnitte.

Hauptpunct in der Perspectiv, oder Augenpunct, s. Perspectiv.

Helcataym, die Regel, s. Elcataym.

Helix, Spirale oder Schneckenlinie, davon

Helicoides spiralförmig, als Parabola Helicoides. S. Spirale, und spiralförmige Parabel.

Hemisphaera, Halbkugel.

Hemisphaeroides, halbes Sphäroid.

Hendekagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Hendecagonum, Eilfeck, s. Vieleck.

Heptagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Heptagonum, Siebeneck.

Herzförmiger Körper entsteht, wenn man eine Ellipse nicht um eine ihrer Axen, sondern um einen ihrer andern Durchmesser sich drehen, und einen vollen Umlauf beschreiben läßt. Dadurch entsteht ein Körper, der an dem einen Ende vertieft, an dem andern verschmälert ist. Varignon hat den Inhalt eines solchen Körpers berechnen wollen, hat sich aber dabey geirrt. In der Encyclopédie méthodique, art. Coeur, zeigt d'Alembert, daß der Inhalt dieses herzförmigen Körpers sich zu dem Inhalt eines Sphäroids, dessen Axen den beiden Durchmessern jener Ellipse, um deren einen sie sich dreht, und dem zugeordneten gleich sind, sich verhält, wie das Quadrat des Sinus des Winkels der Durchmesser zu dem Quadrat des Sinus totus.

Heterogen, das entgegengesetzte von Homogen, oder gleichartig, s. dieses.

Hexaëdron ist dasselbe, was Würfel, von ἓξ, sechs, und ἕδρα, Sitz, Grundfläche.

Hexagonalzahl, s. Polygonalzahl.

Hexagonum, Sechseck.

Hexecontas, Abtheilung der Zahlen nach Sechzigen, wie Decas, Decaden, nach Zehnen. Daher Canon Hexecontadon, zur Multiplication sechzigtheiliger Zahlen, wie Minuten, Secunden, Tertien. S. Sexagesimalrechnung.

Homocentrisch, dasselbe was concentrisch, von ὅμος, gleich, einerley, und κεντρον, Mittelpunct.

Homogen, gleichartig, s. an seinem Orte.

Homogenea affectionum sind bey dem an Kunstwörtern überreichen Vieta die mit der Wurzel einer Gleichung gleichartigen gegebenen Factoren als Coefficienten der Potenzen der Wurzel. Nämlich die Potenzen der Wurzel, außer der höchsten, machen die Gleichung zu einer aequatio affecta. *Homogeneum comparationis* ist das gegebene Glied der Gleichung.

Homologum, was ähnliche Beziehung hat, als die Vorder- oder Hinterglieder in Verhältnissen; die gleichnamigen Seiten in ähnlichen Figuren.

Hufförmiger Abschnitt (ungula, onglet) eines Cylinders ist zwischen einem Theil der Grundfläche (oder auch der ganzen), einer schneidenden Ebene und einem Theil der krummen cylindrischen Oberfläche enthalten. Auf gleiche Art entsteht durch eine schneidende Ebene in einem Kegel oder Konoid ein hufförmiger Abschnitt.

1. Es ist ADBbea (Fig. 72.) ein senkrechter Cylinder über der Grundfläche ADBE, und ABba ein Durchschnitt durch die Axe. Diese Ebene werde von

einer andern Ebene HFK in FG ſenkrecht geſchnitten, ſo daß ihr Durchſchnitt HK mit der Grundfläche des Cylinders ADBE auf den Durchmeſſer AB ſenkrecht iſt. Man ſucht den Inhalt des Körpers, der zwiſchen dem Segment HAK der Grundfläche, dem Schnitte HFK des Cylinders, und dem Stücke HAFK der cylindriſchen Fläche enthalten iſt.

Man ziehe durch irgend einen Punct M des Bogens AH die gerade MP ſenkrecht auf HK, und MN parallel mit der Axe des Cylinders. Dieſe MN liegt in der Oberfläche des Cylinders, und iſt ſo wie die Axe ſenkrecht auf die Grundfläche, alſo ſenkrecht auf die Linie MP (Ebene 11. 6.). Das Product aus dem Dreyeck PMN in das Differential von GP iſt das Differential des körperlichen Abſchnittes AFGPMN (Cubirung) *). Die Ebene des Dreyecks PMN iſt ſenkrecht auf die Grundfläche ADBE. Da in dieſer letztern die Linie HK ſenkrecht auf MP iſt, ſo iſt HK ſenkrecht auf MPN, und daher auf PN, alſo iſt MPN der Neigungswinkel der ſchneidenden Ebene gegen die Grundfläche.

Es ſey der Halbmeſſer der Grundfläche, $AC = a$, $AG = b$, $GH = c$, der Neigungswinkel MPN oder $AGF = \alpha$. Ferner ſey $GP = x$; $MP = y$, ſo iſt $MN = y \tang \alpha$, und das Differential des Abſchnittes zwiſchen FAG und NMP iſt $= \frac{1}{2} y^2 \tang \alpha . \partial x$. Dieſer unbeſtimmte Abſchnitt ſey $= Z$, und $\tang \alpha = m$, ſo iſt $\partial Z = \frac{1}{2} m y^2 \partial x$. Man ſetze zur Abkürzung $a - b = f$, oder $GC = f$, ſo iſt $aa = (f+y)^2 + xx$, alſo $y = \sqrt{(aa - xx)} - f$, und $yy = aa + ff - xx - 2f\sqrt{(aa - xx)}$, ſo daß

$$\partial Z = \tfrac{1}{2} m (aa + ff - xx - 2f\sqrt{(aa - xx)})\, \partial x.$$

*) Die in dem citirten Artikel gezeigte Methode iſt daſelbſt nur auf runde Körper angewandt, ſolche, deren Abſchnitte Kreiſe zu Grundflächen haben; ſie iſt aber allgemeiner für alle andere, ſo daß, wenn Y eine Flächenſchnitt des Körpers, x die zugehörige Abſciſſe iſt, $Y \partial x$ das Differential des körperlichen Abſchnittes zu der Abſciſſe x iſt.

Nun ist $\int \partial x \sqrt{(aa-xx)} =$ Area ACQM $=$ sect. ACM $+ \Delta$ CQM $= \frac{1}{2}aa$ Arc. sin $\frac{x}{a}$ $+ \frac{1}{2}x\sqrt{(aa-xx)}$, wo Arc. sin $\frac{x}{a}$ ein Bogen mit dem Halbmesser als Einheit ist.

So ist

$$Z = \tfrac{1}{2}m\left(aax + ffx - \tfrac{1}{3}x^3 - fx\sqrt{(aa-xx)} - aaf \text{ Arc. sin } \frac{x}{a}\right),$$

wo die Const $= o$ ist.

Den Inhalt des ganzen Hufs zu erhalten, setzt man $x = c$, und multiplicirt mit 2, so ist, wenn derselbe durch H bezeichnet wird,

$$H = m\left(aac - \tfrac{1}{3}c^3 - aaf \text{ Arc. sin } \frac{c}{a}\right),$$

da $aa - cc = ff$ ist.

2. Wenn die schneidende Ebene durch DE gelegt wird, so ist $c = a$, und $f = o$, also nun $H = \frac{2}{3}ma^3$. Setzt man $ma = h$, so ist $H = \frac{2}{3}aah$, wo h die Höhe des Hufes ist.

3. Die Oberfläche des Hufs von AF an bis MN sey $= S$, so ist $\partial S = MN \times \partial$. Arc. AM, das ist

$$\partial S = my \cdot \frac{a\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}} \text{ (Differ. Formeln, 29.), oder}$$

$$\partial S = ma\partial x - \frac{maf\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}, \quad \text{also}$$

$S = max - mfa$. Arc. sin $\frac{x}{a}$, ohne Constans. Die krumme Oberfläche des ganzen Hufs ist

$$2mac - 2mfa \text{ . Arc. sin } \frac{c}{a}.$$

Nimmt man den Halbkreis zur Grundfläche des Hufs, ſo iſt die krumme Oberfläche $= 2maa = 2ah$.

Es iſt merkwürdig, daß es völlig cubirbare Abſchnitte eines Cylinders giebt, mit einer krummen Oberfläche, die zugleich quadrirbar iſt.

3. Es ſey ACB (Fig. 73.) der Durchſchnitt eines Kegels, ſenkrecht auf deſſen Grundfläche, deren Durchmeſſer AB iſt. Durch einen Punct D auf AC führt man einen Schnitt parallel mit CB und ſenkrecht auf ACB. Die Durchſchnittslinie mit ACB iſt DE. Dadurch entſteht ein hufförmiger Abſchnitt zwiſchen dieſer Ebene, der Grundfläche und der krummen Kegelfläche. In dieſem lege man durch eine mit CB parallele MP, eine auch auf ACB ſenkrechte Ebene, welche einen unbeſtimmten Abſchnitt begränze. Die Durchſchnittsfiguren über DE, MP ſind Parabeln (ſ. Kegelſchnitte). Die Fläche der Parabel über MP multiplicirt mit dem Differential des Abſtandes AN von A iſt das Differential des körperlichen Abſchnittes von A bis MP.

Es ſey $AB = 2a$, $BC = b$, ſin $ABC = m$, $AP = x$, ſo iſt $PM = \frac{bx}{2a}$; $AN = mx$. In dem über AB als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſe ziehe man durch P eine Ordinate, die z heiße, ſo iſt $z^2 = AP \times PB$, oder $z^2 = x(2a - x)$. Es iſt zugleich z die Ordinate der Parabel, deren Axe MP iſt, in dem Puncte P. Die Fläche der Parabel iſt $\frac{2}{3} \cdot \frac{bx}{2a} \cdot 2z = \frac{2bx}{3a} \sqrt{(2ax - xx)}$, (ſ. Quadratur). Der Abſchnitt des Hufes von A bis MP ſey $= Z$, ſo iſt $\partial Z = \frac{2mbx}{3a} \partial x \sqrt{(2ax - xx)}$. Es iſt

$$\int x \partial x \sqrt{(2ax - xx)} = -\tfrac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a \int \partial x \sqrt{(2ax - xx)}, \text{ und}$$

$\int \partial x \sqrt{(2ax - xx)} = \frac{1}{2}aa \cdot \text{Ang. cos} \frac{a-x}{a}$

$- \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}$ (s. Integralformeln).

Also

$\int x\,\partial x \sqrt{(2ax-xx)} = \frac{1}{2}a^3 \cdot \text{Ang. cos} \frac{a-x}{a}$

$- \frac{1}{6}(a+x)(3a-2x)\sqrt{(2ax-xx)}$. Dadurch ist

$Z = \frac{mb}{3a} \cdot a^3 \cdot \text{Ang. cos} \frac{a-x}{a}$

$- \frac{mb}{9a}(a+x)(3a-2x)\sqrt{(2ax-xx)}$.

Die Conſt. iſt $= o$, da $Z = o$ für $x = o$ iſt.

Setzt man in dieſer Formel für x den Werth AG, ſo erhält man den Werth des beſtimmten hufförmigen Abſchnittes, deſſen höchſter Punct in D iſt.

4. Der Schnitt DG gehe durch den Mittelpunct der Grundfläche, ſo iſt $x = a$, und der beſtimmte hufförmige Abſchnitt $H = mba^2(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{9})$; oder wenn die Höhe des Kegels $= h = mb$, geſetzt wird

$$H = \frac{1}{3}aah(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}).$$

5. Des ganzen Kegels Inhalt iſt $\frac{1}{3}\pi aah$, alſo iſt die Ergänzung des Hufes zum Halbkegel cubirbar, wenn die ſchneidende Ebene durch den Mittelpunct der Grundfläche gelegt wird. Dieſe Ergänzung iſt $= \frac{8}{9}aah$.

Hyperbel iſt eine krumme Linie, für welche die Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten u und y iſt $cu + m^2u^2 = y^2$, wo c eine gegebene Linie, und m der Exponent des Verhältniſſes zweyer gegebenen Linien iſt.

Die Benennung, Hyperbel (Überſchuß), ſoll anzeigen, daß das Quadrat der Ordinate größer iſt als das Rechteck von der Abſciſſe und einer conſtanten Linie. Vergl. Ellipſe.

1. Für jedes positive u, so groß es genommen werden mag, hat y zwey mögliche, gleiche, entgegengesetzte Werthe. Eben so auch für negative, die der Quantität nach betrachtet größer sind als $\frac{c}{mm}$. Für negative, die kleiner sind als $-\frac{c}{mm}$, ist y unmöglich, oder die krumme Linie hat für solche Abscissen keine Ordinaten. Man setze $\frac{c}{mm} = 2a$, so ist die Gleichung diese, $m^2(2au + u^2) = y^2$.

2. Man setze $u = x - a$, also $a + u = x$, so ist $m^2(x^2 - a^2) = y^2$. Hier erhellt, daß die krumme Linie für gleiche und entgegengesetzte x, die größer als a sind, gleiche Ordinaten, es seyn positive oder negative, hat.

3. Man setze $m = \frac{b}{a}$, so ist $c = \frac{2bb}{a}$, eine Linie, welche der Parameter zu der Axe 2a heißt, und es ist $cu + \frac{c}{2a}u^2 = y^2$;

$$\frac{c}{2a}(x^2 - a^2) = y^2,$$

oder $bb(2au + uu) = a^2y^2$;

$bb(x^2 - a^2) = a^2y^2$.

4. Man nehme auf der Abscissenlinie Xx (Fig. 74.) von C aus $CA = CB = a$, und $CP = x$; $PM = y$, der Gleichung zwischen x und y gemäß. Die krumme Linie erstreckt sich von A aus durch M ins Unendliche fort, auf der andern Seite von CX eben so mit dem Zweige Ams, der dem AMS gleich und ähnlich ist. Über den Theilen der Abscissenlinie, [illegible], CB ist kein Theil der Curve vorhanden. Aber von B an sind zwey unendliche Zweige BNs, Bns, die den Zweigen AMS, Ams

gleich und ähnlich sind. Die beiden Theile der Hyperbel, SAs, SBs heißen entgegengesetzte Schnitte, nämlich aus zwey entgegengesetzten Kegeln.

Der Punct C heißt der Mittelpunct der Hyperbel; A, B, sind ihre Scheitel; AB ist ihre Hauptaxe, deren Verlängerung aber auch unter der Benennung, Hauptaxe, als senkrechter Durchmesser, begriffen wird. Eine Nebenaxe oder conjugirte Axe, die zugleich eine Ordinate an der Curve wäre, wie in der Ellipse, giebt es für die Hyperbel nicht. Doch heißt die Linie ab (in 3.) die conjugirte Axe oder Nebenaxe. Man ziehe durch C die senkrechte CY auf AB, so ist diese ein Durchmesser für alle mit der Hauptaxe parallele Chorden an den entgegengesetzten Zweigen auf derselben Seite der Hauptaxe.

5. Der Mittelpunct C halbirt alle durch ihn an die Hyperbel gezogenen geraden Linien, wegen der gleichen und ähnlichen Zweige auf beiden Seiten der Axe und des Mittelpuncts.

6. Durch A ziehe man die gerade Dd senkrecht auf CA; mache AD = Ad = b, und ziehe die geraden CDS, Cds, welche nach den entgegengesetzten Gegenden CS, Cs unbestimmt verlängert werden. Man ziehe die auf die Axe senkrechte PQ an die gerade CS, als Ordinate zu dieser, und setze PQ = z, so ist $z = \frac{bx}{a}$, und $zz = \frac{bbxx}{aa}$. Da $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ ist, so ist $zz - yy = bb$, oder $(z+y)(z-y) = bb$, also $z - y = \frac{bb}{z+y}$. Der Unterschied QM der an die Curve und die gerade CS gezogenen Ordinaten wird also immer kleiner, je größer die Abscisse nebst den Ordinaten wird, ohne eine Grenze des Abnehmens.

Die geraden SCS, sCs, heißen die Asymptoten (nicht zu erreichenden) der Hyperbel.

7. Man verlängere die entgegengesetzte Ordinate Pm bis an die Asymptote Cs in q, so ist $Mq = z + y$. Da $MQ = z - y$ ist, so ist $Mq \times MQ = bb$.

8. Durch M werde mit der Asymptote Cs die parallele ML gezogen, und durch den Scheitel A mit derselben die parallele AE; es ist $CL \times LM = CE \times EA$, oder $CL \times LM = \frac{1}{4}(aa + bb)$.

Denn wegen der ähnlichen Dreyecke QLM und QCq ist $LQ : LM = CQ : Cq$, also $LQ = LM$. Ferner ist $QL : QM = LC : Mq$, und auch $QL : QM = ED : DA$, wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke QLM, DEA. Also ist $LC : Mq = ED : DA$. Aus dieser und der gleich vorhergehenden Proportion entsteht, durch Zusammensetzung der Verhältnisse, diese,

$$LC \times QL : MQ \times Mq = ED^2 : DA^2.$$

Da $MQ \times Mq = bb = DA^2$, so ist

$$LC \times QL = DE^2, \text{ oder } CL \times LM = DE^2.$$

Wegen $AD = Ad$ ist $DE = CE$. Ferner ist Winkel $EAC = ACd = ACE$, also $EA = CE$, und $DE^2 = CE \times EA$, folglich $CL \times LM = CE \times EA$.

Da $DE = \frac{1}{2}CD$, so ist $DE^2 = \frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{4}(aa + bb)$.

9. Das Quadrat von CE oder $\frac{1}{2}CD$ heißt die Potenz der Hyperbel.

10. Aufg. Die Gleichung für die krumme Linie zu finden, auf welcher die Scheitelpuncte aller Dreyecke, wie FMG, FNG, liegen, in welchen die Seite FG gemeinschaftlich, und der Unterschied der beiden andern $GM - FM$ oder $FN - GN$ eine gegebene Größe ist.

Man halbire FG in C, und setze FC oder $GC = e$, ferner $GM - FM = 2a$, $GM = t + a$; $FM = t - a$. Von M ziehe man die senkrechte MP auf GF, und setze $CP = x$, also $FP = \pm(x - e)$; $GP = x + e$. Auch sey $PM = y$. Nun ist

$$(x-e)^2 + y^2 = (t-a)^2,$$
$$(x+e)^2 + y^2 = (t+a)^2.$$

Daraus wird durch Addition und Subtraction

$$xx + ee + yy = tt + aa,$$
$$ex = at.$$

Durch Herausschaffung von t wird

$$\frac{ee-aa}{aa}(xx-aa) = yy.$$

Man darf hier nicht das Entgegengesetzte beider Factoren nehmen, wie es ohne andere Rücksichten die Rechnung erlauben würde. Denn es wird, wenn $y = o$ genommen wird, FG oder $2e = 2t$. Nun ist t größer als a, also ist auch e größer als a, und dadurch auch $x > a$.

Der Ort des Punctes M ist also eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= 2a$, und deren conjugirte Axe, $2b = 2\sqrt{(ee-aa)}$ ist, so daß $ee = aa + bb$ ist.

11. Man nehme auf der Axe einer Hyperbel von dem Mittelpuncte C aus $CF = CG = \sqrt{(aa+bb)}$, und ziehe an irgend einen Punct der Curve M die geraden FM, GM, so ist $GM - FM = 2a$.

Denn man setze $\sqrt{(aa+bb)} = e$, also $ee - bb = aa$. Nun ist $PM^2 = \frac{bb}{aa}xx - bb$, und $FP = x - e$, daher

$$FM^2 = \frac{ee}{aa}xx - 2ex + aa,$$

$$FM = \frac{ex}{a} - a.$$

Eben so ist

$$GM = \frac{ex}{a} + a,$$

folglich $GM - FM = 2a$.

12. Die beiden Puncte, F, G, heißen die **Brennpuncte** der Hyperbel (Ellipse, 10.).

Da $CF^2 = aa + bb$ ist, so ist die auf der Asymptote nach (6.) genommene $CD = CF$.

13. Die Ordinate in den Brennpuncten ist dem halben Parameter gleich.

14. Es sey $FM = z$, der Winkel $MFX = \varphi$, so ist

I. $ex - aa = az$. II. $ee - aa = (a - e\cos\varphi)z$.

Die erste Gleichung ist dieselbe mit der Gleichung $ex = at$ in (10.), da $z = t - a$ ist. Hieraus folgt die zweyte, da $x = e + z\cos\varphi$ ist. Wenn AFM spitz ist, so ist φ stumpf und $\cos\varphi$ negativ. Ist $AFM = o$, so ist $\cos\varphi = -1$, und $ee - aa = (a + e)z$, daher $z = e - a$, wie es seyn muß.

Ist x unendlich groß, so muß $a - e\cos\varphi = o$ seyn, damit das Product eine endliche Größe bleibe. Also ist bey dieser Annahme $\cos\varphi = \frac{a}{e}$, daher $\varphi = ACD$. Die FM ist alsdann parallel mit der Asymptote. Kleiner als ACD kann der Winkel MFP nicht werden.

15. Auf gleiche Art wird gefunden,

I. $CF \times CP + CA^2 = CA \times GM$.

II. $ee - aa = (CG.\cos CGM - CB)GM$.

16. Es sey MAm (Fig. 75.) die eine Hälfte einer Hyperbel, deren Hauptaxe AB, Mittelpunct C ist; der Scheitelpunct dieses Theils ist A. Die verlängerte Axe ist BAX Auf diese ist durch irgend einen Punct M die senkrechte Mm gezogen. Durch den Mittelpunct sey die gerade CDV gezogen, als Abseissenlinie, mit welcher die Ordinaten PM, PN unter dem Winkel MPV verbunden werden, Es sey $AC = a$; die halbe conjugirte Axe $= b$; $CP = x$; $PM = y$, der Winkel $ACD = \varphi$; der Winkel $MLQ = \omega$, wo L der Durchschnitt der MN mit der Axe ist. Wenn $\tang\varphi . \tang\omega = \frac{bb}{aa}$ ist, so wird MN und jede ihr parallele, auch in

der andern Hälfte der Hyperbel von CV, oder deren Verlängerung halbirt.

Denn man ziehe PR mit CQ, und PS mit MQ parallel, so erhellt, daß

$$CQ = x \cos\varphi + y \cos\omega,$$
$$MQ = x \sin\varphi + y \sin\omega,$$

ist. Nun ist (3.)

$$a^2b^2 = b^2(x^2\cos\varphi^2 + 2xy\cos\varphi.\cos\omega + y^2\cos\omega^2) - a^2(x^2\sin\varphi^2 + 2xy\sin\varphi.\sin\omega + y^2\sin\omega^2).$$

Nimmt man $b^2 = a^2 \operatorname{tang}\varphi . \operatorname{tang}\omega$, so ist $b^2\cos\varphi.\cos\omega = a^2\sin\varphi.\sin\omega$, und die Gleichung enthält bloß die zweyte Potenz von x und von y, daher bey jeder Annahme für die eine derselben die andere zwey gleiche entgegengesetzte Werthe erhält, und unmögliche, wenn das Quadrat einen negativen Werth hat.

17. Bey der jetzt gemachten Annahme für die Winkel φ und ω ist

$$a^2b^2 = (b^2\cos\varphi^2 - a^2\sin\varphi^2)x^2 - (a^2\sin\omega^2 - b^2\cos\omega^2)y^2.$$

18. Wenn die Puncte M, N in entgegengesetzten Schnitten liegen, so gilt das gefundene auch. Es sey (Fig 76.) die Abscissenlinie CV innerhalb des Nebenwinkels SCs der Asymptoten gezogen, so daß sie die Hyperbel gar nicht schneide. Die entgegengesetzten Ordinaten PM, PN liegen in entgegengesetzten Schnitten. Bey denselben Bezeichnungen wie vorher ist eben so

$$CQ = x\cos\varphi + y\cos\omega,$$
$$MQ = x\sin\varphi + y\sin\omega.$$

Die übrige Rechnung ist dieselbe wie in (16.), und es muß, damit alle mit MN parallele Chorden von CV halbirt werden, seyn

$$\frac{bb}{aa} = \operatorname{tang}\varphi . \operatorname{tang}\omega.$$

19. Man ziehe durch den Mittelpunct C (Fig. 76.) mit MN die parallele ECE, so ist diese, bey der ge-

machten Annahme der Winkel φ und ω, ein Durchmesser, der verlängert alle mit VCV parallele Chorden halbirt. Die Winkel φ und ω haben nun ihre Bedeutungen mit einander vertauscht. Ist nämlich φ der Winkel des Durchmessers mit der Axe, so ist ω der Winkel der Ordinaten mit derselben. Ist ω aber jener Winkel, so ist φ der letztere.

20. Zwey gerade Linien, welche durch den Mittelpunct unter den Winkeln φ, ω, der Bedingung in (16.) gemäß gezogen sind, heißen conjugirte Durchmesser. Der eine halbirt alle Chorden, die dem andern parallel sind. Der eine schneidet die Hyperbel in zwey entgegengesetzten, von dem Mittelpuncte gleich entfernten Puncten, der andere schneidet sie gar nicht. Die Abscissen sollen auf demjenigen Durchmesser genommen werden, welcher die Hyperbel schneidet. In der Gleichung (17.) sind daher die Coefficienten $b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2$, und $a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2$ beide positiv. Dadurch erhält x zwey mögliche gleiche, entgegengesetzte Werthe für $y = o$, aber y unmögliche, wenn $x = o$ ist, oder einen Werth unter einer gewissen Gränze hat.

21. Der bestimmte Werth eines Durchmessers, der die Hyperbel schneidet, zwischen den Durchschnittspuncten, heiße insbesondere der Durchmesser, und werde durch 2f bezeichnet. Für $x = o$, oder in dem Mittelpuncte, sey $y^2 = -g^2$, so ist 2g der conjugirte Durchmesser auf gleiche Art, wie 2b die conjugirte Axe. Aus der Gleichung in (17.) folgt, wie in dem Artikel, Ellipse (17.), die Gleichung,

$$f^2 g^2 = g^2 x^2 - f^2 y^2,$$

oder $g^2 (x^2 - f^2) = f^2 y^2$.

22. Man setze $x = f + u$, so folgt aus jener Gleichung diese:

$$g^2 (2fu + uu) = f^2 y^2;$$

oder $$\frac{2gg}{f} u + \frac{gg}{ff} uu = y^2.$$

Beide Gleichungen haben dieſelbe Form wie die in (3.), welche ſich auf die Hauptdurchmeſſer beziehen. Auch heißt $\frac{2gg}{f}$ der Parameter zu dem Durchmeſſer 2f.

23. Man vertauſche die Bedeutungen von a und b, ſo daß b der Haupthalbmeſſer auf der Axe oder der Abſciſſenlinie, a aber der conjugirte Halbmeſſer ſey. Der Winkel der Aſymptoten iſt nun der Nebenwinkel von dem Winkel derſelben bey der erſtern Bedeutung von a und b. Es ſey (Fig. 76.) CF der halbe Haupthalbmeſſer auf der Axe der Abſciſſen xCx; FD der conjugirte Halbmeſſer, und CF = AD, FD = CA, jenes dem conjugirten, dieſes dem Haupthalbmeſſer für die Hyperbel MAmNBn. Die Hyperbel SFssFS heißt die conjugirte von jener.

Die Gleichung für die conjugirte Hyperbel iſt, wenn die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus auf der Hauptaxe genommen werden,

$$aa(xx - bb) = bbyy.$$

Nennt man einen Halbmeſſer, der an die conjugirte Hyperbel gezogen iſt, g, den conjugirten f, indem man auf gleiche Art wie für die Haupthalbmeſſer, die Bedeutungen von f und g vertauſcht, ſo wird aus der Gleichung in (21.) dieſe,

$$ff(xx - gg) = ggyy.$$

Die conjugirten Halbmeſſer an der einen Hyperbel, welche als Ordinaten unmöglich ſind, ſind an der andern als Halbmeſſer möglich.

24. Es iſt

$$f^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi \cdot \sin(\omega - \varphi)} a^2 = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi \cdot \sin(\omega - \varphi)} b^2.$$

$$g^2 = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega \cdot \sin(\omega - \varphi)} a^2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\omega \cdot \sin(\omega - \varphi)} b^2.$$

Denn aus der Gleichung in (17.) iſt

$$a^2 b^2 = (b^2 \cos\varphi^2 - a^2 \sin\varphi^2) f^2,$$ und

$$a^2 b^2 = (a^2 \sin\omega^2 - b^2 \cos\omega^2) g^2.$$

Hieraus werden auf eine ganz ähnliche Art wie in dem Artikel, Ellipse (19.) die angegebenen Werthe von f^2 und g^2 erhalten.

25. Es ist I. $\frac{ff}{gg} = \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\varphi}$.

II. $\frac{f}{g} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi} \cdot \frac{a}{b}$. III. $\frac{f}{g} = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi} \cdot \frac{b}{a}$.

26. Der kleinste Werth von φ ist $= 0$, der größte ist Ang. tang $\frac{b}{a}$, oder der Winkel der Asymptoten mit der Axe. Für jenen Winkel ist $f = a$, für diesen ist f unendlich groß, da der Halbmesser f in die Asymptote fallt. Der größte Werth von ω ist ein Rechter, wobey $g = b$ ist; der kleinste ist Ang tang $\frac{b}{a}$, bey welchem der conjugirte Halbmesser (der an der conjugirten Hyperbel als wirklicher Durchmesser genommene) auch in die Asymptote fällt. Denn aus der Formel, $bb = aa \tang\varphi \cdot \tang\omega$, folgt $\tang\omega = \frac{b}{a}$, wenn $\tang\varphi = \frac{b}{a}$ ist. Das Verhältniß $f : g$ hat also die Werthe von $a : b$ an bis zu $1 : 1$. Vergl. Apollonii Conicorum L. VII. prop. 21. 22.

27. Es ist $fg \cdot \sin(\omega - \varphi) = ab$. Der Winkel $\omega - \varphi$ ist der Ordinatenwinkel, so daß das Parallelogramm von zwey conjugirten Durchmessern unter diesem Winkel dem Rechtecke von den beiden Axen oder Hauptdurchmessern gleich ist. Apollonii Conic. VII. 31.

28. Es ist $\pm(ff - gg) = \pm(aa - bb)$.

Bew. Denn $ff - gg = \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega - \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\cos\varphi \cdot \cos\omega \cdot \sin(\omega - \varphi)} aa$. Der Zähler dieses

Bruches ist $\frac{1}{2}\sin 2\omega - \frac{1}{2}\sin 2\varphi =$ $\sin(\omega - \varphi).\cos(\omega + \varphi)$. Also ist $ff - gg = \frac{\cos(\omega+\varphi)}{\cos\varphi.\cos\omega}aa = \left(1 - \frac{\sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega}\right)aa = aa - bb$. Ist $b > a$, so ist auch $g > f$. Apollonii Conic. VII. 13.

29. Es ist $f + g > a + b$, und $\pm(f-g) < \pm(a-b)$.

Bew. Da $ff - gg = aa - bb$, und $f > a$ ist, so ist auch $g > b$, also $f + g > a + b$. Zweytens, da $ff - gg = (f+g)(f-g)$, und $aa - bb = (a+b)(a-b)$ ist, und daher beide Producte gleich sind, so ist, weil der Factor $f + g$ grösser als der Factor $a + b$ ist, dagegen der Factor $f - g$ kleiner als $a - b$. Apollon. Con. VII. 25. 27.

30. Wenn $a = b$ ist, so ist $\tang\varphi.\tang\omega = 1$, also $\omega = 90° - \varphi$, und $2\omega = 180° - 2\varphi$, daher $\sin 2\omega = 2\varphi$, folglich $f = g$ (25. I.), oder alle conjugirten Durchmesser sind gleich, wenn die beiden Hauptdurchmesser gleich sind. Dasselbe folgt aus den beiden andern Formeln in 25.

31. Die Hyperbel heißt in diesem Falle eine gleichseitige. Der Parameter zu beiden Durchmessern ist ihnen gleich. Da ein Durchmesser in der alten Geometrie latus transversum (oder vielmehr obliquum) und der Parameter latus rectum, in Beziehung auf das Rechteck von beiden hieß (vergl. Ellipse, 7.), so heißt bey der Gleichheit beider Linien die Hyperbel eine gleichseitige.

Die gleichseitige Hyperbel ist unter den Linien ihrer Art dasselbe, was der Kreis unter den Ellipsen ist.

32. An der gleichseitigen Hyperbel ist der Winkel der Asymptoten mit der Axe ein halber Rechter, also der Winkel der Asymptoten selbst ein Rechter.

33. Es ist an derselben $ff = \frac{aa}{\cos 2\varphi}$, wo der

grösste Werth von 2φ ein Rechter ist.

Die Gleichung für dieſelbe, wenn die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus genommen werden, iſt $xx - yy = ff$.

Werden die Abſciſſen von dem einen Scheitel des Durchmeſſers an genommen, ſo iſt $2fu + uu = yy$.

34. Es ſeyn CS, Cs (Fig. 77.) die Aſymptoten der Hyperbel SAs, die Axe CX, der Haupthalbmeſſer $AC = a$, der conjugirte Halbmeſſer $AD = b$. Man ziehe einen Durchmeſſer CV, der die Hyperbel in E ſchneide, unter dem Winkel $ACE = \varphi$. Der Winkel, unter welchem die zu demſelben gehörigen Ordinaten die Axe ſchneiden, ſey $ACU = \omega$, der nach (16.) beſtimmt werde. Mit CU ziehe man irgend eine NPn parallel, welche die Aſymptoten in N, n, und CV in P ſchneide: es iſt $CP : PN = f : g$, und auch $CP : Pn = f : g$, wo $f = CE$ iſt, und g den conjugirten Halbmeſſer bedeutet. Dadurch iſt $PN = Pn$.

Bew. Der Winkel ACS ſey $= \alpha$, ſo iſt Winkel $CNP = \omega - \alpha$; $PCN = \alpha - \varphi$. Es iſt $\sin CNP = \sin\omega . \cos\alpha - \cos\omega . \sin\alpha$; $\sin PCN = \sin\alpha . \cos\varphi - \cos\alpha . \sin\varphi$. Da ferner $\sin\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}} = \frac{b}{e}$, $\cos\alpha = \frac{a}{e}$ iſt, ſo iſt $\sin CNP : \sin PCN = a\sin\omega - b\cos\omega : b\cos\varphi - a\sin\varphi$. Aus (25. II, III.) iſt $a\sin\omega : b\cos\varphi = f : g$, und $b\cos\omega : a\sin\varphi = f : g$. Daraus wird $a\sin\omega - b\cos\omega : b\cos\varphi - a\sin\varphi = a\sin\omega : b\cos\varphi = f : g$. Alſo iſt $\sin CNP : \sin PCN = f : g$; das iſt, $CP : PN = f : g$.

Zweytens: in dem Dreyeck PCn iſt Winkel $CnP = 180° - (\omega + \alpha)$; $PCn = \alpha + \varphi$, und $\sin CnP = \sin\omega . \cos\alpha + \cos\omega . \sin\alpha$; $\sin PCn = \sin\alpha . \cos\varphi + \cos\alpha . \sin\varphi$. Daraus folgt auf ähnliche Art, wie vorher, daß $\sin CnP : \sin PCn = f : g$ iſt, das iſt $CP : Pn = f : g$.

35. Die Linie Nn schneide die Hyperbel in M, m, so wird, wegen der angenommenen Bestimmung des Winkels ω, die Chorde Mm in P halbirt. Dadurch ist $MN = mn$.

36. Die mit CU durch E parallele ist eine berührende in E.

Denn wenn sie die Hyperbel noch in einem Puncte schnitte, so würde CV nicht die gerade Linie seyn, die alle mit CU parallelen Chorden der Hyperbel nach (35.) halbirt.

37. Der Winkel ETX der berührenden ET mit der Axe sey $= \omega$, und $ECT = \varphi$, so ist $bb = aa \tang\varphi . \tang\omega$, da zufolge dieser Annahme die Lage der berührenden in E gefunden ist.

38. Die berührende in E schneide die Asymptoten in L, l, so ist $EL = El$, und jedes, EL oder El gleich dem conjugirten Halbmesser von CE. Denn es ist $CE : EL = f : g$, und $CE : El = f : g$, eben so wie $CP : PN = f : g$, und $CP : Pn = f : g$ ist.

Apollonius hat den Satz im III. B. 3. S. indirecte, durch Unmöglichkeit des Gegensatzes, erwiesen, mit der Abänderung, daß das Quadrat von EL gleich ist dem vierten Theil der Figur zu dem Durchmesser in dem Berührungspuncte. Diese Figur ist das Rechteck von dem Durchmesser und dem zugehörigen Parameter.

39. Es sey TMt (Fig. 78.) eine berührende an der Hyperbel AMS in M, und MP senkrecht auf die Axe der Hyperbel, deren Mittelpunct in C ist. Es ist $CP : CA = CA : CT$.

Bew. Es sey der Winkel $ATM = \omega$; $ACM = \varphi$, so ist $CMT = \omega - \varphi$, und $CT = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} f$; $CP = f . \cos\varphi$; also $CP \times CT = \frac{\cos\varphi . \sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega} ff$. Da TM eine berührende ist, so haben die Winkel φ und ω die in (16.) bestimmte Re-

lation (37.). Daraus wird nun zufolge des in (24.) gefundenen Werthes von ff erhalten $CP \times CT = aa = CA^2$, und hieraus die in dem Satze angegebenen Proportion.

40. Hieraus folgt $CP : PA = CA : AT$, daraus ferner $CP : PA = BP : PT$, wenn B der andere Endpunct der Axe ist. Noch ist $CA : AT = BP : PT$.

41. Die Asymptote CS ist die berührende in einem unendlich entfernten Puncte. Denn wenn CP unendlich groß gedacht wird, so ist $CT = 0$.

42. Da eine berührende zwey an einander stoßenden Bogen der Curve gemein ist, so verbindet die Asymptote, als berührende betrachtet, auch zwey Bogen der Hyperbel. Diese sind (Fig. 74.) die Bogen AS, BS in ihren unendlich entfernten Puncten, wo sie von derselben geraden Linie, der Asymptote SCS, berührt werden. Diese unendlich von einander entfernten Puncte lassen sich, wegen der gemeinschaftlichen berührenden, als ein einziger Punct betrachten, so daß es hier im wörtlichsten Sinne heißt, das äußerste berührt sich. Eben so stoßen die beiden Zweige As, Bs mit ihren unendlich entfernten Puncten an einander. Solchergestalt läßt sich die Hyperbel als eine zusammenhängende und geschlossene Linie betrachten. Ein sie beschreibender Punct gehe von A nach S ins Unendliche, so gelangt er da auf der gemeinschaftlichen berührenden Asymptote von dem Zweige AS zu dem SB, setzt von B seinen Weg ins Unendliche auf Bs fort, und kommt von da auf sA nach A, von wo er ausgegangen war. Eine den Zweig AS schneidende, um C sich drehende, gerade Linie schneidet nach dem Durchgange durch die Asymptote SCS in stetiger Fortrückung den Zweig SBs, und nach dem Durchgange durch die Asymptote sCs wieder den Zweig sA. Eine solche Rückkehr durchs Unendliche findet sich auch bey dem Durchschnittspuncte zweyer geraden Linien, deren eine sich um einen festen Punct dreht. Der Durchschnittspunct entfernt sich von einem auf der unbewegten Linie angenommenen Puncte

immer mehr, je mehr die sich drehende Linie sich der parallelen Lage mit der andern nähert. In dieser Lage kann man den unendlich entfernten Durchschnittspunct so gut nach der einen als der andern entgegengesetzten Gegend hin setzen. Bey fortgehender Drehung nach derselben Richtung kommt der Durchschnittspunct von der entgegengesetzten Gegend her zurück, und beschreibt so die ganze unendliche gerade Linie, ohne seine Richtung zu ändern.

Unsere neueste phantasievolle Philosophie kann ihre Bilder hieraus mit einem neuen Indifferenzpunct bereichern, auch mit einer Identität neuer Art, da eine unendliche Linie zwischen zwey zusammen fallenden Puncten enthalten ist.

43. Es sey MQ (Fig. 78.) senkrecht auf die berührende TMN, und schneide die Axe in Q, es ist $PQ = \frac{bb}{aa}.CP$, und $CQ = \frac{ee}{aa}.CP$.

Beweis. Es ist $PQ = MP.\tang PMQ = MP.\tang PTM = f.\sin\varphi.\tang\omega = f.\tang\varphi.\tang\omega.\cos\varphi = \frac{bb}{aa}.CP$.

Ferner $CQ = CP + PQ = \left(1 + \frac{bb}{aa}\right)CP = \frac{ee}{aa}.CP$.

44. Es ist $MQ = \frac{f\sin\varphi}{\cos\omega} = \frac{bb}{f\sin(\omega - \varphi)}$ aus (24.).

45. Man ziehe QR (Fig. 78.) senkrecht auf die verlängerte CM, es ist $CM \times MR = bb$.

Denn $MR = MQ.\cos QMR = MQ.\sin TMC = MQ.\sin(\omega - \varphi) = \frac{bb}{f}$ aus (44.).

46. Aus den Brennpuncten F, G (Fig. 78.) ziehe man an einen Punct M der Hyperbel die geraden FM,

GM; es halbirt die in M berührende TMt den Winkel FMG.

Bew. Es sey MP senkrecht auf die Axe CP und CP = x, so ist $CT = \frac{aa}{x}$ (39.), und $FT = e - \frac{aa}{x}$; $GT = e + \frac{aa}{x}$, also $FT : GT = ex - aa : ex + aa$. Ferner ist $FM = \frac{ex}{a} - a$; $GM = \frac{ex}{a} + a$ (11.), und $FM : GM = ex - aa : ex + aa$. Folglich ist $FT : GT = FM : GM$. Daher halbirt TM den Winkel FMG, zufolge des umgekehrten Satzes, Dreyeck, nr. 9.

47 Wenn die Hyperbel als eine physische, die Lichtstrahlen zurückwerfende, Linie betrachtet wird, so werden die von dem einen Brennpuncte auffallenden Strahlen so zurückgeworfen, daß ihre rückwärts genommenen Verlängerungen nach dem andern Brennpuncte gehen. Denn es ist der Zurückstrahlungswinkel tMg gleich dem Einfallswinkel FMT, also auch gleich dem TMG, so daß die verlängerte gM durch G geht. Der Brennpunct G ist nur ein virtueller.

48. Es ist $\sin FMQ = \frac{e \cos \omega}{a}$, wo ω der Winkel der berührenden mit der Axe ist, und MQ die Normale auf die berührende oder die Curve.

Bew. In dem Dreyeck FMQ ist $FM : FQ = \sin FQM : \sin FMQ$. Ferner ist $FM = \frac{ex}{a} - a$, und $FQ = CQ - CF = \frac{ee}{aa}x - e$ (43.), also ist $FM : FQ = a : e$. Auch sind in dem rechtwinklichten Dreyeck TMQ die beiden Winkel bey Q und T jeder des

andern Ergänzung zum Rechten. Daher $\sin FQM = \cos QTM = \cos\omega$, und $a : e = \cos\omega : \sin FMQ$.

49. Es ist $FM \times GM = gg =$ dem Quadrat des zu CM conjugirten Halbmessers.

Bew. Da $FM = \frac{ex}{a} - a$, und $GM = \frac{ex}{a} + a$ ist, so ist $FM \times GM = \frac{e^2x^2}{a^2} - a^2$. Ferner $ee = aa + bb = (1 + \tang\varphi . \tang\omega)aa = \frac{\cos\varphi.\cos\omega + \sin\varphi.\sin\omega}{\cos\varphi.\cos\omega} aa = \frac{\cos(\omega - \varphi)}{\cos\varphi.\cos\omega} aa$.

Dann ist $x = f\cos\varphi$, und $\frac{ff}{aa} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\sin(\omega-\varphi)}$, also ist $\frac{e^2x^2}{a^2} = \frac{\sin\omega.\cos(\omega-\varphi)}{\cos\omega.\sin(\omega-\varphi)} aa$. Folglich

$$FM \times GM = \left(\frac{\sin\omega.\cos(\omega-\varphi)}{\cos\omega.\sin(\omega-\varphi)} - 1\right) aa = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega.\sin(\omega-\varphi)} aa = gg, \text{ aus (24.)}.$$

50. Noch mehrere Eigenschaften der Hyperbel, die wie die bisher angeführten, mit Eigenschaften der Ellipse Analogie haben, (s. Ellipse), wird man nach Anleitung des hier gebrauchten Verfahrens finden können, auch andere, die hier nicht berührt sind. Es kann aber leicht seyn, daß bey Verhältnissen der an die Hyperbel oder Ellipse gezogenen geraden Linien die Geometrie einen kürzern Weg giebt.

51. In van Schooten Exercit. mathematicis L. IV. sind verschiedene Instrumente angegeben, eine Hyperbel durch stetige Bewegung eines Stiftes zu beschreiben.

Es sey C (Fig. 79.) der Mittelpunct der zu zeichnenden Hyperbel, CX ihre Hauptaxe, CA der Haupthalbmesser, AD der conjugirte, also CD die Richtung

der einen Asymptote. Diese werde nach CS verlängert. Wird CD in E halbirt, und AE gezogen, so ist AE parallel mit der andern Asymptote. Man setze drey Liniale FG, FN, GMA zusammen, so daß GFN dem Winkel der Asymptoten, das ist, AED gleich sey, FGA aber von willkührlicher Größe, indem FG und AG sich um einen Stift in G drehen lassen. Das Linial FG sey so lang als die Linie CE. Wird das Linial FG auf AS hingeschoben, indem das Linial AG immer durch A geht, so beschreibt ein Stift an dem Durchschnitt der Ränder der Liniale AG, FN die Hyperbel längs der Asymptote AS.

Es ist hier FG : FM = EG : EA. Da FG = CE, also EG = CF ist, so ist CE : FM = CF : EA, daher M ein Punct in der Hyperbel, nach (8.).

Anstatt der Haupthalbmesser kann man auch zwey andere conjugirte nehmen, mit dem Ordinatenwinkel DAX, wo CAX nun ein Durchmesser durch A ist, zufolge (38.).

52. Man nehme (Fig. 80.) zwey Liniale DN, GP, befestige darauf in F, G Stifte, welche die Brennpuncte einer Hyperbel vorstellen. Von F und G nehme man FD und EG jedes so groß als die Hauptaxe, und befestige mittelst Stifte in D und E ein Linial DE, worauf DE der Abstand der Brennpuncte sey, so daß sich jene Liniale mit diesem um D und E drehen können. Die Liniale DN und EP haben Einschnitte der Länge nach, jenes von F, dieses von E an, um in ihrer Durchkreuzung M einen Stift fortzuführen, der die Hyperbel beschreibt. Auf dem Papiere oder der Tafel steckt man die Puncte F, G für die Brennpuncte ab, in der Entfernung DE, laßt die beiden Liniale DN, GP sich um die Stifte in F, G durch jene Puncte drehen, und führt den Stift M herum, so beschreibt dieser einen hyperbolischen Bogen. Die Linie MT von M bis an die Durchkreuzung des Linials DE mit der Linie FG ist die berührende in M. Die Mitte C von FG ist der Mittelpunct der Hyperbel; A und B sind ihre Scheitelpuncte, wenn CA und CB jedes der Hälfte von FD oder EG genommen worden.

Hyperbel höherer Art ist diejenige, deren Gleichung ist, $ay^{m+n} = bx^m(c+x)^n$. Sie entsteht auf eine ähnliche Art durch den Schnitt eines Konoids, dessen Grundfläche ein Kreis höherer Art ist, wie die vorher betrachtete aus dem Kegel. Ein Kreis höherer Art hat die Gleichung, $y^{m+n} = (c-x)^n x^m$. Die Hyperbel der ersten Art heißt zum Unterschiede die Apollonische. S. Wolfii Elementa Matheseos. T. I. Analysis. §. 525—530. Die Formen sind nach Beschaffenheit der Exponenten m, n, ob diese gerade oder ungerade sind, sehr verschieden.

Einige nennen diese höhern Hyperbeln auch Hyperboloiden, welches aber auch hyperbolische Konoiden bedeutet.

Eine andere Gattung von Hyperbeln höherer Art ist diejenige, welche unter der Gleichung, $x^m y^n = a^m b^n$, begriffen ist, wenn $m+n$ größer als 2 ist. Die Axen der Coordinaten sind die Asymptoten der Curve. Newtons Katarakta (Princip. Phil. nat. math. L. II. prop. 36.) ist nach einer solchen Hyperbel gebildet. Die Gleichung für diese ist, $xy^4 = ab^4$. Sie ist eine Hyperbel der vierten Ordnung.

Newton nennt in seiner Enumeratione linearum tertii ordinis, die Curven dieser Gattung mit geradlinichten Asymptoten oder mit einer einzigen auch Hyperbeln, weil ihre Zweige, die an einer Asymptote hinlaufen, sich immer mehr und mehr den Zweigen einer apollonischen Hyperbel nähern. Diejenigen, die drey Asymptoten haben, von welchen keine sich parallel sind, nennt er Hyperbolas redundantes, diejenigen, die nur eine haben, Hyperbolas defectivas. Auch giebt er den Formen der Curven, nach Verschiedenheit der Lage des hyperbolischen Zweiges gegen die Asymptoten, besondere Namen, als circumscripta, ambigena, conchoidalis, cet.

Hyperbolisch, was einer Beziehung auf die Hyperbel hat, als hyperbolisches Cylindroid (s. Cylindroid);

hyperbolischer Kegel (s. Konoid); hyperbolische Logarithmen (s. Logarithmen).

Hyperboloides, eine Hyperbel höherer Art, oder auch ein hyperbolisches Konoid.

Hypergeometrische Reihe ist diejenige, deren Glieder Producte aus den Gliedern einer arithmetischen Reihe nach ihrer Folge sind, so daß das nte Glied jener Reihe das Product von den n ersten Gliedern dieser ist, z. B. die Reihe 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. in welcher das nte Glied ist $= 1.2.3.4.5 \ldots n$.

Wallis hat diese Benennung gebraucht in der Arithm. Infin. Prop. 190. Nämlich in der geometrischen Reihe ist das nte Glied das Product aus dem ersten Gliede in eine Anzahl von $n-1$ gleichen Factoren, oder in die $(n-1)$te Potenz des Exponenten. In der hypergeometrischen Reihe sind die zu dem Anfangsgliede gesetzten Factoren ungleich, und zwar in arithmetischer Fortschreitung.

Ein Glied dieser Reihe ist dasselbe, was Kramp eine **arithmetische Facultät** genannt hat, wovon ein eigner Artikel dieses Wörterbuchs umständliche Nachricht giebt.

Euler hat schon in seiner Differentialrechnung von Größen dieser Form gehandelt. In den Novis Comment. Acad. Petrop. T. XIII. ist von ihm eine Abhandlung über die Curve enthalten, an welcher die Glieder einer hypergeometrischen Reihe mit ihren eingeschalteten die Ordinaten sind, deren Natur er untersucht. Für ganze negative Werthe der Abscisse sind die Ordinaten unendlich groß, zwischen diesen abwechselnd positiv und negativ. Euler findet, daß das Product $1.2.3 \ldots x$ sich durch die Reihe,

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x.x-1.}{1.2}(x-2)^x$$

$$- \frac{x.x-1.x-2.}{1.2.3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

ausdrucken lasse, und nimmt daher Gelegenheit eine allgemeinere Reihe dieser Form, worin statt des Exponenten x eine Zahl n, und statt x in den Coefficienten eine Zahl m gesetzt wird.

In den Novis Actis Ac. Petrop. T. VII. et VIII. sind noch zwey Abhandlungen von Euler über die hypergeometrischen Reihen enthalten. Die erste betrifft das allgemeine Glied derselben; die zweyte enthält verschiedene Betrachtungen über diese Reihen.

In der ersten dieser Abhandlungen findet Euler folgenden Ausdruck für das nte Glied dieser Reihen. Es werde dasselbe als eine Function der veränderlichen Größe n betrachtet, und durch $\Delta : n$ bezeichnet, wo Δ das Functionszeichen ist. Die arithmetische Reihe sey $a, a+b; a+2b; \ldots a+(n-1)b$; etc. und α sey eine willkührliche endliche Größe, so ist

$$\Delta : n = \alpha^n \cdot \frac{a}{a+nb} \left(\frac{\alpha+b}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b} \times \left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n \cdot \frac{a+2b}{a+(n+2)b} \left(\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}\right)^n \times \frac{a+3b}{a+(n+3)b} \left(\frac{\alpha+4b}{\alpha+3b}\right). \text{ etc.}$$

Das Verfahren, wodurch Euler diesen Ausdruck findet, ist mit einiger Abkürzung und Abänderung folgendes.

Da $\Delta : n = a(a+b)(a+2b)\ldots(a+(n-1)b)$, und eben so

$\Delta : (n+i) = a(a+b)\ldots\ldots(a+(n+i-1)b)$ ist, so ist

$\Delta : (n+i) = (\Delta : n)(a+nb)\ldots(a+(n+i-1)b)$.

Es ist aber auch, wenn man die Theile n und i der Stellenzahl $n+i$ vertauscht,

$\Delta : (i+n) = (\Delta : i)(a+ib)\ldots(a+(i+n-1)b)$.

Man gebe der Zahl i einen unendlich großen Werth, so

sind die in dem letztern Ausdruck zu $\Delta : i$ gesetzten Factoren alle als gleich zu achten, und es ist

$$\Delta : (i+n) = (\Delta : i)(a+ib)^n.$$

In der unendlich großen Größe darf man für a jede endliche α setzen, und so ist

$$\Delta : (i+n) = (\Delta : i)(\alpha+ib)^n.$$

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke für $\Delta : (n+i)$ folgt

$$\Delta : n = \frac{a}{a+nb} \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b} \cdot \frac{a+2b}{a+(n+2)b} \times$$

$$\ldots\ldots \times \frac{a+(i-1)b}{a+(n+i-1)b} (\alpha+ib)^n.$$

Dieses ist der wahre Werth von $\Delta : n$, wofern nur i einen unendlich großen Werth erhält, es mag n eine ganze oder gebrochne, oder selbst eine irrationale Zahl bedeuten.

Giebt man i einen endlichen Werth, so ist der Fehler bey dem gefundenen Ausdruck von $\Delta : n$ desto kleiner, je größer i genommen wird. Man setze für i folgeweise die Zahlen 1, 2, 3, etc. und bezeichne die dadurch entspringenden Werthe von $\Delta : n$ durch I. II. III. etc. so ist

I. $\frac{a}{a+nb} (\alpha+b)^n.$

II. $\frac{a}{a+nb} \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b} (\alpha+2b)^n.$

III. $\frac{a}{a+nb} \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b} \cdot \frac{a+2b}{a+(n+2)b} (\alpha+3b)^n.$

IV. $\frac{a}{a+nb} \ldots\ldots \frac{a+3b}{a+(n+3b)} (\alpha+4b)^n.$

etc.

Hieraus wird erhalten

$$\frac{II}{I.} = \frac{a+b}{a+(n+1)b}\left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n;$$

$$\frac{III.}{II.} = \frac{a+2b}{a+(n+2)b}\left(\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}\right)^n;$$

$$\frac{IV.}{III.} = \frac{a+3b}{a+(n+3)b}\left(\frac{\alpha+4b}{\alpha+3b}\right)^n;$$

etc.

Multiplicirt man diese Quotienten und alle folgenden in einander, setzt darauf den Factor I. noch hinzu, und giebt dem ersten Factor die Form der übrigen, so wird der vorher angegebene Werth von $\Delta : n$ erhalten.

Die einzelnen Factoren sowohl als die partiellen Factoren derselben nähern sich immer mehr der Einheit. Die Größe α ist willkührlich, und kann so genommen werden, daß die Rechnung dadurch bequemer wird. Man bemerkt leicht, daß in dem zuerst gefundenen Werthe von $\Delta : n$ eine Reihe von Factoren als Multiplicatoren und als Divisoren eingeschoben ist, wodurch das Product der abnehmenden Bruchfactoren, $\frac{a}{a+nb}$; $\frac{a+b}{a+(n+1)b}$ etc. wieder vergrößert wird.

Da der Werth von $\Delta : n$ nur für unendlich große i als richtig angesehen werden kann, so bleibt die Annäherung zu dem wahren Werthe noch immer unsicher, und die Einschaltung der Potential-Factoren ist auch etwas willkührliches, zugleich mit dem Werthe von α. Nimmt man anstatt der gleichen Factoren $a+ib$, die nur für ein unendliches i Statt finden, die genau richtigen $a+ib$, $a+(i+1)b$, u. s. f. so erhält man für $\Delta : n$ eben die Formel, die in dem Artikel, Facultät, 44. gefunden ist.

Das Verfahren, welches ich daselbst (52. 53.) gebraucht habe, den Werth eines eingeschalteten Gliedes in einer Reihe von Facultäten, oder einer hypergeometrischen zu finden, scheint das sicherste und directeste zu seyn. Die

Multiplication zweyer Werthe der gesuchten Größe, deren einer zu groß, der andere zu klein ist, muß sich dem Quadrate dieser Größe nähern, wenn die Factoren dieses Products sich immer mehr der Einheit nähern, wie es daselbst geschieht.

Hypotenuse, ist in einem rechtwinklichten Dreyeck die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über liegt (Subtensa angulo recto, von ὑπο und τεινω.). S. Pythagorischer Lehrsatz.

Hypothesis, Voraussetzung, ist in der reinen Mathematik, was man auch das Gegebene für einen zu erweisenden Satz oder eine aufzulösende Aufgabe nennet. Bey einem Lehrsatze wird etwas über die Beschaffenheit und Verbindung gewisser Größen vorausgesetzt oder bestimmt, um daraus neue Folgen zu ziehen. Das ist die Hypothesis des Satzes. Z. B. zwey Dreyecke haben eine gemeinschaftliche Grundlinie und gleiche Höhe, so folgt aus dieser Hypothesis, daß sie gleichen Inhalt haben. Daher ist die gewöhnlichste Form der mathematischen Lehrsätze die bedingte. Bey einer Aufgabe liegt auch immer eine gewisse Bedingung über die Beschaffenheit der gegebenen und gesuchten Größen zum Grunde, woraus das gesuchte hergeleitet werden soll. Z. B. Zwischen zwey gegebenen Größen zwey mittlere geometrisch proportionale zu finden, wo die Hypothesis die Proportionalität der vier Größen ist. Oder: aus der Summe dreyer Größen, der Summe der Producte je zweyer und dem Producte aller drey diese Größen zu finden, wo die Combinationen die Hypothesis ausmachen

In der angewandten Mathematik sind Hypothesen gewisse Annahmen über die physische Beschaffenheit der Größen, welche den Gegenstand einer mathematischen Untersuchung ausmachen. Z. B. daß ein Körper vollkommen dichte und gleichförmig sey, daß ein flüssiger Körper vollkommen flüssig sey Dahin gehören alle Fälle, worin etwas bey Seite gesetzt wird, das zu einer völlig scharfen

Bestimmung und Auflösung noch in Betracht zu ziehen ist. Man kann Gesetze wirkender Kräfte annehmen, die nur nichts den allgemeinen Grundsätzen wiedersprechendes enthalten müssen, und daraus Folgerungen ziehen, ohne dadurch zu behaupten, daß diese Gesetze wirklich in der Natur vorhanden seyn. Vergleicht man die Folgerungen mit den Beobachtungen, und stimmen diese mit jenen gehörig zusammen, so ist dieses wenigstens eine sehr wahrscheinliche Begründung des angenommenen Gesetzes. In der Optik ist es erlaubt, das Licht als einen Ausfluß aus dem leuchtenden Körper zu betrachten, und die Lichtstrahlen für mathematische Linien zu nehmen. Die Übereinstimmung der Folgerungen aus den Gesetzen der Reflexion und Refraction mit der Erfahrung beweiset inzwischen jene Annahme nicht als wirklich.

In der Astronomie insbesondere heißen die verschiedenen Systeme von dem Laufe der Himmelskörper, Hypothesen, als Hypothesis Ptolemaica, Tychonica, Copernicana.

J.

Ichnographie ist Grundriß in der Baukunst. Von ἰχνος, Fußsole Fußstapfe, und γραφω, zeichne. Es ist eine Anwendung der orthographischen Projection.

Icosaedrum, ein regulärer Körper von 20 gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, s. Körper, reguläre.

Identisch, was in der Größe und Form übereinstimmt. Zwey Größen können einander gleich, und doch in der Form oder Zusammensetzung verschieden seyn. So sind $40+8$; $60-12$; 3×16; $\frac{96}{2}$, sich gleich, aber in der Form verschieden; so auch $(a+b)(a-b)$ und $aa-bb$. Zwey Dreyecke können einerley Inhalt haben, bey verschiedenen Winkeln und Seiten. Von Figuren, die gleich und ähnlich sind (in der Größe und

Form übereinkommen, sagt man, daß sie congruiren, oder sich decken.

Ein identischer Satz hat allgemein die Form, $A = A$. Mit einem solchen Satze für sich kann man nichts anfangen, allein man gebraucht ihn in Beweisen zur Verwandlung eines Satzes, der ein Glied des Beweises ist. Hat man nämlich gefunden, daß $P = Q$ ist, wo P und Q zwey Größen bedeuten, die sich gleich aber nicht identisch sind, so ist auch $P \pm A = Q \pm A$, wo dann A eine Größe ist, die mit denen, woraus P und Q zusammengesetzt ist, in Verbindung steht. Man kann auch A als Multiplicator oder Divisor von den beiden, P und Q, gebrauchen.

Wenn zwey nach den Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnete Reihen sich gleich sind, sie mögen nun beide ohne Ende fortgehen, oder beide mögen, jede mit welcher Anzahl Glieder es sey, abbrechen, oder auch eine von ihnen nur mag aus einer bestimmten Anzahl Glieder bestehen, so sind sie identisch gleich, das ist, die zu denselben Potenzen von x in beiden Reihen gehörigen Coefficienten sind einander gleich.

Es sey nämlich

$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$

so ist $a = A$; $b = B$; $c = C$; $d = D$, u. s. f. Denn da für x jeder Werth gesetzt werden mag, so setze man $x = 0$, und es bleibt aus beiden Reihen $a = A$. Dadurch ist $bx + cx^2 + \text{etc.} = Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ Wegen des gemeinschaftlichen Factors x ist $b + cx + dx^2 + \text{etc.} = B + Cx + Dx^2 + \text{etc.}$ Dadurch ist wie vorher $b = B$, und $cx + dx^2 + \text{etc.} = Cx + Dx^2 + \text{etc.}$ also $c = C$. Solchergestalt sind jede zu derselben Potenz von x gehörige Coefficienten einander gleich.

Wenn die gleichnamigen Coefficienten schlechtweg identisch wären, so würde daraus nichts weiter zu folgern seyn. Allein die Coefficienten in beiden Reihen, oder in einer derselben sind immer aus gewissen Größen zusammen-

[illegible] sind die gleichnamigen Coef-
[illegible] eben so viele Gleichun-
[illegible] zusammengesetzt sind.

[illegible] $x^2 + dx^3 +$ etc.

[illegible] $x^2 + \delta x^3 +$ etc.

[illegible] $Ex^4 +$ etc. so ent-
[illegible] mit dem Nenner, $\alpha + \beta x$
[illegible] $Bx + Cx^2 +$ etc.
[illegible] $x^2 + Dx^3 +$ etc.
[illegible] etc. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$
[illegible] $A = a$; $B = b$;
[illegible] man dadurch
[illegible] dem Zähler und
[illegible] Dividenten, wo-
[illegible] werden. S. Buch
[illegible]

[illegible] das Verfahren in
[illegible] Kreis [illegible] durch den
[illegible] genommen [illegible]
[illegible] etc. und es wird [illegible]
[illegible] B [illegible] C [illegible] + etc.
[illegible] A; $C = \frac{[illegible]}{[illegible]} B$;
$D =$ [illegible]

[illegible] $x^3 + Ex^4 + Fx^5 +$ etc.
[illegible] zusammengesetzte sein.
[illegible] $C = 0$; $D = a$;
$E =$ [illegible] nicht, $0 = 0$, welches gar
nichts enthalten [illegible] jeder Coefficient giebt
für die Größen, [illegible] zusammengesetzt ist, eine
Gleichung. Denn wenn $x = 0$ genommen wird, so ist
$A = 0$, und $0 = B + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. Setzt
[illegible] für x irgend einen Werth, der nicht $= 0$ ist, so ist
[illegible] $B + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. $= 0$. Daher
[illegible] 0, damit für $x = a$ die Gleichung erfüllt wer-
[illegible] durch ist nun $0 = Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc.
[illegible] $Dx + Ex^2 +$ etc. $= 0$, woraus folgt, daß

C = o seyn muß. Solchergestalt sind alle Coefficienten = o.

Dieses wird insbesondere bey der Methode des unbestimmten gebraucht. Für die veränderliche Größe, deren Werth durch eine andere veränderliche ausgedruckt werden soll, wird eine Reihe angenommen, die nach dieser letztern geordnet ist, und in die für beide gegebene gesetzt. So erhält man eine Reihe, die aus mehreren Reihen, auch einzelnen Gliedern zusammengesetzt ist, in welcher jeder Coefficient = o ist. S. Function (41. ff.).

Inclinatio ist, als gewöhnliche Übersetzung des von Apollonius gebrauchten Worts νευσις, so viel als Richtung einer geraden Linie. Pappus sagt in der Nachricht von dieses Geometers zwey Büchern über die Richtungen, daß eine Linie (γραμμη) nach einem Puncte gerichtet sey (νευειν επι σημειον), wenn sie verlängert (επεκβαλλομενη) den Punct trifft. Die allgemeine Aufgabe sey diese: Wenn zwey Linien der Lage nach gegeben sind, zwischen ihnen eine gerade, der Größe nach gegebene, Linie so zu legen, daß sie nach einem gegebenen Puncte gerichtet sey (νευουσαν). Unter den besondern Aufgaben sind einige ebene, einige körperliche, einige linearische (γραμμικα). Die letztern sind solche, welche weder durch den Kreis, noch vermittelst Kegelschnitte aufgelöset werden können, sondern höhere Curven erfordern (Th. I. S. 227.). Von den ebenen Aufgaben führt Pappus folgende an. Gegeben ein Halbkreis und eine auf dessen Grundlinie senkrechte gerade; oder gegeben zwey Halbkreise, deren Grundlinien auf derselben geraden Linie liegen: zwischen ihnen eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem Winkel des Halbkreises gerichtet sey. Ferner: Gegeben ein Rhombus, dessen eine Seite verlängert worden, in desselben äußern Winkel eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem entgegengesetzten Winkel gerichtet sey. Auch dieses: in einem der Lage nach gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe.

gesetzt. In dieser Rücksicht sind die gleichnamigen Coefficienten nicht identisch; sie geben eben so viele Gleichungen für die Größen, woraus sie zusammengesetzt sind.

Es sey z. B. $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}$ so entsteht durch die Multiplication mit dem Renner, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ aus der Reihe, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \text{etc.}$ eine zusammengesetzte, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ deren Coefficienten aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. und α, β, γ, δ, etc. zusammengesetzt sind. Da nun $A = a$; $B = b$; $C = c$; $D = d$, u. s. f. ist, so erhält man dadurch Gleichungen zwischen den Coefficienten in dem Zähler und dem Renner des Bruches, und in dem Quotienten, wodurch die letztern aus jenen bestimmt werden. S. Buchstabenrechnung, V.

Zum Beyspiel diene ferner das Verfahren in Cyklometrie (5.), den Sinus eines Winkels φ durch den Winkel auszudrücken. Es wird angenommen $\sin\varphi = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + \text{etc.}$ und es wird dann gefunden $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}A\varphi^3 + \frac{1}{120}B\varphi^5 - \frac{1}{5040}C\varphi^7 + \text{etc.}$ Daraus ist $A = 1$; $B = \frac{1}{6}A$; $C = \frac{1}{120}B$; $D = \frac{1}{5040}C$, u. s. f.

Es sey

$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$

so daß diese Reihe eine aus mehreren zusammengesetzte sey. Es ist hier $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0$; $E = 0$, u. s. f. Das heißt nicht, $0 = 0$, welches gar nichts enthalten würde, sondern jeder Coefficient giebt für die Größen, woraus er zusammengesetzt ist, eine Gleichung. Denn, wenn $x = 0$ genommen wird, so ist $A = 0$, und $0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Setzt man für x irgend einen Werth, der nicht $= 0$ ist, so ist der Factor $B + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = 0$. Daher ist $B = 0$, damit für $x = 0$ die Gleichung erfüllt werde. Dadurch ist nun $0 = Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$ und $C + Dx + Ex^2 + \text{etc.} = 0$, woraus folgt, daß

$C = o$ seyn muß. Solchergestalt sind alle Coefficienten $= o$.

Dieses wird insbesondere bey der Methode des unbestimmten gebraucht. Für die veränderliche Größe, deren Werth durch eine andere veränderliche ausgedruckt werden soll, wird eine Reihe angenommen, die nach dieser letztern geordnet ist, und in die für beide gegebene gesetzt. So erhält man eine Reihe, die aus mehreren Reihen, auch einzelnen Gliedern zusammengesetzt ist, in welcher jeder Coefficient $= o$ ist. S. Function (41. ff.).

Inclinatio ist, als gewöhnliche Übersetzung des von Apollonius gebrauchten Worts νευσις, so viel als Richtung einer geraden Linie. Pappus sagt in der Nachricht von dieses Geometers zwey Büchern über die Richtungen, daß eine Linie (γραμμη) nach einem Puncte gerichtet sey (νευειν επι σημειον), wenn sie verlängert (επεκβαλλομενη) den Punct trifft. Die allgemeine Aufgabe sey diese: Wenn zwey Linien der Lage nach gegeben sind, zwischen ihnen eine gerade, der Größe nach gegebene, Linie so zu legen, daß sie nach einem gegebenen Puncte gerichtet sey (νευουσαν). Unter den besondern Aufgaben sind einige ebene, einige körperliche, einige lineariſche (γραμμικα). Die letztern sind solche, welche weder durch den Kreis, noch vermittelst Kegelschnitte aufgelöset werden können, sondern höhere Curven erfordern (Th. I. S. 227.). Von den ebenen Aufgaben führt Pappus folgende an. Gegeben ein Halbkreis und eine auf dessen Grundlinie senkrechte gerade; oder gegeben zwey Halbkreise, deren Grundlinien auf derselben geraden Linie liegen: zwischen ihnen eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem Winkel des Halbkreises gerichtet sey. Ferner: Gegeben ein Rhombus, dessen eine Seite verlängert worden, in desselben äußern Winkel eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem entgegengesetzten Winkel gerichtet sey. Auch dieses: in einem der Lage nach gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe.

gesetzt. In dieser Rücksicht sind die gleichnamigen Coefficienten nicht identisch; sie geben eben so viele Gleichungen für die Größen, woraus sie zusammengesetzt sind.

Es sey z. B. $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$ $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}$ so entsteht durch die Multiplication mit dem Renner, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ aus der Reihe, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \text{etc.}$ eine zusammengesetzte, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ deren Coefficienten aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. und α, β, γ, δ, etc. zusammengesetzt sind. Da nun $A = a$; $B = b$; $C = c$; $D = d$, u. s. f. ist, so erhält man dadurch Gleichungen zwischen den Coefficienten in dem Zähler und dem Renner des Bruches, und in dem Quotienten, wodurch die letztern aus jenen bestimmt werden. S. Buchstabenrechnung, V.

Zum Beyspiel diene ferner das Verfahren in Cyklometrie (5.), den Sinus eines Winkels φ durch den Winkel auszudrücken. Es wird angenommen $\sin\varphi = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + \text{etc.}$ und es wird dann gefunden $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}A\varphi^3 + \frac{1}{120}B\varphi^5 - \frac{1}{5040}C\varphi^7 + \text{etc.}$ Daraus ist $A = 1$; $B = \frac{1}{6}A$; $C = \frac{1}{120}B$; $D = \frac{1}{5040}C$, u. s. f.

Es sey

$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$

so daß diese Reihe eine aus mehreren zusammengesetzte sey. Es ist hier $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0$; $E = 0$, u. s. f. Das heißt nicht, $0 = 0$, welches gar nichts enthalten würde, sondern jeder Coefficient giebt für die Größen, woraus er zusammengesetzt ist, eine Gleichung. Denn, wenn $x = 0$ genommen wird, so ist $A = 0$, und $0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Setzt man für x irgend einen Werth, der nicht $= 0$ ist, so ist der Factor $B + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = 0$. Daher ist $B = 0$, damit für $x = 0$ die Gleichung erfüllt werde. Dadurch ist nun $0 = Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$ und $C + Dx + Ex^2 + \text{etc.} = 0$, woraus folgt, daß

$C = o$ seyn muß. Solchergestalt sind alle Coefficienten $= o$.

Dieses wird insbesondere bey der Methode des unbestimmten gebraucht. Für die veränderliche Größe, deren Werth durch eine andere veränderliche ausgedruckt werden soll, wird eine Reihe angenommen, die nach dieser letztern geordnet ist, und in die für beide gegebene gesetzt. So erhält man eine Reihe, die aus mehreren Reihen, auch einzelnen Gliedern zusammengesetzt ist, in welcher jeder Coefficient $= o$ ist. S. Function (41. ff.).

Inclinatio ist, als gewöhnliche Übersetzung des von Apollonius gebrauchten Worts νευσις, so viel als Richtung einer geraden Linie. Pappus sagt in der Nachricht von dieses Geometers zwey Büchern über die Richtungen, daß eine Linie (γραμμη) nach einem Puncte gerichtet sey (νευειν επι σημειον), wenn sie verlängert (ἐπεκβαλλομενη) den Punct trifft. Die allgemeine Aufgabe sey diese: Wenn zwey Linien der Lage nach gegeben sind, zwischen ihnen eine gerade, der Größe nach gegebene, Linie so zu legen, daß sie nach einem gegebenen Puncte gerichtet sey (νευουσαν). Unter den besondern Aufgaben sind einige ebene, einige körperliche, einige linearische (γραμμικα). Die letztern sind solche, welche weder durch den Kreis, noch vermittelst Kegelschnitte aufgelöset werden können, sondern höhere Curven erfordern (Th. I. S. 227.). Von den ebenen Aufgaben führt Pappus folgende an. Gegeben ein Halbkreis und eine auf dessen Grundlinie senkrechte gerade; oder gegeben zwey Halbkreise, deren Grundlinien auf derselben geraden Linie liegen: zwischen ihnen eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem Winkel des Halbkreises gerichtet sey. Ferner: Gegeben ein Rhombus, dessen eine Seite verlängert worden, in desselben äußern Winkel eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie nach dem entgegengesetzten Winkel gerichtet sey. Auch dieses: in einem der Lage nach gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe.

Dieſe Aufgaben, außer die zweyte, waren in dem erſten Buche des Apollonius abgehandelt. In dem zweyten Buche kam nur eine einzige Aufgabe vor, die von zwey Halbkreiſen. Apollonius ſcheint ſich auf den Fall eingeſchränkt zu haben, da die gerade Linie durch den einen Endpunct des Durchmeſſers eines der beiden Kreiſe geht. Pappus rechnet in ſeinem Verzeichniſſe der Schriften zur geometriſchen Analyſis die Schrift von den Richtungen noch zu der Analyſis ebener Örter. In ſeinen Hülfsſätzen (Lemmatibus) zu dieſer Schrift kommen nur ſolche Fälle von zwey Halbkreiſen vor, da die gerade Linie durch einen Endpunct des Durchmeſſers geht. Dieſe Lemmata ſind in dem 7. Buche ſeiner mathematiſchen Sammlungen von Prop. LXV bis XCV. enthalten.

Die Aufgabe von dem Rhombus iſt in Th. I. S. 118 aufgelöſet.

Die Aufgabe in dem zweyten Buche des Apollonius wird durch die Algebra leicht aufgelöſet. Es ſeyn (Fig. 81.) über AB und CD auf derſelben geraden AD zwey Halbkreiſe AEB, CGD beſchrieben. Durch den Endpunct D des Durchmeſſers CD ſoll an den Halbkreis AEB die gerade DE ſo gezogen werden, daß das zwiſchen beiden Halbkreiſen auf derſelben abgeſchnittene Stück FG eine gegebene Größe habe.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte H des Halbkreiſes AEB die ſenkrechte HK auf DE, welche EF in K halbirt. Dadurch iſt DK das arithmetiſche Mittel zwiſchen DE und DF, alſo ihrer halben Summe gleich. Ferner iſt, nach einer Eigenſchaft des Kreiſes, $AD \times BD = DE \times DF$. Noch ziehe man CG, ſo iſt der Winkel CGD ein Rechter, und $DC : DH = DG : DK$, oder $DC \times DK = DG \times DH$. Aus dieſen Verknüpfungen der Größen kann man leicht eine Gleichung für DE oder DF oder DG herleiten. Man ſetze $AB = a$; $CD = b$; $BC = c$; $FG = d$; $DF = x$, und zur Abkürzung $a + b + c = f$; $b + c = g$, ſo

ist $DE = \frac{fg}{x}$; $DK = \frac{1}{2}\left(\frac{fg}{x} + x\right)$,

$DG = x + d$, und

$$b(fg + xx) = (2f - a)(xx - dx),$$

oder

$$(f + c)xx - (f + g)dx = bfg.$$

Dieselbe Gleichung wird erhalten, wenn $DE = x$, und $EG = d$ gesetzt werden.

In beiden Fällen, es mag FG oder EG die gegebene d seyn, ist der Werth derselben zwischen gewissen Gränzen eingeschränkt. Auch ist die negative Wurzel der Gleichung für die geometrische Auflösung nicht anwendbar. Diese schränkt sich auf den Fall ein, da das Verhältniß, $x^2 + fg : xx - dx$, oder $2DK : DG$, ein gegebenes, nämlich $2DH : DC$ ist, da die arithmetische Auflösung auch den Fall begreift, daß $xx + fg : xx + dx$ dasselbe Verhältniß sey.

Incommensurabel ist ein Verhältnißbegriff, wodurch angezeigt wird, daß zwey Größen kein gemeinschaftliches Maaß haben, so klein dieses auch genommen werden mag. Dergleichen Größen sind die Seite eines Quadrats und dessen Diagonale; alle Potenzen in ganzen Zahlen und ihre Wurzeln, wenn die letztern sich nicht unter den ganzen Zahlen finden; und viele andere Gattungen von Größen.

Incommensurabel in der Potenz sind nach Euklides (X. def. 4.) Größen, deren Quadrate kein gemeinschaftliches Maaß haben, im Gegensatze gegen Commensurabel in der Potenz, s. Commensurabel.

Incomplexe Größe ist eine solche, die aus keinen besonders angezeigten Theilen durch Addition und Subtraction zusammengesetzt, und durch ein solches Symbol, als a, x, bezeichnet wird. Auch nennt man benannte ganze Zahlen z. B. 16 Pfund, 30 Rthlr. eine **uncomplexe Größe**, hingegen die mit Bruchtheilen

vergesellschafteten complexe, als 16 Pfund 12 Loth 2 Qu.

Increment, die endliche Veränderung einer veränderlichen Größe, sie mag additiv oder subtractiv seyn. In England ist diese Benennung gewöhnlich; auf dem Continent nennt man die Veränderungen Differenzen, s. Differenzenrechnung.

Indeterminatum, das unbestimmte, heißt erstlich eine veränderliche Größe in einer Reihe von Größen, deren Form entweder bestimmt ist, oder selbst diese unbestimmt gelassen wird, nur daß sie für alle Größen der Reihe dieselbe ist.

Zweytens, eine Aufgabe heißt unbestimmt, wenn sie unendlich viele Auflösungen zuläßt; auch wenn sie durch eine gewisse Bedingung eingeschränkt wird, insbesondere auf rationale, ganze oder gebrochene Werthe der unbestimmten Größe. Eine Aufgabe kann bestimmt seyn, und doch mehrere Auflösungen zulassen, da es die Natur der Gleichungen mit sich bringt, daß sie, nach ihrem Grade, mehrere Wurzeln haben. S. unbestimmte Analytik.

Drittens die Methode des undeterminirten ist diejenige, da man bloß die Form der gesuchten Gleichung bestimmt, die Werthe der unveränderlichen Coefficienten aber unbestimmt läßt, und sie nur vorläufig durch Buchstaben bezeichnet. Aus andern Gleichungen zwischen den Größen, deren Verbindung untersucht wird, leitet man mit Hülfe jener Gleichung eben dieselbe her, worin aber die Coefficienten aus den undeterminirten in der angenommenen Gleichung und gegebenen Größen zusammengesetzt werden. Beide sind identisch dieselben, und dadurch erhält man für die undeterminirten Coefficienten Gleichungen zu ihrer Bestimmung, wie in dem Artikel, Identisch, gezeigt worden ist. Am häufigsten wird diese Methode gebraucht, um den Werth einer veränderlichen Größe aus einer nicht gesonderten Gleichung herauszuziehen, oder Reihen umzukehren.

Descartes wird als der Erfinder dieser Methode angesehen. In dem zweyten Buche seiner Geometrie zeigt er, wie Normalen an eine Curve zu ziehen sind. Hier muß in einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Grössen y, und v die letztere durch die gegebenen Größen und durch y so bestimmt werden, daß y zwey gleiche Werthe erhalte. Nun nimmt Descartes zwey Factoren an, I. $yy - 2ey + ee$; II. $y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$, wo f, g, h, k die zu bestimmenden Größen sind. Das Product setzt er der gegebenen Gleichung gleich, so giebt die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten die Werthe jener vier Größen, und den Werth von v durch gegebene Größen und durch e, das ist durch y.

Index ist bey Logarithmen dasselbe, was die Kennziffer oder Charakteristik derselben heißt, s. Logarithmen.

Auch wird bisweilen dieses Wort für Exponent einer Potenz gebraucht.

In der combinatorischen Analysis enthält der Index oder der Zeiger die zu combinirenden Elemente mit ihren Stellenzahlen.

Indivisibilia, s. Cavaleri's Methode des Untheilbaren.

Inexplicabilis functio, s. Facultät und Function.

Infinitesimal-Rechnung, s. Unendlich.

Inhalt einer Fläche oder eines Körpers ist ein Verhältnißbegriff, wodurch die Größe der Fläche oder des Körpers in Vergleichung mit einer gegebenen Fläche oder einem gegebenen Körper ausgedruckt wird. Diese dienen bey praktischen Rechnungen als Einheit; in allgemeinen Vergleichungen werden sie unbestimmt gelassen. Man vergleicht z. B. ein Rechteck mit einem andern mittelst ihrer Seiten, einen Kreis mit dem Quadrat des Halbmessers, einen paraboliſchen Abschnitt mit einem Dreyeck über derselben Grundlinie mit derselben Höhe, eine Kugel

mit dem Würfel ihres Durchmessers oder mit einer andern Kugel. Dieses geschieht entweder nach Art der Alten bloß durch Zusammensetzung der Verhältnisse, oder durch Rechnungsformeln, worin das Product zweyer Linien das Rechteck von denselben, das Product dreyer ein senkrechtes Parallelepipedum mit diesen drey Linien als Seiten bedeutet. Bey der praktischen Anwendung wird eine ostensible Einheit für die Längen angenommen, die man Fuß, Ruthe, Toise u. dergl. nennt. Daraus ergeben sich die Einheiten für die Flächen und Körper, nämlich Quadratfuß, oder Quadratruthe, u. dergl. Cubikfuß, Cubikruthe, u. dergl. Oft ist es bequem, zur Einheit eine Größe zu nehmen, die mit ihr gleichnamig ist; z. B. eine Kreisfläche durch eine andere solche als Einheit auszudrucken; einen Cylinder oder cylinderartigen Körper durch einen Cylinder zu messen, dessen Höhe und Durchmesser sich gleich sind, wie bey dem Visiren der Fässer; eine Kugel mit einer andern Kugel von gegebener Größe zu vergleichen, wie in der Artillerie geschieht, wo die zur Einheit genommene Kugel ein bestimmtes Gewicht hat.

Instrumentale Arithmetik ist die Ausführung numerischer Rechnungen durch technische Hülfsmittel.

Die Alten, welche die Zahlen nicht dem System ihrer Vertheilung in Classen gemäß bezeichneten, waren mehr als wir eines mechanischen Hülfsmittels bedürftig, welches dasselbe leistete, was uns unsere Ziffern leisten. Die Römer waren besonders in diesem Falle, da ihre Bezeichnungsart für die Zahlen die allerunbequemste ist. Sie gebrauchten einen Abacus, eine Rechentafel, worauf sie die verschiedenen Einheiten durch Merkzeichen von einander unterscheiden konnten. Marcus Welser, ein Augsburger Patrizier, hat einen solchen Abacus gehabt, den er in einem Briefe an Lipsius beschreibt. (Marci Velseri Opera, Norib. 1682. pag. 819.) Er war von Metall, und hatte acht längere und acht kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in gerader Linie. In

den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der längern fünf Stück, in den übrigen vier, in den kürzern eines. Die längern Einschnitte waren bezeichnet mit ⊖.I.X.C.∞ CCIↃↃ. CCCIↃↃↃ. I↞I.

Der Gebrauch dieser Rechentafel ist leicht einzusehen. Die Stifte oder Knöpfchen in den längern Einschnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Klasse, die einzelnen Knöpfe galten 5 solcher Einheiten. Der mit ⊖ bezeichnete Einschnitt enthielt die asses, die übrigen die uncias oder sextertios, Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. In dem erstern Einschnitte konnte man bis 11 bemerken, und wenn noch mehrere dazu kamen, statt 12 daselbst 1 in dem Einschnitt I. angeben. In den folgenden 7 Einschnitten konnte man bis 9 Einheiten in jeder Classe von den Einern bis zu Millionen bezeichnen, wenn man die Knöpfe von dem untern Ende eines Einschnittes bis zu dem obern verschob, um sie dadurch zu bedeutenden Zahlzeichen zu machen. So zeigten 2 verschobene Knöpfe in einem längern Einschnitte, und der einzelne in dem zugehörigen kürzern fortgerückte die Zahl 7 in der zugehörigen Classe an. Neben dem längern Einschnitte für die asses finden sich noch drey kleine, mit zwey oder einem Knöpfchen, und gewissen Beyzeichen. Vermuthlich dienten sie zu einer Bruchrechnung.

Die Chineser bedienen sich eines ähnlichen Instruments zum Rechnen, nur daß sie knöcherne oder elfenbeinerne Kügelchen auf Drathsaiten gezogen gebrauchen. Ihre Rechentafel hat eine Scheidung jenseits der Mitte. Die zwey Kügelchen, die in der kleinern befindlich sind, gelten jedes 5, die in der größern jedes Eins in seiner Classe. Sie rechnen, wie du Halde bezeugt, mit den Kügelchen so geschwind, daß ein Europäer mit der Zifferrechnung es ihnen nicht gleich thun würde.

Im sechszehnten Jahrhundert rechnete man in Deutschland häufig auf gleiche Art mit Rechenpfennigen, welche man auf parallele Linien und in die Zwischenräume legte. Die erstern bedeuteten die Einheiten in der Classe

der Einer, der Zehner u. s. f. nach der Reihe, die in den Zwischenräumen bedeuteten je fünf dieser Einheiten. Die Rechenbücher damahliger Zeit führen gewöhnlich den Titel, Rechenbuch auf der Linie und Feder, oder auf Linien und mit Ziffern. Zu Geldrechnungen bekamen die kleinen Münzsorten als Groschen und Pfennige, neben der Hauptsorte, ihre besondere Abtheilung. Adam Riese, im 16ten Jahrh., der noch in ganz neuen Zeiten als ein braver Rechenmeister bekannt geblieben ist, sagt in seiner Rechnung auf der Linie und Feder, Frankfurt 1544, zweyte Ausg., er habe in Unterweisung der Jugend befunden, daß alle, die auf den Linien anheben, das Rechnen fertiger erlernen, als wenn sie mit den Ziffern, die Feder genannt, anfangen. Auf den Linien schöpften sie einen bessern Grund, und möchten alsdann mit geringer Mühe auf den Ziffern ihre Rechnung vollbringen.

Leupold erzählt in seinem Schauplatze der Rechen- und Meßkunst (Leipzig 1727), daß er in seiner Jugend noch einige Verwalter und Beamte auf den Linien habe rechnen sehen. Zu Dechales Zeiten (Mundus mathematicus, 1674.) war die Rechnung auf Linien bey den Kaufleuten in Frankreich sehr in Gebrauch.

Neper, der durch die Erfindung und Anwendung der Logarithmen sich so verdient gemacht hat, hat auch ein nützliches Erleichterungsmittel für gemeine Rechnungen durch seine Rechenstäbe geliefert. Sie enthalten, wie bekannt genug ist, die Vielfachen der einzelnen Ziffern bis zum Neunfachen, so daß die Einer unter der Diagonale jedes Faches zur Rechten, die Zehner aber über derselben zur Linken stehen. Man kann also von jeder Zahl sich ganz leicht eine Tabelle ihrer Vielfachen bis zum Neunfachen (einen Rechenknecht) zusammensetzen, welchen man bey der Multiplication und noch mehr bey der Division oft gut benutzen kann, besonders wenn ein Multiplicandus oder ein Divisor mehrmals angewandt werden. Z. B. das 6fache der Zahl 47-3897 erscheint auf den neben einander gelegten, mit den Ziffern dieser Zahl bezeichneten, Stäben folgendergestalt:

2 4 1 4 5 4
4 2 8 8 4 2

woraus man leicht das 6fache dekadisch geordnet abschreibt, nämlich 2 8 4 3 3 8 2.

Neper hat sein Rechnungs-Hülfsmittel für werth gehalten, es in einer besondern Schrift zu beschreiben: Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo: Cum appendice de expeditissimo multiplicationis promtuario. Quibus accessit et Arithmeticae localis liber unus. Authore et inventore Io. Nepero, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi 1617. 154 S. gr. 12. Es sind davon zwey Nachdrücke gemacht, eine italiänische Übersetzung zu Verona 1623, und zwey deutsche, 1619 und 1623. Ob die letztern vollständig sind, kann ich nicht sagen. Das auf dem Titel angezeigte Promtuarium ist eine kunstreiche, aber umständliche Stäbchenrechnung. Auf langen schmalen Platten sind die Vielfachen der ersten neun Zahlen auf eine eigene Art in Quadraten mit 18 dreyseitigen Fächern, wiederholt vertheilt. Bey dem Gebrauch werden die ausgesuchten Platten neben einander, und darauf andere quer über gelegt, worauf bloß leere Fächer gezeichnet sind, von welchen einige ausgeschnitten worden. Nun erscheinen die Vielfachen des Multiplicandus durch die offenen Fächer eben so wie bey dem Gebrauche der gewöhnlichen Rechenstäbe. Die Arithmetica localis ist eine dyadische Rechnung mit Marken. Bey der Addition und Subtraction genügt ein bloßes Lineal; bey der Multiplication werden die Vielfachen nach dyadischer Ordnung auf die Felder eines wie ein Schachbrett eingetheilten Vielecks gelegt, und darauf summirt. In der ersten Reihe unten bedeuten sie die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, etc., in der zweyten das doppelte, in der dritten das vierfache, in der vierten das achtfache, u. s. f. Hier findet man den ältesten Gebrauch der Dyadik. Das kunstreiche Büchlein verdiente diese Anzeige, da Kästners Nachricht in der Geschichte der Mathematik, III. S. 95 zu unvollständig ist.

Die von Neper angewiesene Art, die Vielfachen einer Zahl zu finden ist schon in einem deutschen Rechenbuche aus dem 16ten Jahrhundert gelehrt. Es hat den Titel: Ein Newe vnd wol gegrundte vnderweysung aller Kaufmans Rechnung in dreien buchern mit schönen Regeln und Fragstucken begriffen. — Durch Petrum Apianum von Leysnick, der Astronomie zu Ingolstadt Ordinarium, verfertiget. Aufs new durchaus übersehen — vnd gebessert. Anno M.D.XLIII. Auf dem Bogen P sind zwey Multiplications-Exempel völlig nach dem Verfahren mit den Neperischen Stäben vorgestellt. Die Vielfachen der Ziffern in dem Multiplicandus stehen in Quadraten unter jeder Ziffer, durch eine Diagonale gesondert. Nur nimmt Apian keine beweglichen Stäbe, und setzt bloß die Vielfachen durch die Ziffern des Multiplicators unter einander. Auch sagt er: Nicht von nutz oder von kürtz wegen, hab ich diese zwo nachfolgende figuren der Multiplication gesetzt, sondern allein von wegen der fürwitzigen Schüler, das sie domit jre köpff spitzen. — Man ist in Deutschland Neptrn mit seiner Stäberechnung bennahe so zuvorgekommen, wie der Schweitzer Jost Byrg mit seinen Logarithmen, die freylich noch nicht die bequeme Anwendbarkeit hatten, welche Neper schon den seinigen gab.

Caspar Schott hat die Rechenstäbchen in cylindrische verwandelt, und auf jedem Cylinder die Vielfachen der Zahlen 1 bis 9 und der 0 verzeichnet. Die Cylinder liegen in einem Kästchen neben einander, und sind auf Zäpfchen durch ein äußeres Knöpfchen beweglich, so daß alle Vielfachen der Ziffern in dem Multiplicandus zum Vorschein gebracht werden können.

Leupold hat die Vielfachen der Ziffern nach Art der Neperischen Stäbchen auf die schmale Seite vieleckiger oder runder Scheiben getragen, welche auf eine Achse gesteckt und in ein Kästchen eingeschlossen werden. Jede ist für sich beweglich, und kann durch einen Stift unbeweglich gemacht werden. Er hat diese Einrichtung in seinem Theatro arithm. beschrieben. Daselbst ist §. 35.

noch eine, wie es scheint künstliche, mechanische Verbindung der Neperischen Stäbchen aus dem Iournal des Scavans, 1678. p. 170. beschrieben. Ihr Erfinder heißt Grillet.

Reyher, Professor der Rechte in Kiel, hat im Jahr 1688 in einer deutschen und einer lateinischen Schrift gezeigt, wie die Vielfachen der Zahlen von 1 bis 60 nach der Sexagesimal-Abtheilung auf Stäbchen getragen werden, zur Nachahmung der Neperischen Stäbe. Ein Holsteinischer Edelmann, von Qualen, hat es zuerst angegeben.

Die künstlichsten Hülfsmittel zum Rechnen sind die Rechenmaschinen, welche nur das Stellen der Ziffern in den aufgegebenen Zahlen, und bloßes Drehen erfordern. Die erste dieser Art ist eine von Pascal erfundene, als er erst 19 Jahre alt war. Sie ist in dem Recueil des machines approuvées par l'Académie des Sciences abgebildet und beschrieben, allein so dunkel, daß, wie der Verfasser des Artikels, Machine arithmétique, in der Encyclopédie méthodique (Diderot) sagt, es fast so schwer ist, diese Beschreibung zu verstehen, als eine solche Maschine zu erfinden. Die Beschreibung in dem gedachten encyklopädischen Wörterbuche ist auch schwer zu verstehen, wenigstens in dem italiänischen Nachdruck, wo die Figuren nicht zu der Beschreibung passen.

Im Jahr 1725 ist eine Rechenmaschine von l'Epine verfertigt, die einfacher ist, als die von Pascal erfundene, und als andere, die derselben nachgeahmt waren. Sie ist in der gedachten Sammlung von Maschinen befindlich, wo noch eine andere von Boitissendeau beschrieben ist. Die Akademie urtheilt von beiden rühmlich.

Leibnitz bemerkte einige Unvollkommenheiten an der Pascalschen Rechenmaschine, und sann auf eine neue Einrichtung. Diese zeigte er schon im Jahr 1673 der Londoner Societät vor, und als er ihr noch Verbesserungen gegeben hatte, der Pariser Akademie der Wissenschaften, von der sie mit Beyfall aufgenommen ward. Das Äußere und das Verfahren bey dem Gebrauche hat Leibnitz

in den Miscellaneis Berol. a. a. 1709 beschrieben und mit einer Abbildung erläutert. Er ist aber doch mit seiner Rechenmaschine nie völlig zu Stande gekommen, ob er gleich einige tausend Thaler, ja nach Einiger Angaben 24000, daran gewendet hat. Da er selbst kein Mechanikus, und wie es scheint, auch ein schlechter Zeichner war, so mochte er sich den Künstlern nicht gehörig verständlich machen können. Er hat, wie Leupold an dem a. O. erzählt, seine Maschine an einen geschickten Mechanikus, M. Teubert in Zeitz, geschickt, daß dieser versuchen sollte, sie völlig in Stand zu setzen. Da aber nach Leibnitzens Tode die Erben dazu kein Geld hergeben, selbst den Vorschuß jenes Mannes nicht vergüten wollten, so ist das Werk ganz liegen geblieben. Ein Exemplar der Maschine, aber nicht vollendetes, ist vor diesem in Hannover auf der königlichen Bibliothek befindlich gewesen, und hernach nach Göttingen geschickt. Ich erinnere mich, da ich sie in Göttingen gesehen habe, daß die Getriebe ungleich lange Triebstecken, wie die Ordinaten an einer cylindrischen Spirale, hatten, um die Räder mittelst ihrer Stifte oder Zähne mehr oder weniger zu drehen. Kästner hat eine Beschreibung derselben zu Pütters akademischen Gelehrtengeschichte der Georgaugustus-Universität geliefert. Eine kurze Nachricht giebt derselbe in seiner Fortsetzung der Rechenkunst S. 568. ff. Das göttingische Exemplar ist vollständiger als das von Leibnitz selbst in den Misc. Berol. beschriebene, welches auch in Leupolds Theater angeführt ist. In der Sammlung der Leibnitzischen Werke, Th. III. N. 74. ist die Beschreibung aus der Berliner Sammlung eingerückt.

Polenus, Professor zu Padua, der durch Nachrichten von Pascals und Leibnitzens Rechenmaschinen gereitzt wurde, über die Einrichtung eines solchen Werks nachzudenken, erfand eine andere, die er in seinen Miscellaneis, Venet. 1709. bekannt machte. Leupold hat die Beschreibung in sein Theater eingerückt. Sie hat mehrere Gewichte, und ein Pendel gleich einer Uhr, scheint aber wegen ihrer Größe unbequem zu seyn.

So ward auch Leupold, da er sein Verlangen, den Bau einer Rechenmaschine zu sehen, nicht befriedigen konnte, dadurch veranlaßt, selbst eine zu erfinden, die er in dem mehrmals angeführten Werke beschreibt, und auch nach ihrer Einrichtung abbildet. Sie hat im Äußern manches Ähnliche mit der Müllerischen, wovon unten Nachricht ertheilt wird.

Der wirtembergische Pfarrer Hahn hat eine Rechenmaschine erfunden, vermittelst welcher man bis 100 Millionen in den vier Species rechnen kann. Eine Beschreibung des Äußern dieser Maschine ist in dem deutschen Merkur, May 1779, anzutreffen. Ein Exemplar besitzt der Leibmedicus Beireis in Helmstädt.

Der Hessen-Darmstädtische Ingenieur-Hauptmann Müller erfand eine Rechenmaschine, deren Beschreibung 1786 herausgekommen ist, mit einer Abbildung des Äußern begleitet. Der Gebrauch ist sehr deutlich gezeigt. Sie muß eine sehr einfache Einrichtung haben. Es sind viele Proben damit gegen Rechnungen mit Ziffern von einem sehr fertigen Rechner angestellt. Bey kleinen Exempeln ward der Rechner etwas eher fertig als die Maschine, bey großen aber ist die Maschine schneller. Wenn die Zeit aller berechneten Exempel (an der Zahl 103), vom größten bis zum kleinsten, zusammen addirt wird, so ist die von dem Rechner zugebrachte Zeit 4 St. 32 Min. 49. Sec., mittelst der Maschine aber nur 2 St. 50 Min. 23 Sec. In jener Zeit ist die auf der Probe der Rechnung zugebrachte Zeit mit begriffen. Die Maschine kann Resultate bis zu 14 Ziffern liefern. Sie kann auch zu Rechnungen mit benannten Zahlen verschiedener Sorten angewandt werden. In derselben ist ein Warnungsglöckchen angebracht, welches anzeigt, wenn bey dem Gebrauche ein Versehen gemacht ist. Es sind auch noch einige Vorrichtungen vorhanden, wodurch mögliche fehlerhafte Behandlungen verhütet werden. Eine Vergleichung der Müllerschen und Hahnischen Maschine ist in dem Göttingischen Magazin herausgegeben von Lichtenberg und G. Forster III. Bd. 5s. St. anzutreffen.

Hahn suchte die Vorzüge seiner Maschine vor der Müllerischen zu zeigen im deutschen Merkur, Jun. 1785. Müller hat den Bau der seinigen und ihre Wirkungen der Göttingischen Societät der Wissenschaften gezeigt, wovon die Götting. gel. Anz. 1784. St. 120. Nachricht ertheilen.

Lambert hat in seiner Jugend, da er Pascals Rechenmaschine erwähnt gefunden hatte, auch eine erdacht, von der aber weiter nichts bekannt geworden ist. Diese Anzeige ist aus Lamberts gelehrtem Briefwechsel, II. S. 12.

Rechenmaschinen sind ohne Zweifel zu großen Rechnungen, oder zur Prüfung solcher sehr brauchbar, vorausgesetzt, daß sie zuverläßig sind, und auch nicht leicht durch fehlerhafte Behandlung unrichtige Resultate geben können. Müller empfiehlt seine Maschine besonders zur Verfertigung weitläuftiger Tabellen, wozu sie sehr geschickt sey.

Rechnungen mittelst einiger Maaßstäbe zu vollführen, zeigte Michael Scheffelt in einer deutschen Schrift, betitelt: Pes mechanicus artificialis, oder Maaßstab, auf welchem alle Proportiones der ganzen Matheseos ohne mühsames Rechnen, allein durch Hülfe eines Handzirkels gefunden werden. Ulm. 1699 in 4. Es sind acht Maaßstäbe, für die Längen unmittelbar, für ihre Quadrate, Würfel, Kreisflächen, für die Chorden der Winkel, die Sinus, die Tangenten und für die Logarithmen. Die letztere heißt die arithmetische Linie. Die Längen selbst verhalten sich wie die Mantissen in den Logarithmen der beygezeichneten Zahlen. Dadurch dient dieser Maaßstaab zum Multipliciren und Dividiren. Auf ähnliche Art sind die andern Maaßstäbe bezeichnet. Der quadratische giebt die Größe der Quadrate der darauf getragenen Längen, der cubische ihre Würfel an, u. s. f. Es braucht nicht erinnert zu werden, daß ein solcher Maaßstab wenig Genauigkeit gewährt; für Handwerker und ungeübte Mechaniker könnte er nützlich seyn, für welche auch der Verfasser dieses Instrument insbesondere bestimmt hat. Es ist viel wolfeiler als der Proportionalzirkel.

Eine von Grüſon im Jahr 1791 verfertigte Rechenmaſchine, oder vielmehr Rechenſcheibe, enthält auf den Sectoren eines Kreisringes die Vielfachen der Zahlen 2 bis 9 in der Richtung eines Halbmeſſers, und darunter die Summen jedes Vielfachen und der Zahlen 1 bis zu der vervielfachten Zahl weniger Eins, d. i. wenn n eine der Zahlen 2 bis 9 iſt, die Producte 1n bis 9n, darunter die Summen n + 1 bis 9n + 1, darunter die Summen n + 2 bis 9n + 2, u. ſ. f. zuletzt die Summen 2n — 1 bis 10n — 1. Man kann dieſe Rechenſcheibe bequem in ein Rechteck verwandeln.

Eine aus papiernen Scheiben zuſammengeſetzte, ſogenannte machina arithmetica portatilis gab Prahll in Kupfer geſtochen heraus, wovon in den Götting. gel. Anzeigen 1790. St. 104. Nachricht zu finden iſt.

Integral iſt eine Function einer veränderlichen Größe oder mehrerer in Beziehung auf ein gegebenes Differential, das aus jener Function entſteht, z. B. x^m iſt das Integral von $mx^{m-1}\partial x$; oder $\sqrt{(aa+xx)}$ von $\frac{x\partial x}{\sqrt{(aa+xx)}}$; und ax^2+by^2+cxy von $(2ax+cy)\partial x+(2by+cx)\partial y$.

Da eine Differentialgleichung aufs neue wieder differentiirt werden, und dieſes noch mehrere mahle geſchehen kann, ſo kann ein Integral noch Differentiale enthalten. Nämlich das Integral eines Differentials vom zweyten Grade enthält Differentiale vom erſten Grade, ſo daß das Integral immer Differentiale enthält, die einen Grad niedriger ſind, als die in der Differentialgleichung, worauf ſich das Integral unmittelbar bezieht. Doch iſt Integral ſchlechtweg die endliche Function, worauf man durch die ſucceſſiven Integrationen kommt.

Ein Integral wird in Beziehung auf das zugehörige Differential durch das dieſem vorgeſetzte $\int$ bezeichnet, z. B. $\int x^m\partial x = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$; oder $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(aa+xx)}}$

$V(aa+xx)$; oder $\int(2ax+cy)\partial x+\int(2by+cx)\partial y = ax^2+by^2+cxy$; oder $\int \sin\varphi.\partial\varphi^2 = -\cos\varphi.\partial\varphi$; oder $\int e^x\partial x^2 = e^x\partial x$. Diese Bezeichnung vertritt die Stelle der endlichen Function, wenn das Integral noch erst zu finden ist, oder nicht vollständig ausgedruckt werden kann, auf ähnliche Art, wie $\sqrt[m]{a}$ die mte Wurzel aus a vollständig anzeigt, insbesondere bey allgemeinen Formeln, wenn die Function, die in ein Differential multiplicirt ist, unbestimmt gelassen wird. So bezeichnet $\int X\partial x$ den Flächeninhalt zwischen zwey Ordinaten einer Curve, des zwischen ihnen liegenden Stücks der Abscissenlinie und des Bogens der Curve, da X die Ordinate als Function von x bedeutet.

Das Integral, $\int X\partial x$, ist die veränderliche Größe, auf deren Differential sich das Differential von x bezieht. Wenn in der Rechnung, wodurch jene Größe gefunden wird, dieselbe, auch nicht durch ein besonderes Symbol bezeichnet wird, so muß man doch in Gedanken immer eine Function y setzen, von der Beschaffenheit, daß $\frac{\partial y}{\partial x} = X$ sey. Denn ein Differential ist keine selbstständige oder absolute Größe, sondern hat nur einen relativen Werth in Vergleichung mit andern Differentialen. S. Th. I. S. 812.

Das Zeichen $\int$ deutet ursprünglich auf eine Summe. Allein ein Integral ist keine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen, da Differentiale für sich allein genommen keine Quantität haben. Das Zeichen rührt von Leibnitz her, s. Th. I. S. 843. Es wäre schicklicher der Buchstab *J* dafür gewesen, den Johann Bernoulli anfangs gewählt hatte, wie man aus dem Commercio phil. et mathem. Leibnitii et Bernoullii sieht. Aus Gefälligkeit gegen Leibnitz nahm er die Bezeichnung durch $\int$ an.

Wenn der Werth eines Integrals gefunden ist, sofern daraus das Differential entsteht, so ist noch eine

Constante zuzusetzen, weil bey der Differentiation der unveränderliche Theil in einer Function wegfällt, oder man muß sich versichern, daß die Constante Null sey. Ihr Werth wird dadurch bestimmt, wenn man den Werth des Integrals für einen gewissen Werth der veränderlichen Größe bestimmen kann. Der leichteste und häufigste Fall ist, da ein Integral $y = o$ ist, wenn die dazu gehörige $x = o$ genommen wird.

Integrale höherer Differentiale enthalten mehrere Constanten. Ist das Differential vom zweyten Grade, so kommt in das erste Integral eine Constante, und in das zweyte noch eine. So viel successive Integrationen, so viele Constanten.

Ein negatives Integral bedeutet, daß der absolute Werth von einer Constante abzuziehen ist. Wenn nämlich X eine Function von x ist, so haben X und $C - X$ einerley Differentiale in Beziehung auf ∂x, nur entgegengesetzte; also ist, wenn bey einem positiven ∂x das Integral von ∂X negativ ist, dieses $= C - X$.

Ein vollständiges Integral ist dasjenige, worin die gesuchte Function in ihrer ganzen Ausdehnung mit einer willkührlichen Constante dargestellt wird. Ein particuläres Integral ist dasjenige, worin die Constante auf eine gewisse Weise bestimmt worden ist. So erklärt sich Euler in den Instit. Calc. integr. §. 36. Aber ebendas. §. 540. schränkt er die Bedeutung des Ausdrucks, particuläres Integral, darauf ein, daß es eine solche Relation der veränderlichen Größen sey, welche der gegebenen Differentialgleichung Genüge thut, ohne eine neue Constante zu enthalten, doch müsse es in dem vollständigen Integral enthalten seyn. Jene erstere Erklärung ist vorzuziehen, da sie diese andere auch in sich begreift, wenn nämlich die zugefügte Constante $= o$ genommen wird. Diese andere kann zu einem Mißverstande Anlaß geben. Es giebt Differentialgleichungen, die durch eine gewisse Relation der veränderlichen Größen erfüllt werden, ohne eine willkührliche Constante, und ohne daß diese Relation für ein Integral der Gleichung gehalten

werden kann. Euler erinnert dieſes allerdings, und hat das 4te Kap. der 2. Section im 1. Theile der Unterſuchung gewidmet, wie man beſtimmen möge, ob eine gefundene Relation, die der Differentialgleichung Genüge thut, zugleich ein wahres particuläres Integral iſt, ohne daß man das vollſtändige Integral kennt.

Eine Differentialgleichung kann nämlich in zwey Theile zerfallen, deren jedem durch eine gewiſſe Function von x und y Genüge geſchieht, ohne daß dieſe die eigentliche Integralgleichung iſt. Oder die endlichen Differentialfactoren der Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = o$, können einen gemeinſchaftlichen Factor haben, der alſo, wenn $a = o$ geſetzt wird, die Gleichung erfüllt. Oder in der urſprünglichen endlichen Gleichung, $V = o$, werde eine der darin enthaltenen unveränderlichen Größen a, als eine veränderliche behandelt, ſo daß dadurch die Differentialgleichung werde, $P\partial x + Q\partial y + R\partial a = o$, wo R eine Function von a ſey. Setzt man hier $R = o$, ſo erhält man, wenn der daraus hervorgehende Werth von a in P und Q geſetzt wird, eine Differentialgleichung für x und y allein, deren Integral auch, bey gehöriger Beſtimmung der Conſtante der Gleichung $P\partial x + Q\partial y = o$ Genüge thut.

Z. B. die Gleichung

$x\partial x + y\partial y \pm \partial y\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)} = o$ zerfällt in zwey Theile, die durch die Annahme, $x^2 + y^2 - b^2 = o$, jeder Null werden. Die eigentliche Integralgleichung iſt, $x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = o$, und die einfachere Differentialgleichung iſt, $x\partial x - a\partial y = o$. Setzt man aus der endlichen Gleichung den Werth von a in die Differentialgleichung, ſo wird jene vorgegebene erhalten. Differentiirt man die endliche Integralgleichung, ſo daß a zugleich als veränderlich betrachtet wird, ſo erhält man $x\partial x - a\partial y - y\partial a - a\partial a = o$. Nimmt man $a + y = o$, und ſetzt für a ſeinen Werth in dem zweyten Terminus, ſo iſt $x\partial x + y\partial y = o$, alſo $x^2 + y^2 = \text{const.}$ Setzt man $\text{conſt.} = +b^2$, ſo iſt $x^2 + y^2 - b^2 = o$ die Function, welche der vorgegebe-

nen Gleichung genügt. Beide entstehen aus derselben endlichen Gleichung durch Elimination derselben Größe a.

Ein anderes Beyspiel ist die Gleichung,

$$y - ax - b\sqrt{(1+aa)} = 0.$$

Hieraus ist $\partial y - a\partial x = 0$, und aus beiden, durch Wegschaffung von a,

$$(xx-bb)\partial y - xy\partial x \pm b\partial x\sqrt{(xx+yy-bb)} = 0.$$

Dieser thut die Gleichung, $xx+yy-bb=0$, Genüge. Man findet diese Relation auch durch die Differentiation der endlichen Gleichung, wenn a veränderlich genommen wird. Nach dem gezeigten Verfahren ist $a = \frac{x}{\sqrt{(b^2-x^2)}}$,

wodurch wird $\partial y - \frac{x\partial x}{\sqrt{(bb-xx)}} = 0$, und

$y + \sqrt{(bb-xx)} = 0$, wenn die Constante der neuen Differentialgleichung Null gesetzt wird.

Man wird mit la Place und la Croix die Functionen, welche der Differentialgleichung Genüge thun, ohne in der eigentlichen Integralgleichung enthalten zu seyn, lieber particuläre Auflösungen nennen, weil sie nicht auf dem Wege der Integration aus der vorgegebenen Differentialgleichung gefunden werden.

Es möchte schicklicher seyn, anstatt vollständiges Integral zu setzen, allgemeines, weil dem Vollständigen dasjenige entgegensteht, woran etwas fehlt, dem Allgemeinen aber das besondere entgegen gesetzt wird. Wenn keine willkührliche Constante dem Integral beygefügt ist, ohne daß der Werth Null für die Constante ausdrücklich bestimmt wird, so möchte man es ein unvollständiges, und das mit einer Constante begleitete ein vollständiges nennen.

Clairaut hat in den Mém. de l'Ac. des Sc. 1734 die Bemerkung gemacht, daß es Differentialgleichungen gebe, welche man durch neue Differentiation integriren kann, daß aber die solchergestalt gefundenen Integrale nie unter den vollständigen begriffen sind, welche die gewöhnlichen Regeln der Integration geben. Hernach

haben sich die Analysten viel mit den besondern Auflösungen der Differentialgleichungen beschäftigt. Euler in den Schriften der Berliner Akad. 1756, und in dem Werke über die Integralrechnung, T. I. Sect. II. Cap. IV.; d'Alembert in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1769; allgemeiner Laplace in denselben 1772; Lagrange in den M. de l'Ac. de Berlin 1774, und in der Théorie des fonctions anal. nr. 69.; Trembley in den Schriften der Turiner Gesellschaft für 1790. 91. Man sehe auch Kästners Analysis des Unendl. S. 575.

Eine duplicirte Integralformel ist eine solche, die eine zweyfache Integration nach einander erfordert. Das dazu gehörige Differential hat die Form $Z\partial x\partial y$, worin Z irgend eine Function von x und y ist. Das Integral davon wird durch $\int\int Z\partial x\partial y$ bezeichnet. Bey der ersten Integration wird eine der veränderlichen Größen, sie sey x, als unveränderlich betrachtet, und die Integration bloß in Absicht auf die andere, y, vorgenommen. In diesem ersten Integral wird x allein veränderlich gesetzt, wenn nämlich x und y nicht von einander abhängen; die willkührlichen zuzusetzenden Functionen sind eine von x und eine von y. Wenn aber x und y in irgend einer Verbindung stehen, so muß das erste Integral so genommen werden, daß es alle Werthe von y begreift; und in der mit ∂x behafteten Differentialformel wird nun für y sein Werth durch x gesetzt, um sie in Beziehung auf x zu integriren. Euler hat von diesen Integralformeln eine Abhandlung in den Comm. novis Acad. Petr. T. XIV. geliefert, die in den 4. Theil der Integralrechnung eingerückt ist. Er gebraucht sie zu einigen künstlichen Cubirungen und Complanationen. Die Florentinische Aufgabe hat er dadurch auf einem von geometrischen Constructionen ganz befreyeten Wege, und sehr allgemein, aufgelöset. Bey der Rechnung über die Anziehung eines Körpers auf einen andern kommen auch triplicirte Integrale vor. Jedes Element eines Körpers mag als ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angesehen werden, dessen Seiten die Differentiale dreyer rechtwinklichten Coordina-

ten x, y, z sind, und der ganze Körper mag durch $\int\int\int \partial x \partial x \partial z$ bezeichnet werden, oder die anziehende Kraft desselben durch $\int\int\int V \partial x \partial y \partial z$, S. la Place Théorie du mouvement et de la figure des Planètes.

Joh. Bernoulli gebraucht auch das vervielfachte Integrationszeichen, aber in einer andern Bedeutung als die von Euler angenommene, in dem Commercio epistolico Leibnitii et Io. Bernoullii, T. I. p. 75. 76. Bey ihm ist $\int z = \frac{z^2}{1.2\partial z}$; $\int^2 z = \frac{z^3}{1.2.3\partial z^2}$; $\int^3 z = \frac{z^4}{1.2.3.4\partial z^3}$, u. s. f. wo ∂z constant ist.

Deutlicher und allgemeiner ist folgende Erklärung dieser Notation. Es sey Z eine Function von z, und $\int Z \partial z = P$; $\int P \partial z = Q$; $\int Q \partial z = R$, u. s. f. so ist $P \partial z = \partial z \int Z \partial z = \int Z \partial z^2$. Denn da ∂z constant ist, so kann man es, wie jede constante Größe, vor oder unter das Integralzeichen setzen. Folglich ist $\int\int Z \partial z^2$ oder $\int^2 Z \partial z^2 = Q$. Ferner ist $\int Q \partial z$, oder $\int^2 P \partial z^2$, oder $\int^3 Z \partial z^3 = R$, u. s. f.

Bernoulli betrachtet auch die Integrationen verschiedener Ordnungen als Differentiationen im entgegengesetzten Verstande in Beziehung auf die eigentlichen, und bezeichnet sie dem zu folge. Also ist $\partial^{-1} z = \int z$; $\partial^{-2} z = \int^2 z$; $\partial^{-3} z = \int^3 z$, u. s. f. Deutlicher: $\partial^{-1} z = \frac{\int z \partial z}{\partial z}$; $\partial^{-2} z = \frac{\int^2 z \partial z^2}{\partial z^2}$; $\partial^{-3} z = \frac{\int^3 z \partial z^3}{\partial z^3}$, u. s. f.

Integralrechnung ist die Methode, aus der gegebenen Relation der Differentiale zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen die Relation dieser Größen zu finden. Das Verfahren, wodurch man dazu gelangt, heißt die Integration.

Die Integralrechnung ist das Umgekehrte der Differentialrechnung, da die letztere aus der Relation der ver-

änderlichen Größen das Verhältniß ihrer Differentiale, es sey der ersten oder der höhern sucht. Jene aber ist schwer und noch unvollendet, diese ist leicht und mag als geschlossen betrachtet werden. Zu jeder Function kann man leicht ihr Differential in Beziehung auf die Differentiale der darin enthaltenen veränderlichen Größen finden; allein von jedem Differential läßt sich nicht das Integral angeben. Es ist hier, aber auf eine viel höhere Art, ein Fall, wie in der gemeinen Arithmetik mit den Irrationalzahlen. Nicht aus jeder Zahl läßt sich die Wurzel von einem gegebenen Grade vollständig angeben. Ja es können Differentialgleichungen so beschaffen seyn, daß gar keine Relation der veränderlichen Größen möglich ist, woraus jene entständen, und daß sie erst durch einen zugesetzten Factor eine Form erhalten, bey welcher ein reales Integral Statt hat.

Die Differentialgleichungen enthalten entweder nur zwey veränderliche Größen, oder mehrere. Dieses giebt zwey Hauptabtheilungen der Integralrechnung. Jede derselben enthält zwey Theile. In dem ersten wird die Integration solcher Differentialgleichungen gesucht, worin nur Differentiale vom ersten Grade vorkommen; in dem andern solcher, worin Differentiale vom zweyten Grade und höhern enthalten sind. Der erste Theil der ersten Hauptabtheilung ist bisher am vorzüglichsten bearbeitet worden; der zweyte Theil noch nicht hinlänglich. Die zweyte Hauptabtheilung aber, und insbesondere der zweyte Theil derselben, ist so schwierig, daß dasjenige, was darin geleistet worden, unbeträchtlich ist gegen dasjenige, was noch darin zu wünschen übrig bleibt.

Der erste Theil der ersten Hauptabtheilung enthält drey Abschnitte zu Folge der Beschaffenheit der dahin gehörigen Differentialgleichungen, zwischen zwey veränderlichen Größen x und y.

Erster Abschnitt. Die Differentialgleichung habe die Form, $\partial y = X \partial x$, wo X irgend eine Function von x ist. Dieser Abschnitt ist der leichteste, der in den deutschen Lehrbüchern beynahe nur allein vorgetragen wird.

Euler nennt den Ausdruck, worin eine Function von x mit dem Differential von x verbunden ist, eine Differential-Formel.

Zweyter Abschnitt. Die Differentialgleichung habe die Form $P\partial x + Q\partial y = o$, wo P und Q jede irgendwelche Functionen von x und y sind. Hier hat man noch keine allgemeine Methoden, sondern nur für besondere Fälle Auflösungen gefunden. Ist P bloß von x eine Function, und Q von y, so läßt sich die Integration durch die Methoden in dem ersten Abschnitte bewerkstelligen. Differentialgleichungen, worin die veränderlichen Größen und ihre Differentiale nicht gesondert sind, heißen insbesondere Differentialgleichungen.

Dritter Abschnitt. Die Differentialgleichung enthalte Potenzen von ∂x und ∂y, und Producte dieser Differentiale. Dieser Fall ist so schwierig, daß nur äußerst wenig bisher darin geleistet worden ist.

Der zweyte Theil der ersten Hauptabtheilung betrifft die Auflösung solcher Differentialgleichungen, worin nebst den veränderlichen x und y und ihren ersten Differentialen noch höhere vorkommen. Man setze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; $\frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial q}{\partial x} = r$; u. s. w., so ist hier die Frage, wie aus einer Gleichung zwischen x, y, p, q, r, etc. die Gleichung zwischen x und y gefunden werden möge.

Die zweyte Hauptabtheilung, worin Gleichungen mit mehr als zwey veränderlichen Größen behandelt werden, enthält die Rechnung mit partiellen Differentialen, wie man sie in Frankreich besonders zu nennen pflegt. Die Differentialgleichung sey diese: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = o$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z sind, so ist die Gleichung $P\partial x + Q\partial y = o$ eine partielle, weil nach derselben die veränderliche z als unveränderlich betrachtet wird. So auch die Gleichungen $P\partial x + R\partial z = o$, und $Q\partial y + R\partial z = o$. Es bedeute

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf x allein, und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf y allein, so enthält der erste Theil der zweyten Hauptabtheilung solche Aufgaben, worin eine gewisse Relation zwischen den Größen x, y, z, und $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ vorgelegt wird, um daraus eine Gleichung zwischen x, y, z allein herzuleiten.

In dem zweyten Theile kommen außer den Formeln $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch folgende Formeln $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial y}\right)$ in Rechnung, von welchen die erste bedeutet den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Beziehung auf x allein; die zweyte den für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Absicht auf y, oder welches dasselbe ist, den von $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ in Absicht auf x (zufolge Differentialgleichung 12); und die dritte Formel den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ wieder in Beziehung auf y allein. Nun sey eine Gleichung zwischen x, y, z, den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und den zuletzt angezeigten des zweyten Grades gegeben, so ist die aufzulösende Aufgabe, daraus eine Gleichung zwischen x, y und z allein herzuleiten. Dergleichen Aufgaben kommen in der höhern Mechanik und Hydrodynamik häufig vor, daher die Methoden zu ihrer Auflösung sehr wichtig sind.

Zu Gleichungen mit höhern Differentialen ist noch bisher keine Veranlassung gewesen.

Wenn die Functionen, welche durch die Integralrechnung gesucht werden, algebraisch nicht können dargestellt werden, so sind sie transscendente. Doch werden logarithmische und circulare Functionen mit den algebraischen fast für gleichgeltend genommen, weil man hier die zusammengehörigen Größen mittelst der Tafeln oder der entwickelten Formeln immer hinlänglich genau eine aus der andern bestimmen kann. Daher wird eine Integration für vollendet angesehen, wenn sie auf logarithmische oder circulare Functionen, es sey allein oder in Verbindung mit algebraischen gebracht ist.

Bey der Integration einer Gleichung von der Form, $\partial y = X \partial x$ läßt sich das Integral y oder die gesuchte Function von x oft nicht anders, als durch eine Reihe näherungsweise angeben. Diese Functionen mag man als algebraische irrationale betrachten. Die andern Differentialgleichungen, wenn sie nicht algebraische Integrale, oder auch circulare oder logarithmische haben, führen auf eigene Gattungen von transscendenten Functionen, deren Anzahl unbestimmbar bleibt.

Geschichte der Integralrechnung.

Es ist schwer eine Geschichte der Integralrechnung abzufassen. Die Methoden der Integrationen mit allen dazu gehörigen Untersuchungen sind theils in sehr vielen einzelnen Abhandlungen enthalten, theils in den Schriften über die höhere Geometrie, Mechanik und physische Astronomie zerstreut, woraus man die allmählige Ausbildung und Erweiterung der Methoden hervorziehen müßte. Dabey würde man nicht umhin können, sich auf die Rechnungen selbst etwas einzulassen, um zu zeigen, worin eine Entdeckung oder Erweiterung bestanden habe, wenn man auch sich nicht vornähme, den Leser von den Gegenständen zu unterrichten, sondern ihn deshalb auf gute Bücher verwiese. Hier möchte es manchmal schwer seyn, entweder nicht unverständlich oder nicht zu ausführlich zu wer-

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf x allein, und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf y allein, so enthält der erste Theil der zweyten Hauptabtheilung solche Aufgaben, worin eine gewisse Relation zwischen den Größen x, y, z, und $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ vorgelegt wird, um daraus eine Gleichung zwischen x, y, z allein herzuleiten.

In dem zweyten Theile kommen außer den Formeln $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch folgende Formeln $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial y}\right)$ in Rechnung, von welchen die erste bedeutet den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Beziehung auf x allein; die zweyte den für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Absicht auf y, oder welches dasselbe ist, den von $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ in Absicht auf x (zufolge Differentialgleichung 12); und die dritte Formel den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ wieder in Beziehung auf y allein. Nun sey eine Gleichung zwischen x, y, z, den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und den zuletzt angezeigten des zweyten Grades gegeben, so ist die aufzulösende Aufgabe, daraus eine Gleichung zwischen x, y und z allein herzuleiten. Dergleichen Aufgaben kommen in der höhern Mechanik und Hydrodynamik häufig vor, daher die Methoden zu ihrer Auflösung sehr wichtig sind.

Zu Gleichungen mit höhern Differentialen ist noch bisher keine Veranlassung gewesen.

Wenn die Functionen, welche durch die Integralrechnung gesucht werden, algebraisch nicht können dargestellt werden, so sind sie transscendente. Doch werden logarithmische und circulare Functionen mit den algebraischen fast für gleichgeltend genommen, weil man hier die zusammengehörigen Größen mittelst der Tafeln oder der entwickelten Formeln immer hinlänglich genau eine aus der andern bestimmen kann. Daher wird eine Integration für vollendet angesehen, wenn sie auf logarithmische oder circulare Functionen, es sey allein oder in Verbindung mit algebraischen gebracht ist.

Bey der Integration einer Gleichung von der Form, $\partial y = X \partial x$ läßt sich das Integral y oder die gesuchte Function von x oft nicht anders, als durch eine Reihe näherungsweise angeben. Diese Functionen mag man als algebraische irrationale betrachten. Die andern Differentialgleichungen, wenn sie nicht algebraische Integrale, oder auch circulare oder logarithmische haben, führen auf eigene Gattungen von transscendenten Functionen, deren Anzahl unbestimmbar bleibt.

Geschichte der Integralrechnung.

Es ist schwer eine Geschichte der Integralrechnung abzufassen. Die Methoden der Integrationen mit allen dazu gehörigen Untersuchungen sind theils in sehr vielen einzelnen Abhandlungen enthalten, theils in den Schriften über die höhere Geometrie, Mechanik und physische Astronomie zerstreut, woraus man die allmählige Ausbildung und Erweiterung der Methoden hervorziehen müßte. Dabey würde man nicht umhin können, sich auf die Rechnungen selbst etwas einzulassen, um zu zeigen, worin eine Entdeckung oder Erweiterung bestanden habe, wenn man auch sich nicht vornähme, den Leser von den Gegenständen zu unterrichten, sondern ihn deshalb auf gute Bücher verwiese. Hier möchte es manchmal schwer seyn, entweder nicht unverständlich oder nicht zu ausführlich zu wer-

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf x allein, und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für z in Beziehung auf y allein, so enthält der erste Theil der zweyten Hauptabtheilung solche Aufgaben, worin eine gewisse Relation zwischen den Größen x, y, z, und $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ vorgelegt wird, um daraus eine Gleichung zwischen x, y, z allein herzuleiten.

In dem zweyten Theile kommen außer den Formeln $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch folgende Formeln $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y \partial y}\right)$ in Rechnung, von welchen die erste bedeutet den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Beziehung auf x allein; die zweyte den für $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ in Absicht auf y, oder welches dasselbe ist, den von $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ in Absicht auf x (zufolge Differentialgleichung 12); und die dritte Formel den Differentialquotienten für $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ wieder in Beziehung auf y allein. Nun sey eine Gleichung zwischen x, y, z, den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und den zuletzt angezeigten des zweyten Grades gegeben, so ist die aufzulösende Aufgabe, daraus eine Gleichung zwischen x, y und z allein herzuleiten. Dergleichen Aufgaben kommen in der höhern Mechanik und Hydrodynamik häufig vor, daher die Methoden zu ihrer Auflösung sehr wichtig sind.

Zu Gleichungen mit höhern Differentialen ist noch bisher keine Veranlassung gewesen.

Wenn die Functionen, welche durch die Integralrechnung gesucht werden, algebraisch nicht können dargestellt werden, so sind sie transscendente. Doch werden logarithmische und circulare Functionen mit den algebraischen fast für gleichgeltend genommen, weil man hier die zusammengehörigen Größen mittelst der Tafeln oder der entwickelten Formeln immer hinlänglich genau eine aus der andern bestimmen kann. Daher wird eine Integration für vollendet angesehen, wenn sie auf logarithmische oder circulare Functionen, es sey allein oder in Verbindung mit algebraischen gebracht ist.

Bey der Integration einer Gleichung von der Form, $\partial y = X \partial x$ läßt sich das Integral y oder die gesuchte Function von x oft nicht anders, als durch eine Reihe näherungsweise angeben. Diese Functionen mag man als algebraische irrationale betrachten. Die andern Differentialgleichungen, wenn sie nicht algebraische Integrale, oder auch circulare oder logarithmische haben, führen auf eigene Gattungen von transscendenten Functionen, deren Anzahl unbestimmbar bleibt.

Geschichte der Integralrechnung.

Es ist schwer eine Geschichte der Integralrechnung abzufassen. Die Methoden der Integrationen mit allen dazu gehörigen Untersuchungen sind theils in sehr vielen einzelnen Abhandlungen enthalten, theils in den Schriften über die höhere Geometrie, Mechanik und physische Astronomie zerstreut, woraus man die allmählige Ausbildung und Erweiterung der Methoden hervorziehen müßte. Dabey würde man nicht umhin können, sich auf die Rechnungen selbst etwas einzulassen, um zu zeigen, worin eine Entdeckung oder Erweiterung bestanden habe, wenn man auch sich nicht vornähme, den Leser von den Gegenständen zu unterrichten, sondern ihn deshalb auf gute Bücher verwiese. Hier möchte es manchmal schwer seyn, entweder nicht unverständlich oder nicht zu ausführlich zu wer-

den. Montücla beengt sich in seiner Geschichte der Mathematik, auch bey der Integralrechnung, den Raum dadurch, daß er dem Leser zugleich Unterricht von den Elementen der Wissenschaft ertheilt, der doch nur unvollständig seyn kann.

In dem Artikel: Differentialrechnung, Th. I. S. 832. ist gezeigt, daß Newton seine Schrift: Methodus fluxionum et serierum infinitarum schon im J. 1671 aufgesetzt habe. In dieser macht die Anwendung der Integralrechnung auf Quadraturen und Rectificationen der Curven den größten Theil aus, daher Horsley in seiner Ausgabe der Newtonschen Werke ihr den Titel giebt: Artis analyticae specimina, vel Geometria analytica. Die Abhandlung: de quadratura curvarum, welche 1704 mit der Optik heraus kam, enthält allgemeinere Integrations-Formeln, als jene Abhandlung, welche durch viele Exempel die neue Methode erklärt. Doch haben beide die Tafeln für gewisse algebraische Integrale, und solche, die auf Quadratur der Ellipse oder Hyperbel gebracht werden können, gemein. Übrigens sind auch die Principien der Naturwissenschaft, die Newton 1686 zuerst herausgab, ein Beweis, daß ihr Verfasser die Integralrechnung, wenigstens so fern sie die Formen, wie $X\partial x$, betrifft, im Besitz hatte. Die Differentialgleichungen, in welchen die veränderlichen Größen nicht gesondert sind, löset Newton in der ersten Schrift, der Methodus fluxionum, durch Verwandlung der einen veränderlichen Größe in eine, nach Potenzen der andern geordnete, Reihe auf, wovon er ein Glied nach dem andern findet, aber doch auf eine nicht bequeme Art. Es würde leichter seyn, eine Reihe mit unbestimmt gelassenen Coefficienten zu gebrauchen, eine Methode, die Newton nicht entgehen konnte, wenn er sie nicht aus gewissen Gründen zurücksetzte. Eine besondere Methode, durch eine endliche Anzahl von Ordinaten eine Curve fast genau zu quadriren, lehrte Newton in der Schrift: Methodus differentialis.

In England blieben Newtons Methoden noch unbekannt, oder wurden nur wenigen anvertraut. Erst im

J. 1699 erschienen Newtons Briefe an Leibnitz in dem dritten Theile der Werke von Wallis. Die zwey Übersetzungen der von Newton gebrauchten geheimen Schrift waren selbst noch Räthsel. Craig bediente sich in seiner zweyten Schrift über die Quadratur der krummen Linien (London, 1693) der Leibnitzischen Differentialrechnung. Er nahm dabey eine zweyte Curve zu Hülfe, an welcher die Subnormalen den Ordinaten der vorgegebenen Curve, bey gemeinschaftlicher Abscisse, gleich sind; daher das Quadrat einer Ordinate an der zweyten Curve das doppelte der zugehörigen Area an der vorgegebenen ist. Das Quadrat diente ihm statt des Integrals, die Subnormale statt des Differentials. Er nahm die Form des Integrals an, differentiirte es, verglich dieses Differential mit dem vorgegebenen, und bestimmte dadurch die Coefficienten in der angenommenen Form.

In Deutschland zeigte Leibnitz die Anwendung seiner Infinitesimalrechnung, ganz unabhängig von Newtons noch nicht bekannten Entdeckungen, durch mancherley wichtige und schwere Aufgaben aus der Geometrie und Physik. Dadurch machte er einen der scharfsinnigsten Geometer seiner Zeit, Jakob Bernoulli, auf seine Methode aufmerksam, und erwarb an diesem und dessen Bruder, Johann Bernoulli, für den neuen, hernach so wichtig gewordenen Theil der Analysis die eifrigsten Beförderer, für sich selbst an dem letztern einen sehr warmen Freund und Vertheidiger. Er selbst, durch vielerley Beschäftigungen zerstreut, konnte nur seine Gedanken flüchtig in Zeitschriften hinwerfen. Auch hat er für die Integralrechnung selbst wenig gethan. In einem Aufsatze in den Actis Erud. 1684 zeigte er an, daß er eine Methode habe, Curven zu quadriren mittelst anderer Curven, erklärte sie aber nicht. Im J. 1686 sagt er daselbst, die Quadraturen seyn ihm nur ein besonderer Fall einer viel größern Aufgabe, welche er die umgekehrte Methode der Berührenden nenne. Wieder nichts als etwas hingeworfen! Endlich im J. 1693 erklärt er in dem Supplemento Geometriae dimensoriae seine Methode

der Quadraturen, die auf die Construction einer andern Curve ankommt, deren Ordinaten den Flächenräumen der zu quadrirenden proportional sind. Diese Curve soll durch eine gewisse Bewegung beschrieben werden. Leibnitz hatte also damahls noch keine Methode unmittelbar zu integriren. In den A. Er. 1694 giebt er die Construction der Isochrona paracentrica; aber das Integral, $\int dz : \sqrt{(a^3 z - a z^3)}$, worauf sie beruht, findet er nur durch Construction einer Curve, deren Rectification von diesem Integral abhängt. Das heißt freylich nur die Form des Differentials verwandeln, nicht es integriren. In einem Aufsatze, Supplementum Geometriae practicae, cet. A. Er. 1693 gebraucht Leibnitz die Methode des Unbestimmten zur Integration durch Reihen, und macht die Anwendung auf Logarithmen und den Kreis. Aus einer ganz kurzen Bemerkung in den A. Er. 1696. Mart. über eine von Jakob Bernoulli vorgegebene ungesonderte Differentialgleichung sieht man, daß er nicht allein diese nicht leichte Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen wußte, sondern auch darin die veränderlichen Größen sondern konnte, welche Methode er aber nur in Briefen andern mitgetheilt hat. In dem Aufsatze: Specimen novum Analyseos, cet. A. Er. 1702 zeigt Leibnitz, wie rationale gebrochene Functionen in einfache zerlegt werden, aber auf eine undeutliche Art. Hierauf gründet er die Integration der Differentialformeln $X dx$, wo X ein solcher Bruch ist. Er bemerkt, daß bey unmöglichen Wurzeln des Nenners jedes Paar einen quadratischen Factor giebt, macht sich aber wegen Nenner, wie $x^4 + a^4$; $x^8 + a^8$ eine Schwierigkeit, da er sie nicht in quadratische zu zerlegen weiß. (Th. I. S. 163) Freylich können sie nicht in binomische, aber wohl in trinomische, quadratische Factoren zerlegt werden. S. Th. I. S. 158. ff. mit Zuziehung von Goniometrie, IX.

In dem Commercio epistolico Leibnitii et Io. Bernoullii findet man, wie manche Integrations-Methoden durch die gegenseitige Mittheilung dieser beiden scharfsinnigen Männer entwickelt worden sind. Bernoulli möchte den größten Antheil daran haben; er konnte aber

auch ſich der neuen Analyſis ohne Zerſtreuung widmen. Man muß dieſe für die literariſche Geſchichte der Mathematik und Phyſik in dem Zeitraume dieſes Briefwechſels reichhaltige Sammlung ſelbſt nachſehen. Nur ein paar Bemerkungen von Leibnitz laſſen ſich hier in der Kürze anführen. Er zeigt (p. 21), wie die Integration der Formel $x^m(1x)^n \partial x$ erhalten wird. Er differentiirt das Product $x^p(1x)^q$, welches ein zweytheiliges Differential giebt. Nun werden ſucceſſiv für q die ganzen Zahlen von 1 an geſetzt, wodurch für ein gegebenes n das Integral mittelſt der für kleinere Werthe des Exponenten gefundenen Integrale erhalten wird. Dieſe Reductions-Methode iſt bequem, und auch auf andere Formen der Differentiale anwendbar. Joh. Bernoulli ſcheint ſich ihrer auch bey der Differentialformel $x^n \partial x : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$, bedient zu haben, da er (p. 285) meldet, daß er die Fälle angeben könne, wo ſie ſchlechthin integrirbar iſt, wo ſie die Rectification der Kreisbogen erfordert, und wo weder das eine noch das andere Statt hat. Von der Reihe, die Bernoulli für das Integral der Formel, $y \partial x$, angegeben hatte, nahm Leibnitz Veranlaſſung eine dergleichen Reihe auch zur erſten Integration einer höhern Differentialformel: $x^m \partial^n y$, zu ſuchen, wobey er einen Rechnungsfehler begieng, den Bernoulli verbeſſerte.

Durch die Aufgabe von der Iſochrona (der Linie des gleichförmigen Falles), die Leibnitz im J. 1687 vorlegte, erkannte Jakob Bernoulli die Brauchbarkeit der neuen Analyſis. Sein erſter Verſuch in derſelben betraf dieſe Curve, in den A. Er. 1690. Die Aufgabe führt auf eine Differentialgleichung, die leicht zu integriren iſt. Er ſelbſt aber gab dagegen eine ſchwerere auf, die von der Figur einer an zwey Puncten aufgehangenen, ſchweren, vollkommen biegſamen Linie, ohne doch ſchon die Auflöſung gefunden zu haben, zufolge der Nachricht, die Joh. Bernoulli in ſeiner nachher gefundenen Auflöſung (A. Er. 1691. Iun., Opp. T. I. p. 48) von der Veranlaſſung der Aufgabe giebt. Dieſe Aufgabe überzeugte die Geometer von der Kraft der neuen Analyſis. Die Differentialglei-

chung für die Curve führt auf ein logarithmisches Integral. Die horizontalen Ordinaten verhalten sich wie die Logarithmen einer Function der Abscisse. Hierauf folgten im J. 1691 Anwendungen der Integralrechnung auf die Geometrie der Curven, als die spiralische Parabel, die logarithmische Spirale, die hyrodromische Linie, die Flächen sphärischer Dreyecke, und eine Erweiterung der Aufgabe von der Kettenlinie auf ungleich schwere oder dehnbare Fäden. Er gab zugleich die Frage von der Figur der elastischen, durch ein Gewicht gekrümmten Linie mit der in Chiffern versteckten Auflösung auf, und erwähnte auch der Segellinie, oder der Figur eines vom Winde gespannten Segels. Hierbey bemerkte er, daß durch keine andere Methode, als durch die Leibnitzische Infinitesimalrechnung es möglich sey, dergleichen Aufgaben aufzulösen, und legte dieser Rechnung großen Vorzug vor der Barrowschen bey. Von der Krümmung eines Segels, als einer einfach gekrümmten Linie betrachtet, gab er 1692 die Resultate; in demselben Jahre auch die Auflösung der Vivianischen Aufgabe von dem Gewölbe mit vier Öffnungen, und der Aufgabe von der Jahreszeit der kürzesten Dämmerung. Im J. 1694 machte er seine Construction der elastischen Linie nach einem unbestimmt gelassenen Gesetze der Dehnung in Beziehung auf die dehnende Kraft bekannt; und insbesondere für den Fall, da die Dehnung sich wie die dehnende Kraft verhält. Er gebraucht dazu im Allgemeinen die Quadratur einer andern Curve, die dabey vorausgesetzt wird. Für den besondern vorher erwähnten Fall integrirt er aber die Gleichung,

$$\partial y = \frac{xx\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

schon durch Verwandlung des Factors von ∂x in eine Reihe, und sagt (p. 647), daß er dieses durch die von Wallis gelehrte Interpolations-Methode gefunden habe; zufolge einer feinen Bemerkung von Leibnitz werde die Reihe auch durch Erhebung des Binomium auf eine unbestimmte Potenz erhalten. Nach dieser Methode integrirt er auch das Differential des Bogens der Elastica. Zu gleicher Zeit gab er die Construction

ter von Leibnitz aufgegebenen Curva isochrona paracentrica (der Curve der gleichförmigen Annäherung oder Abrückung in Beziehung auf einen fixen Punct), welche die Integration der Formel $\frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^4)}}$ erfordert. Er construirt sie mittelst der Rectification der Elastica, auch durch eine algebraische Curve vom vierten Grade. Im J. 1695 legte er die Aufgabe vor, die ungesonderte Differentialgleichung, $a\partial y = y^p \partial x + b y^n q \partial x$, worin p und q Functionen von x sind, zu construiren, wenigstens durch Quadraturen, das ist, die veränderlichen Größen zu sondern. Die Auflösung gab er in dem folgenden Jahre, nachdem er statt jener Gleichung diese: $a\partial y = y\partial x + q\partial x$, gesetzt hatte, worauf sich jene, wie er sagt, bringen lasse. Im J. 1698 bediente Bernoulli zur Integrirung von Differentialformeln mit einem irrationalen Factor sich noch der Methode durch Substitution diese rational zu machen. Bey der Bestimmung der Länge auf der Loxodromica wird dieses Verfahren weitläufig, da drey Substitutionen nöthig sind; doch findet er zugleich bessere Substitutionen. Im J. 1704 zeigt er in einer akademischen Schrift die Verwandlung der Wurzeln aus Binomien in eine Reihe, und dadurch die Integration der damit behafteten Differentiale.

Was Jakob Bernoulli vorzüglich als einen scharfsinnigen Analysten zeigt, ist das berühmte isoperimetrische Problem, wozu er durch seines Bruders Aufgabe von der Linie des schnellsten Falles (1696) veranlaßt wurde, dasselbe, was beyde Brüder so sehr entzweyte. Eine Aufgabe ähnlicher Art hatte Newton schon aufgelöset, in so fern, daß er die Differentialgleichung für dieselbe gefunden hatte, nämlich die Aufgabe von der Figur des Körpers, bey welcher der Widerstand des Mittels, worin er sich bewegt, am kleinsten wird. Jakob Bernoulli fand nicht allein eine kurze und feine Auflösung jener Aufgabe, sondern legte zugleich eine viel allgemeinere vor, diese; unter allen Curven gleichen Umfanges über einer gemeinschaftli-

chen Grundlinie diejenige zu finden, durch deren Ordinaten oder Bogen die Ordinaten einer andern Curve nach irgend einem zusammengesetzten oder getheilten Verhältnisse zu einer gegebenen geraden so bestimmt werden, daß diese zweyte Curve den größten Raum einschließe. In der Schrift: Analysis magni problematis isoperimetrici (Basileae, 1701), bemerkt Bernoulli mit Recht, daß diese Aufgabe zu einer höhern Classe gehöre, als die bis dahin behandelten, und daß dadurch neue Gegenden der Wissenschaft entdeckt würden. Es genügt bey derselben nicht an zwey Elementen einer Curve, sondern es sind drey neben einander liegende zu betrachten, oder es ist eine hiemit gleichgeltende Bedingung einzuführen. Diese Schrift wird für ein Meisterstück der Erfindung und des Scharfsinns gehalten.

Joh. Bernoulli war zwar in der Auflösung dieser neuen schweren Aufgabe nicht so glücklich als sein Bruder, da er noch einen wichtigen Umstand aus der Acht ließ, allein in vielen andern Stücken hat er die Rechnung des Unendlichen ungemein erweitert. Die erste Probe von seiner Bekanntschaft mit der Infinitesimalrechnung war die mit einer ausführlichen Anzeige ihrer Eigenschaften begleitete Auflösung der Aufgabe von der Kettenlinie in den A. Er. 1691, wo die Analysis noch nicht beygefügt war. Die Lectiones mathematicae, welche er während seines Aufenthalts in Paris in den Jahren 1691 und 1692 für den Marquis de l'Hopital aufsetzte, enthalten schon einen sehr methodischen, und wegen der vielen Anwendungen auf geometrische und dynamische Aufgaben noch jetzt zu empfehlenden Unterricht von der Integralrechnung, weil man darin nicht bloß Differentiale zu integriren vorgelegt bekommt, sondern zugleich die Veranlassungen zu den Differentialen selbst. Die Differentialformeln, die darin integrirt werden, sind solche, die entweder integrirbar sind, oder von der Quadratur des Kreises oder der Hyperbel abhangen. Unter der Rubrik: methodus tangentium inversa, werden Methoden zur Integrirung von mancherley Differentialgleichungen, auch einige von

höhern Graden, vorgetragen. Von der Absonderung der veränderlichen Größen nur ein leichtes Beyspiel. Wichtige Bemerkung, daß den Differentialgleichungen manchmahl ein Factor oder Divisor beyzufügen ist, um sie integrirbar zu machen. Zuletzt wird einiges von dem Gebrauche unendlicher Reihen zu Integrationen beygebracht, auch der binomische Lehrsatz in seiner Allgemeinheit wird hiebey, doch ohne Beweis, angeführt. Wenn dieses Werk gleich anfangs so beschaffen gewesen ist, wie es in der Sammlung aller Werke seines Verfassers im J. 1742 erschienen ist, so hat derselbe den Geist der Integralrechnung gleich anfangs vollkommen gefaßt. Sein Bruder und Leibnitz selbst behalfen sich mit Quadraturen und Rectificationen statt wirklicher Integrationen, dagegen Joh. Bernoulli meistens durch Rechnung und Reduction auf Kreis und Hyperbel die Integration vollführt. Als Beweis, daß in den Lectionen nichts verbessert sey, könnte dienen, daß das $\int \frac{\partial x}{x} =$ infin. gesetzt wird, als pag. 388, 417, 420, dagegen es schon in einem Aufsatze vom J. 1697 heißt, daß $\frac{\partial x}{x}$ das Differential des Logarithmen zu der Zahl x ist. Im Jahr 1694 machte Bernoulli eine allgemeine Reihe für $\int X \partial x$ bekannt, diese: $\int X \partial x =$

$$Xx - \frac{x^2 \partial X}{1.2 \partial x} + \frac{x^3 \partial^2 X}{1.2.3 \partial x^2} - \frac{x^4 \partial^3 X}{1..4 \partial x^3} + \text{etc.}$$

Die Methode hiezu, welche sehr einfach ist, wandte er in der Folge auf Integrationen von allerhand Formeln an. Im J. 1696 legte er die schöne Aufgabe von der Linie des schnellesten Falles vor. Er scheint durch die Untersuchung über die Trajectoria eines Lichtstrahls darauf gekommen zu seyn, bey welcher angenommen ward, daß der Strahl von einem Puncte in dem einem Mittel zu einem Puncte in dem andern Mittel in der kürzesten Zeit bey einem gegebenen Verhältnisse der Geschwindigkeiten gelange. Da durch das Gesetz der Geschwindigkeiten die

Trajectoria des Lichts in jener Hypotheſe gegeben iſt, ſo iſt auf gleiche Art die Linie des ſchnellſten Falles gegeben, weil auf einer Fall-Linie die Geſchwindigkeiten den Wurzeln aus den Fallhöhen proportional ſind. Hernach iſt er auf einen directen Beweis aus dynamiſchen Gründen gekommen. Er theilte aber nur den indirecten, aus optiſchen Principien hergeleiteten, mit, um jenen noch geheim zu halten. Mit der Abſonderung der veränderlichen Größen in einer Differentialgleichung beſchäftigte B. ſich früh. Im J. 1694 ſchrieb er an Leibnitz, daß er dazu mehrere beſondere Wege habe. Im J. 1697 zeigte er, wie dieſes bey der Gleichung, $ady = ypdx + by^n qdx$, wo p und q Functionen von x ſind, geſchehen könne, die Integration gegebener Differentialformeln zu dem Ende voraus geſetzt. Die Größen x und y werden durch eine dritte eingeführte veränderliche gefunden. Auf ähnliche Art conſtruirt er die Curve für das Solidum des geringſten Widerſtandes. Er findet für daſſelbe die Differentialgleichung, $ydy^3dx = ad s^4$, wo dy conſtant iſt. Nach geraumer Zeit gab er eine Methode an, homogene Differentialgleichungen zu integriren, in den Petersb. Commentarien, 1726. Hier behandelt er umſtändlich die Gleichung $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = o$, und dieſe. $xdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = o$, welche man in Paris um die Zeit, als Bernoulli ſich da aufhielt, noch nicht hatte integriren können. Auch mag bemerkt werden, daß Bernoulli aus gegebenen Reihen ungeſonderte Differentialgleichungen herleitete, in einem Briefe an Leibnitz vom Decemb. 1696. Im J. 1702. zeigte er in den Mém. de l'Acad. des Sc. die Integration der Formel $\frac{Pdx}{Q}$, wo P und Q rationale Functionen von x ſind, deutlicher als es Leibnitz zu derſelben Zeit in den A. Er. that. Im Jahr 1719 lehrte er die Integrationen der Formeln, $z^{mq-1} : (e + fz^q + gz^{2q})$ und $z^{mq-1} : (e + fz^q + gz^{2q} + hz^{3q})$, die Taylor aufgegeben hatte, wo m ein poſitiver oder negativer Bruch iſt, deſſen Nenner eine

Potenz der 2 ist. Zugleich zeigte er an, in welchen Fällen die Formel $x^m \partial x : (e + f x^q)^n$ integrirbar ist, oder von der Integration einer einfachern Formel abhängt. In den geometrischen und mechanischen Untersuchungen hat B. noch manche scharfsinnige Anwendungen der Integralrechnung gemacht. Auf die von Newton so glücklich angefangene hohe Mechanik der Weltkörper hat er sich aber nicht eingelassen, es sey aus unrichtigen Vorstellungen von der Physik des Weltsystems, oder aus Abneigung mit einem Geometer wie Newton hierin einen Wettstreit einzugehen. Nur die umgekehrte Aufgabe der Centralkräfte lösete er allgemein auf. (Mém. de l'Ac. des Sc. 1710.). Newton hatte eigentlich nur bewiesen, was das Gesetz der Schwerkraft ist, wenn der Körper sich in einem Kegelschnitte bewegt, und der Mittelpunct der Kraft in dem (einen) Brennpuncte ist. Bey dem umgekehrten Satze hatte er angenommen, daß der Körper sich nicht anders als in einem Kegelschnitte bewegen könne, und nur die Gattung desselben gesucht.

Roger Cotes, der Erfinder eines geometrischen Satzes, wodurch die Binomien $a^n - x^n$ und $a^n + x^n$ in einfache Factoren zerlegt werden, bemerkte, daß anstatt der Quadratur der Hyperbel und der Ellipse bey Integrationen besser Logarithmen und Kreisbogen gebraucht werden. Jenes Verfahren ist wirklich zur Anwendung ganz unbrauchbar, und bringt nur eine Aufgabe auf eine andere. Es bleibt dabey ja noch die Frage, wie ein hyperbolischer oder elliptischer Raum, der durch gewisse Coordinaten gegeben wird, durch das Quadrat einer gegebenen Linie ausgedruckt werden möge. Dazu dienen die Logarithmen und Winkel oder Kreisbogen, für welche Tafeln berechnet sind, so daß man zu jedem Verhältnisse oder jeder Zahl den zugehörigen Logarithmen oder umgekehrt, so wie zu jedem Winkel die zugehörigen trigonometrischen (cyklometrischen) Linien, oder diese aus jenen hinlänglich genau finden kann. Cotes hat den Weg zu der gegenwärtigen Form der Integralrechnung für die Fälle, wo das Integral von Logarithmen oder Winkeln abhängt,

gebahnt. Er machte seine Lehrsätze in den Schriften der Londoner Gesellschaft 1714, Nro. 338, unter dem Titel: Logometria, bekannt. Es waren 18 Formen von Differentialen, worin der Differential-Factor eine Potenz von z enthält; zugleich mit einem Binomium $e+fz^n$ im Divisor, oder der Quadratwurzel aus einem solchen Binomium, oder zweyerley Binomien, einem rationalen und einem quadratisch irrationalen, auch zwey irrationalen, ferner mit einem Trinomium oder der Quadratwurzel daraus, auch mit einem Binomium verbunden. Bey der weitern Ausführung ward Cotes durch einen frühzeitigen Tod (1716) unterbrochen. Robert Smith, Professor zu Cambridge vollendete nach Anleitung der von Cotes nachgelassenen Papiere das angefangene Werk, welches man als das erste völligere über die Integralrechnung anzusehen hat. Er gab es zugleich mit den von Cotes schon in den Transactionen darüber gelieferten Aufsätzen zu Cambridge 1722 heraus, unter dem Titel: Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae, 250 S. in 4. nebst einem Anhange kleiner Abhandlungen von Cotes. 126 S. Was hier mensurae heißen, sind Logarithmen von Verhältnissen mit ihrem Modulus, und Kreisbogen für zugehörige Winkel mit ihrem Halbmesser. Die Harmonie dieser Maaße beruht darauf, daß Integrale, die nach dem einem dieser Maaße unmögliche Größen sind, nach dem andern möglich werden, so daß die analytische äußere Form dieselbe bleibt. (S. Differentialformeln, III.). Cotes bezeichnete in den von ihm selbst ausgearbeiteten Integralformeln beiderley Maaße auf einerley Art. Z. B. das Integral von $\frac{z^{\frac{1}{2}n-1}\partial z}{e+fz^n}$ giebt Cotes an durch $\frac{2}{ne}R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, wo $R=\sqrt{\frac{-e}{f}}$; $T=z^{\frac{1}{2}n}$; $S=\sqrt{\frac{e+fz^n}{f}}$ ist. Bey der Berechnung wird aber

$R = V\frac{\bullet}{f}$ genommen. Dieſe Formel bedeutet $\frac{2}{\eta e} \cdot V\frac{e}{f}$. Ang. tang $z^{\frac{1}{2}\eta} V\frac{f}{e}$; Iſt $-\frac{e}{f}$ negativ, ſo giebt Cotes das Integral ganz durch dieſelbe Formel an. Sie bedeutet aber nun $\frac{2}{\eta e} R \log. nat. \frac{R+T}{S}$, wo $S = V\frac{fz^{\eta} - e}{f}$ iſt. Man ſieht, daß die Bezeichnungsart noch unbequem und gezwungen iſt. Auch hat Smith ſie in dem von ihm allein ausgearbeiteten Werke geändert. Er bezeichnet den natürlichen Logarithmen eines Verhältniſſes m:n durch (m:n) mit Vorſetzung des Modulus; die Tangente eines Winkels PBO durch (PBO) mit Vorſetzung des Radius, indem der Winkel ſelbſt durch einen Kreisbogen mit dem Halbmeſſer als Einheit ausgedrückt wird. Er hat 94 Formen mit Einſchluß der darunter aufgenommenen 18 Formen, die Cotes ſchon bearbeitet hat. Dieſe bringt er auf 11 Claſſen verwandter Formen. Für jede Form iſt eine Tabelle berechnet, nach den verſchiedenen Werthen des Exponenten der veranderlichen Größe außer dem binomiſchen oder trinomiſchen Factor, mit einer Anweiſung die Tabelle zu erweitern. Das Werk iſt uns gegenwärtig noch brauchbar als ein Repertorium für viele, zum Theil verwickelte Integrale, wenn man nur die Bezeichnungen ändert. Da nur einige Erläuterungen, aber keine Beweiſe beygefügt ſind, ſo hat Walmesley, ein engländiſcher Benedictiner, dem Werke eine neue Geſtalt durch die Entwickelung der Integrale gegeben. Dieſe Bearbeitung hat den Titel: Analyſe des meſures des rapports et des angles, ou reductions des Intégrales aux Logarithmes et aux arcs de cercle, par D. C. Walmesley, B. A. à Paris, 1753. S. 445 in 4. Die Tafeln für die Formen von Cotes ſind hierin enthalten. Auch hat W. die Theorie derjenigen Falle beygefügt, wo die von Cotes gebrauchte

Methode die Integrale nicht gab. Die Rechnungen sind noch nicht genug geschmeidig, und die Bezeichnungsart noch unbequem, besonders was die cyklometrischen betrifft, inzwischen war ohne Zweifel das Werk zu seiner Zeit sehr nützlich, und mag auch jetzt dienlich seyn, sich daraus in schweren Fällen Raths zu erholen.

Cotes fand durch Hülfe seines analytisch-geometrischen Lehrsatzes die Integration der Differentialformel:

$$\frac{z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}\partial z}{e+fz^n+gz^{2n}},$$

für den Fall, da der Nenner sich nicht in zwey binomische Factoren zerlegen läßt, wofern nur λ eine der Zahlen aus der Reihe 2, 4, 8, 16, etc. und δ eine ganze Zahl ist. Die durch θ bezeichnete Zahl ist eine ganze bejahte oder verneinte. Für $\lambda = 2$ und 4 sind die Integrale in den Formen XXX und XXXII von Smith angegeben. Diese Integration schien in England wichtig genug, daß Taylor sie allen Mathematikern außer England aufgab. Joh. Bernoulli leistete sie in den Act. Erud. 1719, doch ohne die Theilung eines Winkels zu gebrauchen. Auch von Hermann erschien in den A. Er. desselben Jahres eine Auflösung, wozu in den Petersburger Commentarien T. VI. ein Nachtrag folgte. Die Einschränkung der Auflösung wegen der Form von λ hob Moivre durch seine Erweiterung des Cotesischen Lehrsatzes (Th. I. S. 564.), so daß der Exponent von z jede gebrochene Zahl seyn darf, in den Miscellaneis analyticis, Londini 1730. L. I. Probl. V., L. III. Probl. XII. Zur Erläuterung diene folgendes. Wenn die Function $e+fz^n+gz^{2n}$ sich in in zwey reale binomische Factoren auflösen läßt, welches möglich ist, wenn $ff > 4eg$ ist, so läßt sich der Differential-Factor in zwey Brüche zerlegen, die rational werden, wenn x^λ für z^n gesetzt wird. Läßt sich aber jene Function nicht in zwey reale binomische zerlegen, so muß sie in trinomische zerfällt werden. Ist λ eine Potenz der Zwey, und wird

x^λ ſtatt z^n geſetzt, ſo läßt ſich die Function $e + fx^\lambda + gx^{2\lambda}$ in zwey trinomiſche Factoren von derſelben Form zerlegen, ſo daß die Exponenten von x Potenzen von 2 bleiben. Durch fortgeſetzte Zerlegung kommt man ſolchergeſtalt auf Factoren, wie $a \pm bx^2 + cx^4$, und die Integration des zufolge der gefundenen Factoren zerlegten Differentials wird nun möglich. Iſt aber λ eine andere Zahl als eine Potenz der Zwey, ſo bekommen die trinomiſchen Factoren eine andere Form als die vorgegebene. Hier war es, wo Cotes ſich aufgehalten fand. Man ſehe das von Walmesley angeführte Werk. S. 200. ff. Auch hat Thomas Simpſon in den Essays on several subjects in speculative and mix'd Mathematiks, (London, 1740. Nr. XIII.) eine Auflöſung für den Fall, da der Nenner des Differentialfactors nicht in zwey reale binomiſche Factoren zerlegbar iſt, gegeben, wobey der von Moivre erweiterte Coteſiſche Lehrſatz gebraucht iſt. Doch iſt dieſe Auflöſung weitläufig. In den engliſchen Transactionen, Nr. 417. iſt eine Auflöſung von Klingenſtierna, ohne Beweis, enthalten.

Die fernere Erzählung von dem Fortgange der Integralrechnung wird kürzer ſeyn müſſen, als die von ihrer anfänglichen Bearbeitung. Dieſe war gleichſam ein Beſuch bey den Quellen eines großen Fluſſes.

Taylor war ein ſehr ſcharfſinniger Analyſt, wenn gleich Joh. Bernoulli ihn aus Leidenſchaft wegen eines nationalen Zwiſtes zwiſchen ihnen herabzuſetzen ſucht. Der nach ihm genannte Lehrſatz iſt nicht allein ein vortreffliches Mittel zur Entwickelung einer veränderlichen Größe durch die ihr zugehörige, ſondern dient auch aus einer Differentialgleichung die eine der veränderlichen Größen durch die andere darzuſtellen, wenn gleich die Reihe nicht immer convergent ſeyn kann. In ſeiner Schrift, Methodus incrementorum. Londini 1715. giebt er S. 38. noch zwey Reihen für ein Integral, $\int y\,dx$ an, wenn y eine Function von x iſt, die auch mittelbar durch eine Differentialgleichung gegeben ſeyn mag. Es wird dazu eine

willkürliche Function w von x eingeführt, die so zu wählen ist, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$, etc. leicht zu finden seyn. Davon in dem Artikel: Integralformeln. In dem zweyten Abschnitte jenes Buchs macht Taylor die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf einige geometrische und physiko-mathematische wichtige Aufgaben. Es ist nur übel, daß das Werk durch die zu große Kürze und unbequeme Bezeichnungsart dunkel ist.

In Italien ward die Integralrechnung mit Fleiß und glücklich bearbeitet. Gabriel Manfredi gab 1707 eine Schrift über die Construction der Differentialgleichungen vom ersten Grade heraus, die wegen der Geschicklichkeit in der Behandlung gerühmt wird. In den Abhandlungen des Bononischen Instituts und in Zeitschriften sind von ihm gute Aufsätze enthalten. Der Conte Giacomo Riccati und sein Sohn Vincent haben über die Integralrechnung viele tiefsinnige Abhandlungen geliefert. Der erstere gerieth auf eine Differentialgleichung vom ersten Grade, zwischen zwey veränderlichen Größen, eine dem Ansehen nach sehr einfache, die er nicht allgemein auflösen konnte, und sie daher den Analysten in den Act. Er. 1722. T. VIII. supplem. vorlegte. Sie hat daher von ihm ihren Namen erhalten. Jakob Bernoulli hatte schon einige besondere Fälle derselben aufgelöset. Drey Bernoulli, Nikolaus und Daniel (Söhne von Johannes) und Nikolaus der Neffe, und Goldbach haben sich damit nach verschiedenen Methoden beschäftigt. Die Gleichung ist diese: $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$. Für eine gewisse Form des Exponenten m lassen sich die veränderlichen Größen von einander sondern, wodurch die Aufgabe auf die Integration einer Differentialformel gebracht wird. Bossut vergleicht die Riccatische Gleichung mit der Quadratur des Kreises in der Geometrie. Wenn eine Aufgabe auf die Auflösung derselben gebracht ist, so wird sie als aufgelöset angesehen.

Unter den italienischen Mathematikern in der ersten Hälfte des 18ten Jahrhunderts zeichnete sich auch der Conte Fagnano durch manche Untersuchungen höherer Art seit etwa 1720 aus, insbesondere durch die Bestimmung elliptischer oder hyperbolischer Bogen, deren Unterschied eine algebraische Grösse ist. Leibnitz und Johann Bernoulli, die dasselbe versucht hatten, urtheilten, daß die neue Rechnung nicht darauf anwendbar sey. Euler hat in der Folge diese Aufgabe auf eine viel allgemeinere Art nach einer andern Methode behandelt. (Comm. Ac. Petr. T. VIII.) Mit der Curve, die man Lemniscata nennt, beschäftigte sich Fagnano so viel, daß er sie vor der Sammlung seiner Werke (Produzioni matematiche, in Pesaro, 1750. 2 Voll. in 4.) auf dem Titel abbilden ließ.

Maclaurin lehrt in seinem Werke über die Fluxionen (Edinburg 1742) viele Anwendungen der Integralrechnung auf geometrische und mechanische Aufgaben, die aber mehr in Absicht auf die Gegenstände und die Kunst der Behandlung, als für die Rechnung selbst wichtig seyn möchten. Diese ist auch gegenwärtig in der Form bequemer eingerichtet, da sie von der ehemaligen Lehnsverbindung mit der Geometrie befreyt ist. Unter den Artikeln, welche von der Integralrechnung selbst handeln, wird derjenige am merkwürdigsten seyn, worin gezeigt wird, welche Integrale sich auf die Rectification eines hyperbolischen und elliptischen Bogens mit einander verbunden bringen lassen. Man vergleiche mit Maclaurins geometrisch-synthetischer Methode die rein analytische von d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, 1746 u. 1748. Vincent Riccati hat sich sehr umständlich mit der Integration der Differentialformel $\frac{\partial x \sqrt{(f+gxx)}}{\sqrt{(a+bxx)}}$ beschäftigt. Das Integral ist in einigen Fällen ein Bogen einer Ellipse, in andern einer Hyperbel, in andern eines Aggregats von beiden, oder ist keiner dieser Formen fähig. (Vinc. Riccati., S. I. Opuscula. Luccae 1757-1772.

tomi 2.). Landen hat in seinen Mathematical Lucubrations, London 1755. einige hieher gehörige merkwürdige Integrale ohne Beweis mitgetheilt. Die Reduction eines Integrals auf Bogen einer Curve ist freylich nur der Aufgabe eine solche Gestalt geben, wodurch die Auflösung faßlicher wird.

Die Integration der Differentialformeln bedurfte noch mancher Verbesserungen und Erweiterungen. Diese erhielt sie vornämlich, ja fast gänzlich, durch Euler, dessen unerschöpflich fruchtbarem Geiste die ganze Analysis einen großen Theil ihres Reichthums, und fast ganz ihre gegenwärtige Gestalt zu danken hat. Er kündigte sich schon im 20sten Jahre seines Alters (1727) durch eine schöne Auflösung der Aufgabe von den reciproken Trajectorien an, woraus Joh. Bernoulli, sein Lehrer, die künftige Größe seines Zöglings vorher sagte. In dem folgenden Jahre zeigte er eine neue und allgemeine Methode an, ganze Classen von Differentialgleichungen des zweyten Grades, mit Voraussetzung gewisser Bedingungen, zu integriren. Nicht allein in einer langen Reihe von Jahren (er starb 1783) sondern auch noch gegenwärtig nach seinem Tode durch seine zahlreichen hinterlassenen Abhandlungen hat Euler die Analysis theils durch neue Untersuchungen erweitert, theils den nach ihm gekommenen ihm am Geist ähnlichen Geometern die Wege eröffnet, theils die von andern gefundenen Methoden verbessert, erleichtert, und sowohl allgemeiner als zur Anwendung geschmeidiger gemacht. Die Anwendungen analytischer Rechnungen, welche Euler auf die schwersten Fragen in der mathematischen Physik und der physischen Astronomie insbesondere machte, sind alle zugleich Erweiterungen der Analysis selbst. Denn das Physikalische macht hier nur die Bedingungen der Aufgabe aus, und sobald diese auf irgend eine Art durch Gleichungen ausgedruckt sind, geht die ganze Bearbeitung in das Gebiet der reinen Analysis über. Dadurch werden die Fortschritte in der höhern mathematischen Physik zugleich Erweiterungen jener, und die Schwierigkeiten,

die in jener zu lösen sind, werden Veranlassungen zu neuen analytischen Aufgaben.

Euler hat alle seine Untersuchungen über die Integralrechnung bis gegen das Jahr 1770 selbst gesammelt, und in Verbindung mit den von andern Analysten gefundenen Methoden systematisch bearbeitet, in einem großen Werke, Institutiones Calculi Integralis, Petropoli 1768-1770, 3 vol. in 4. Nach seinem Tode ist eine neue Ausgabe dieses Werks mit Verbesserungen, aber mit derselben Anzahl der Paragraphen, herausgekommen, und mit einem vierten Bande vermehrt. Dieser enthält die zur Integralrechnung gehörigen Abhandlungen von Euler, welche theils noch nach der ersten Ausgabe jenes Werks in die Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften eingerückt sind, theils handschriftlich vorhanden waren, in allem 27 Abhandlungen. Die neue Ausgabe ist von den Jahren 1792-1794. Das Verzeichniß aller Werke und einzelnen Abhandlungen Eulers findet man hinter der schönen Gedächtnißrede von Fuß, Petersburg, 1783.

Die Integration der Differentialgleichungen ist hauptsächlich von den Geometern des Continents betrieben worden. Leibnitz und die beiden Bernoulli hatten die Wege eröffnet. Goldbach, Hermann und Nicolaus Bernoulli, fanden die Integrationen verschiedener vieltheiliger Differentialgleichungen, die bis dahin noch nicht versucht waren. Ihre Aufsätze findet man in den ersten Bänden der ältern Petersburger Commentarien. Unter den ältern französischen Analysten beschäftigten sich Carré, Nicole und Saurin mehr mit Anwendungen der Integralrechnung, als daß sie dieselbe erweitert hätten. Clairaut und Fontaine fanden die Bedingungen der Integrabilität für Gleichungen vom ersten Grade, wiewohl Euler sie noch etwas früher schon angewandt hat, wovon im I Th. S. 885 ff. gehandelt ist. Von einer allgemeinern, die Euler gefunden hat, s. Th. I. S. 905.

Clairaut gab in dem Memoire von 1740, wo er von den Bedingungsgleichungen handelt, einige Regeln

zur Entdeckung des schicklichen Factors, die aber gar nicht allgemein, und dabey sehr unbequem in der Anwendung sind. In Eulers Werke über die Integralrechnung ist sowohl für Gleichungen vom ersten Grade als von höhern hierin vieles geleistet. Er hat die Methode sehr vervollkommnet, so daß la Croix sie ihm auch zuschreibt. Am Ende jenes Werks zeigt Eulet noch in einem Anhange, wie vorzüglich die Methode vermittelst Multiplicatoren zu integriren sey. Uebrigens ist Clairauts Werk über die Gestalt der Erde (Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'Hydrostatique, 1743) wegen der dabey angewandten Integralrechnung auch für diese wichtig, und zum Theil ein Commentar über Maclaurins synthetische Darstellung. Seine Theorie der gegenseitigen Störungen der Planeten und der Ungleichheiten des Mondlaufes gehören beide zu den ersten genauen Auflösungen der schwersten Aufgabe aus der analytischen Mechanik. Es verdient noch angeführt zu werden, daß Clairaut Differentialgleichungen des ersten Grades in einigen Fällen mittelst einer zweyten Differentiation integrirt hat, wenn das Differential des Quotienten $\frac{dy}{dx} (= p)$ aus der zweyten Differentialgleichung durch Division herausgeht, so daß man eine Gleichung für p erhält, welche mit der vorgegebenen verbunden wird, um p wegzuschaffen, worauf eine endliche Gleichung zwischen den veränderlichen Größen allein erhalten wird. Euler hat dieses in der Folge mehr auseinander gesetzt.

D'Alembert hat in seinen vielen Schriften über Dynamik und physische Astronomie aus dem Innersten der Analysis die Hülfsmittel zu den feinsten Untersuchungen geholt. Sehr häufig fand er neue Wege zur Integration verwickelter Differentialgleichungen. Auch hat man ihm die Einführung einer neuen Art zu integriren zu danken, die nicht allein in der abstracten Rechnung, sondern auch in der höhern mathematischen Physik von der größten Wichtigkeit ist, die Integration der Gleichungen mit partiellen

Differentialen. Euler war freylich schon darauf gerathen, in einer Abhandlung in dem 7ten Theile der Petersburger Commentarien für 1734. T. VII. und hatte auch bey seiner ganz allgemeinen Auflösung der Aufgabe von der curva synchrona (Mechanicae T. II. §. 106.) davon Gebrauch gemacht, allein er vernachläßigte gleichsam diese neue Ansicht von allgemeinen Auflösungen, bis daß d'Alembert in seiner Schrift: sur la cause générale des vents 1747. und in den Untersuchungen über schwingende Saiten sie benutzte, welches er noch mehr in der Schrift über den Widerstand flüssiger Mittel that. Nun sah Euler ein, daß die Auflösungen verschiedener Aufgaben, die er für allgemein gehalten hatte, es noch nicht waren. Er bemächtigte sich nun gleichsam seines Eigenthums wieder, und gab der neuen Methode eine bessere und einfachere Form, als in welcher d'Alembert sie eingeführt hatte, und in dieser verbesserten Gestalt wird sie von allen Analysten gebraucht. Euler hat ihr den ganzen dritten Theil seines Werks über die Integralrechnung gewidmet. Vorher hatte er schon in einer wichtigen Abhandlung: Investigatio functionum ex data differentialium conditione, (Novi Comm. Acad. Petrop. T. IX. a. a. 1762.) diese Methode von Grund aus entwickelt, und den Algorithmus derselben angegeben.

Die Integrirung der Gleichungen mit partiellen Differentialen veranlaßte eine Untersuchung, über welche die größten Analysten sich nicht ganz vereinigten. Sie betraf die Beschaffenheit der willkürlichen Functionen, welche in die Integralgleichung einzuführten sind, wie die constanten Größen in den gewöhnlichen zwischen zwey veränderlichen Größen. D'Alembert behauptete, daß die willkürlichen Functionen dem Gesetze der Stetigkeit unterworfen bleiben müßten, daß sie durch irgend eine Curve dargestellt werden könnten, daß diese aber einen stetigen Zug haben müsse, so daß sie ganz durch eine und dieselbe Gleichung zwischen ihren Coordinaten ausgedruckt würde. Euler hingegen behauptete, daß jene Functionen auch unstetige (discontinuae) seyn dürften, oder daß die abbil-

bende Curve auch eine gesetzlose, wie eine aus freyer Hand gezogene seyn möchte. Den Schriftwechsel darüber zwischen beiden findet man in den Berliner und Petersburger Abhandlungen, und in den Opuscules von d'Alembert. La Grange trat (Miscell. Taurinensia, T. I. II.) zuerst Eulern ganz bey, schränkte aber in der Folge die Gesetzlosigkeit etwas ein. Condorcet gab sie auch nur mit gewissen Einschränkungen zu. Die Curve möchte aus Portionen von verschiedener Form bestehen, diese sollten aber zusammenhängen, und bey Gleichungen vom zweyten Grade an ihren Endpuncten eine gemeinschaftliche Berührende haben. (Mém. de Paris, 1772). La Place gab zu, daß bey der Aufgabe von schwingenden Saiten, wobey die Frage entstanden war, die unstetigen Functionen Statt haben könnten, und schränkte überhaupt die Zulässigkeit derselben nur auf gewisse Weise ein. (Mém. de Paris, 1779). Arbogast vertheidigte in der Preisschrift, die von der Petersburger Akademie 1790 gekrönt ward, Eulers Behauptung.

Integrationen einzelner Differentialgleichungen von d'Alembert findet man in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1746, 1748, 1750, und in der Sammlung seiner Opuscules. Von jenen ist schon vorher etwas angeführt. Eben daselbst (1748) zeigt er, wie Differentialgleichungen integrirt werden, worin außer dem Differentialquotienten $dx : dy$ nur x und y in der ersten Potenz vorkommen, wie $x = y\varphi z + \varphi' z$, wo $z = \frac{dx}{dy}$ ist, und φ, φ' Functionszeichen sind. Noch daselbst, wie ein System von zwey Gleichungen,

$$\partial x + (Cx + Dy)\,\partial t = o,$$
$$\partial x + (Kx + Ly)\,\partial t = o,$$

oder ein System von noch mehrern solchen, worin mehrere veränderliche Größen enthalten sind, integrirt werden kann. Er ist darauf durch seine Untersuchungen über die Ursachen der Winde, und den Widerstand flüssiger Mittel

geleitet. Montucla schreibt ihm auch eine Methode zu, die Gleichung,
$AXy^n dy + By^{n+1} X' \partial x + Cy^q X'' dx = o$, zu integriren (Hist. des Mathém. T. III. p. 177.) Es sind hier X, X', X'' Functionen von x, und A, B, C, unveränderliche Größen. Die Methode findet man in Bougainville's Traité du Calcul intégral, T. II. Ch. 7. Man vergleiche die Auflösung der Gleichung,

$$\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x,$$

in Eulers Integralrechnung, T. I. §. 429. Hier sind P und Q Functionen von x. In den genannten Memoiren ist eine Methode von Alembert, Gleichungen von höhern Graden, wie
$\partial^n y + a\partial^{n-1} y\partial x + b\partial^{n-2} y\partial x^2 \ldots + X\partial x^n = o$, zu integriren. Euler hatte schon in dem 7ten Bande der Miscell. Berol. 1743. die Gleichung, $o = Ay + \frac{B\partial y}{\partial x} + \frac{C\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{D\partial^3 y}{\partial x^3} +$ etc, aufgelöset, wo das Glied X, eine Function von x, noch fehlte. Hernach aber hat er diese Einschränkung beseitigt, und in den neuen Petersb. Commentarien gezeigt, wie eine solche Gleichung allgemein, ohne daß $X = o$ ist, integrirt wird. Man sehe auch die Institt. Calc. integr. T. II. Cap. 2 et 3. La Grange hat in den Mém. de Berlin 1772 sogar die Bedingungen gefunden, unter welchen eine solche Gleichung selbst bey veränderlichen Coefficienten integrirbar ist.

Der Staatsrath Fuß in Petersburg, Eulers Zögling und arbeitsamer Gehülfe in den vielen Jahren seiner Blindheit, hat in den Schriften der dortigen Akademie der Wissenschaften viele wichtige Abhandlungen zur höhern Analysis des Unendlichen geliefert.

Die beiden ersten Analysten unserer Zeit, la Grange und la Place, haben sowohl durch ihre Untersuchungen über die Integralrechnung unmittelbar, als durch die höchst feinen Rechnungen in der physischen Astronomie

mehr geleistet als man vor einiger Zeit noch vielleicht nicht erwarten durfte. Ich muß es dem künftigen Verfasser einer ausführlichern Geschichte der Integralrechnung, als in diesem Artikel möglich war, überlassen, die Verdienste dieser beiden Analysten würdig darzustellen. Aus dem unten anzuzeigenden Werke von la Croix, über Differential- und Integralrechnung, kann man sich von ihren Erweiterungen der höhern Analysis am vollständigsten und bequemsten unterrichten. Das Register liefert eine sehr gute Uebersicht derselben. In Absicht auf die physische Astronomie findet man ihre wichtigsten Untersuchungen ziemlich ausführlich angezeigt in dem vierten Theile der Geschichte der Mathematik von Montücla, die durch La Lande vollendet ist.

La Grange ist der Erfinder einer neuen und sehr verbesserten Methode die Veränderungen in der Relation zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen zu betrachten. Zwey veränderliche Größen x und y haben irgend eine Relation, wodurch für jedes x die zugehörige y bestimmt wird. Giebt man allen y oder einigen y Werthe, die unendlich wenig von den durch jene Relation bestimmten Werthen verschieden sind, so sind die Unterschiede der Werthe das, was Variationen heißen. Die ganze Untersuchung von der Erfindung einer Function, welcher eine gewisse Eigenschaft im größten oder kleinsten Maaße zukommt, beruht auf dieser Methode. Die beiden Bernoulli hatten Fragen dieser Art aufgelöset, aber nicht sowohl nach einer sichern Methode, als durch eine sehr scharfsinnige Bemerkung des Eigenthümlichen der Frage, worauf sie sehr künstlich die Auflösung gründeten. Euler hatte in seiner vortrefflichen Schrift über das isoperimetrische Problem im allgemeinsten genommen, 1744, viel geleistet, aber die Methode noch zu sehr an die Geometrie gebunden. La Grange gab seinen ersten Entwurf in den Abhandlungen der Turiner Gesellschaft für 1760 und 1761. Euler erkannte die Vorzüge dieser ganz analytischen Methode, und setzte sie mit mehrerer Deutlichkeit auseinander, gab ihr auch den Namen, Calculus variationum, in den Petersburger Commentarien für 1766. Eine ausführliche

Behandlung derselben ist in dem dritten Theile seiner Integralrechnung befindlich. Aus dem 16ten Bande der Petersburger Schriften für 1772 ist in den Supplementen eine Abhandlung darüber beygefügt.

Noch eine Nachricht von einigen allgemeinen, aber nur vorgeschlagenen, Integrations-Methoden.

Hermann lehrt eine gewisse Methode für alle Differentialgleichungen, (Comm. vet. Acad. Petrop. T. I.), und wendet sie auch auf leichte Fälle an; allein sie erfordert zu vieles Herumsuchen, und ist auch nicht allgemein hinreichend, daher auch nicht weiter befolgt.

Mit den beiden von Fontaine angegebenen Methoden ist es eben so gegangen. Man hat sie gerühmt, und sich ihrer nicht bedient.

Condorcet hat in seinem Werke über die Integralrechnung (1765) den Abriß einer allgemeinen Integrations-Methode, für jeden Grad der Gleichung und jede Anzahl veränderlicher Größen, geliefert. In dem Dictionnaire encyclopédique ist dieser Abriß auch mitgetheilt. Er verlangt gewisse Hülfstafeln, wozu er den Entwurf giebt. Aber niemand hat es gewagt, sich auf diese Arbeit einzulassen. Die Methode scheint mehr wegen des dadurch gezeigten Scharfsinns gerühmt, als für ausführbar erkannt zu seyn.

Der Freyherr von Pacassi hat in einer Abhandlung über eine neue Methode zu integriren, Wien 1785, und in einem Aufsatze, der in die physikalischen Arbeiten der einträchtigen Freunde zu Wien, 2ter Jahrg. 1786, eingerückt ist, eine allgemeine Integrationsmethode angeben wollen, wovon in Lamberts gelehrten Briefwechsel, Bd. V. S. 344. ff, eine von L. Oberreit verfaßte Nachricht und Beurtheilung zu finden ist.

Einige Annäherungs-Methoden, das $\int X \partial x$ durch einzelne berechnete Werthe von X zu finden, lehrten Newton in der Methodus differentialis; Thomas Simpson in Mathematical dissertations, 1743; Lambert in seinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, Th. II. Nro. IX.

Verzeichniß einiger Werke zur Integralrechnung.

D'Alembert schlägt in dem von ihm herrührenden ganz kurzen Artikel, Integral, in dem Dictionn. encyclopédique, folgende Werke zum Nachlesen vor, etwa in der Ordnung, wie sie genannt sind. Zuerst die Lectiones von Joh. Bernoulli, die schon oben von mir empfohlen sind. Nach diesen der zweyte Theil von Maclaurins treatise on fluxions, wovon eine französische Uebersetzung vorhanden ist. Ferner die Abhandlung von Newton de quadratura curvarum, und das Werk von Cotes: Harmonia mensurarum, wozu man in den Act. Er. 1718, 1719, und in den Petersb. Comment. T. VI. gute Erläuterungen finde, mehr in dem auch schon angeführten Werke von Walmesley. Insbesondere empfiehlt er den Traité du Calcul intégral par de Bougainville, le jeune, à Paris 1754, 1756. 2 Voll. in 4. Der zweyte Theil dieses Werks, der von den Differentialgleichungen handelt, scheint mir sehr gut abgefaßt zu seyn, und das beste, was bis dahin über die Integration derselben bekannt war, zu enthalten. Der erste Theil, von den Differentialformeln, möchte hin und wieder kürzer und netter seyn können. Montücla rühmt auch das Werk wegen der guten Methode und der Klarheit des Vortrages.

Die PP. Lesueur und Jacquier, aus dem französischen Hause der Minimen zu Rom, gaben 1768. zu Parma in zwey Quartbänden heraus: Elémens du calcul intégral, welche Montücla auch wegen der Ordnung und Deutlichkeit rühmt. Einige neue Theorien, die um die Zeit der Ausgabe dieses Werks nur erst waren gegründet worden, sind darin schon aufgenommen. Von dem Werke ist eine neue Auflage 1782 zu Parma und Leipzig (bey Weidmanns Erben und Reich) erschienen.

Von Eulers großem Werke über die Integralrechnung ist schon oben Nachricht gegeben. Die Deutlichkeit des Vortrages dieser schweren und weitläuftigen Wissenschaft ist ein merkwürdiger und auszeichnender Vorzug dieses Werks.

Den gegenwärtigen Zustand der Integralrechnung nach den Methoden und Erweiterungen durch die französischen Analysten lernt man aus folgenden Werken kennen.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, par J. A. J. Cousin, à Paris, l'an IV. 1796. 2 voll. in 4. 320 u. 284 S. Die erste Ausgabe erschien im Jahr 1777 in zwey Octavbänden. Man verbinde damit zur Anwendung der allgemeinen Rechnung die Introduction à l'étude de l'Astronomie physique desselben Verfassers, à Paris 1787. in 4. 324 S.

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par *S. F. la Croix*, à Paris, An. V. = 1797. VI. = 1798. 2 voll. in 4. 520 u. 732 S. Damit ist verbunden Traité des différences et des séries, à Paris, An VIII. = 1800. in 4. 578 S. Die Nummern der Paragraphen laufen aus jenem Werke in dieses fort. Ein ausführliches Real-Register von 34 Seiten erleichtert den Gebrauch dieses Werkes gar sehr.

Traités du Calcul différentiel et du Calcul intégral par Charles Bossut, à Paris An VI. 2 Tom. in 8. 600 und 562 S. So schätzbar auch das Werk durch manches dem Verfasser Eigene ist, so sieht man doch auch, daß er sich mehr nach ältern Analysten gebildet hat. Daher findet man auch in Absicht auf die Integrationsmethoden nicht die Allgemeinheit und Vollständigkeit bey ihm, wie bey la Croix, dem er überhaupt an philosophischer Behandlungsart nachsteht.

In Deutschland fehlt es zwar nicht an guten Lehrbüchern über die Integralrechnung, allein wir besitzen noch kein ausführliches System, das dem jetzigen Zustande der Wissenschaft angemessen wäre. Die Leichtigkeit, womit wir uns ausländischer Werke bedienen, ist vielleicht Schuld daran. Kästners Analysis des Unendlichen kam zuerst 1761 heraus. Die neuern Theorien konnten in den folgenden Ausgaben nur kurz eingeschaltet werden. Um dieselbe Zeit (1760) kam Karstens erstes Lehrbuch der Mathematik, Mathesis theoretica elementaris et subli-

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang} \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{aa+bx} + C.$$

Denn man setze $x = u - b$, so verwandelt sich das Differential in $\frac{\partial u}{uu+aa-bb}$; also ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{(aa-bb)}} \text{Ang. tang.} \frac{u}{\sqrt{(aa-bb)}}, \text{ aus}$$

(15.), woraus der angegebene Werth für y sogleich folgt. — Das Integral konnte auch unmittelbar aus 37. des Art. Differentialformeln gefunden werden.

Da Ang. tang. $\frac{b+x}{\sqrt{(aa-bb)}}$ den Winkel zu der Tangente $\frac{b}{\sqrt{(aa-bb)}}$ enthält, welcher unter der Constante begriffen werden mag, so nehme man den Unterschied dieser Winkel, welcher ist

Ang. tang $\frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{aa+bx}$ (Goniometrie, 33.), und es erhält nun y den zweyten angegebenen Werth, welcher von dem erstern in der Constante verschieden ist.

$$28. \int \frac{\partial x}{aa+2ax+xx} = C. - \frac{1}{a+x}.$$

Dieses algebraische Integral macht den Übergang von einem der transscendenten Integrale (25, 27.) zu dem andern.

$$29. \quad \partial y = \frac{cx\partial x}{aa+2bx+cxx},$$

$$y = \tfrac{1}{2}\log(aa+2bx+cxx) - \int \frac{b\partial x}{aa+2bx+cxx} + \text{Const.}$$

Erhellt sogleich durch die Differentiation. Der zweyte Theil wird aus den Formeln (25 — 27.) gefunden.

$$30.\quad \partial y = \frac{\partial x}{x(aa+2bx+cxx)},$$

$$y = \frac{1}{2aa}\log.\frac{xx}{aa+2bx+cxx} - \frac{b}{aa}\int\frac{\partial x}{aa+2bx+cxx} + \text{Conſt.}$$

Der Differentialfactor wird in zwey Brüche, $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{aa+2bx+cxx}$, zerlegt, wo $Aaa=1$; $B=-Ac$; $C=-2Ab$ iſt.

$$31.\quad \partial y = \frac{x^m\partial x}{aa+2bx+cxx},$$

wo m eine ganze, poſitive oder negative, Zahl iſt.

Das Integral wird gefunden, wenn mittelſt der Diviſion der Exponent von x bis auf 1 oder 0 gebracht wird.

$$32.\quad \partial y = \frac{\partial x}{(aa+2bx+cxx)^n}.$$

Zur Abkürzung ſey $aa+2bx+cxx=u$, ſo iſt

$$y = \frac{1}{2(n-1)(caa-bb)}\left\{\frac{b+cx}{u^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{c\partial x}{u^{n-1}}\right\}.$$

Denn man ſetze $cx=z-b$, ſo iſt

$\partial y = \frac{\partial z : c}{(aa-bb:c+zz:c)}$. Nun folgt das Integral aus (21.), wenn für z wieder deſſelben Werth geſetzt wird, mit Beybehaltung der Bezeichnung u. Das In-

tegral $\int \frac{\partial x}{u^{n-1}}$ wird auf ähnliche Art gefunden, und so ferner bis zu dem $\int \frac{\partial x}{u}$ aus den Formeln in (25—27.).

33. $$\partial y = \frac{x \partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n}.$$

Es sey wiederum die Wurzelgröße $= u$, so ist

$$y = -\frac{1}{2(n-1)cu^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{\partial x}{u^n}.$$

34. $$\partial y = \frac{(A + Bx)\partial x}{(aa + 2bx + cxx)^n},$$

wo A und B gegebene Größen sind. Die Function y wird mittelst (32. 33.) gefunden.

35. $\partial y = \frac{M}{N} \partial x$, wo M und N rationale ganze Functionen von x sind. Auch sey die höchste Potenz von x in der Function M niedriger als die höchste in N. Sollte dieses nicht seyn, so sind durch Division die höhern Potenzen abzusondern, so daß die Function im Zähler einen niedrigern Grad erhalte als die Function im Nenner. Der abgesonderte Theil gehört für den Fall in (2.).

I. Die Function N werde in ein Product aus Factoren von der Form $x \pm p$, oder $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, verwandelt, dadurch daß man $N = 0$ setzt und die Wurzeln dieser Gleichung sucht. Jede mögliche Wurzel p giebt einen Factor $x - p$; je zwey unmögliche, deren Summe möglich ist, geben einen trinomischen Factor. Sind zwey unmögliche Wurzeln, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, so geben diese den Factor $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$. (Gleichung, 42.), welchem man auch die Form, $x^2 - 2ax\cos\zeta + aa$, geben kann.

II. Nun werde der Bruch $\frac{M}{N}$ in partielle Brüche zerlegt. Sind alle Factoren ungleich, so entsteht aus

jedem einfachen Factor von N ein partieller Bruch $\frac{A}{x+p}$, und aus einem Doppelfactor der partielle Bruch, $\frac{(A+Bx)\partial x}{x^2-2axcos\zeta+aa}$. Sind zwey gleiche einfache Factoren in N vorhanden, so entstehen daraus die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^2}+\frac{B}{(x+p)}$, und aus zwey gleichen Doppelfactoren die partiellen Brüche,

$$\frac{A+Bx}{(xx-2axcos\zeta+aa)^2}+\frac{C+Dx}{xx-2axcos\zeta+aa}.$$

Aus drey gleichen einfachen Factoren entstehen die partiellen Brüche, $\frac{A}{(x+p)^3}+\frac{B}{(x+p)^2}+\frac{C}{x+p}$, und aus drey gleichen Doppelfactoren, die man zur Abkürzung durch u bezeichne, die Brüche, $\frac{A+Bx}{u^3}+\frac{C+Dx}{u^2}+\frac{E+Fx}{u}$.

Auf ähnliche Art entstehen aus vier oder mehr gleichen Factoren vier oder mehrere solcher Brüche, deren Nenner Potenzen von dem Factor sind. S. Function, (28. ff.)

III. Die Integration jeder der Differentialformeln mit einem Factor zu ∂x, der ein Bruch, wie die in II. angegebenen, ist, ergiebt sich aus den vorher behandelten Formeln.

IV. Es wird hiebey vorausgesetzt, daß die Wurzeln der Gleichung, $N=0$, alle gefunden werden können. Dieses ist freylich durch bestimmte Methoden nur für Gleichungen bis zum vierten Grade möglich, und bey höhern Graden muß man mit Annäherungen zufrieden seyn, wie es selbst bey jenen niedrigern wegen der Irrationalität der Wurzeln der Fall ist. Bey den Fortschritten in der höhern Analysis muß das, was sie aus der niedern voraussetzt, als vollkommen gegeben betrachtet

werden. Es kommt hier nicht auf Erweiſe von Sätzen an, ſondern auf Methoden. Die Integration der Formel $\frac{M}{N}\partial x$ leidet dadurch als Methode nicht, wenn man auch in einem und dem andern Falle die Factoren von N nicht angeben könnte. Das gehört nicht für die Integralrechnung, ſondern für die Algebra.

36. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{x^n + a^m}$, wo $m < n$ iſt, und beide ganze poſitive Zahlen ſind.

Der Nenner hat $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Paare trinomiſcher Factoren von der Form $xx - 2axcol\varphi + aa$, wo $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$ iſt, und $2k+1$ jede der ungeraden Zahlen von 1 bis $n-1$ oder bis $n-2$ bedeutet. Jeder dieſer Factoren giebt einen partiellen Bruch, $\frac{(A+Bx)\partial x}{xx - 2axcol\varphi + aa}$, worin iſt

$$A = +\frac{2a^{m+2}}{na^n} col\frac{m}{n}(2k+1)\pi;$$

$$B = -\frac{2a^{m+1}}{na^n} col\frac{m+1}{n}(2k+1)\pi.$$

Für ein ungerades n kommt zu den $\frac{1}{2}(n-1)$ Brüchen mit dreytheiligem Nenner noch der Bruch, $\frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{\partial x}{x+a}$, hinzu. Wie die Werthe von A und B bequem gefunden werden, ſ. in dem Zuſatze zu dieſem Abſchnitte.

Aus den partiellen Brüchen findet man mittelſt (25. ff.) die Integrale.

37. Exempel. $\int \frac{\partial x}{x^4+1} =$

$$-\tfrac{2}{4}\cos\frac{\pi}{4}\log V(xx-2x\cos\frac{\pi}{4}+1)$$
$$+\tfrac{2}{4}\sin\frac{\pi}{4}\,\text{Ang. tang}\,\frac{x\sin(\pi:4)}{1-x\cos(\pi:4)}$$
$$-\tfrac{2}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\log V(xx-2x\cos\frac{3\pi}{4}+1)$$
$$+\tfrac{2}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\,\text{Ang. tang}\,\frac{x\sin(3\pi:4)}{1-x\cos(3\pi:4)}.$$

Es ist der Logarithme von der Wurzel des Trinomium genommen, und dagegen der Factor 2 vorgesetzt, um die numerischen Coefficienten gleich groß zu haben.

38. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{x^n - a^n}$, wo $m < n$ ist.

Der Nenner hat, wenn n gerade ist, $\frac{1}{2}(n-2)$ Paare trinomischer Factoren von der Form, $xx - 2ax\cos\varphi + aa$, nebst den beiden einfachen $x+a$ und $x-a$. Ist n ungerade, so ist die Anzahl jener $= \frac{1}{2}(n-1)$, wozu der Factor $(x-a)$ kommt. Der Winkel φ hat die Form $\frac{2k\pi}{n}$, wo 2k alle gerade Zahlen von 2 bis $n-2$ oder bis $n-1$ bedeutet. In dem partiellen Bruche $\frac{(A+Bx)\partial x}{xx-2ax\cos\varphi+aa}$ ist

$$A = -\frac{2a^{m+2}}{na^n}\cos\frac{m}{n}2k\pi,$$
$$B = +\frac{2a^{m+1}}{na^n}\cos\frac{m+1}{n}2k\pi.$$

Für ein gerades n kommen hinzu die partiellen Brüche,

$$\frac{(+a)^m\partial x}{na^{n-1}(x-a)} - \frac{(-a)^m\partial x}{na^{n-1}(x+a)};$$

für ein ungerades n der Bruch $\frac{(+a)^m\partial x}{na^{n-1}(x-a)}$.

39. Exempel I. $\partial y = \frac{\partial x}{x^4 - 1}$, das ist,

$$\partial y = \tfrac{1}{4}\frac{\partial x}{x-1} - \tfrac{1}{4}.\frac{\partial x}{x+1} - \tfrac{2}{4}.\frac{\partial x}{xx+1}.$$

Der trinomiſche Factor iſt hier in einen binomiſchen übergegangen, weil $\cos\varphi = \cos\frac{2\pi}{4} = 0$ iſt. Es iſt $A = -\frac{2}{4}.1$; $B = 0$. Die Integration dieſer Brüche giebt $y = \frac{1}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x+1) - \frac{2}{4}$ Ang. tang x.

Exempel II. $\partial y = \frac{\partial x}{x^5 - 1}$, das iſt

$$\partial y = \tfrac{1}{5}.\frac{\partial x}{x-1} + \tfrac{2}{5}.\frac{(-1 + x\cos 72^\circ)\partial x}{xx - 2x\cos 72^\circ + 1}$$
$$+ \tfrac{2}{5}.\frac{(-1 + \cos 144^\circ)\partial x}{xx - 2x\cos 144^\circ + 1}, \text{ wo}$$

$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ$, und $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos 144^\circ$ iſt. Zufolge (27, 29.), da $aa - bb$ in (27.) hier iſt $1 - \cos\varphi^2 = \sin\varphi^2$, iſt hieraus

$$y = +\tfrac{1}{5}\log(x-1)$$
$$-\tfrac{2}{5}\sin 72^\circ.\text{ Ang. tang }\frac{x\sin 72^\circ}{1 - x\cos 72^\circ}$$
$$+\tfrac{2}{5}\cos 72^\circ.\log\sqrt{(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1)}$$
$$-\tfrac{2}{5}\sin 144^\circ.\text{ Ang. tang }\frac{x\sin 144^\circ}{1 - x\cos 144^\circ}$$
$$+\tfrac{2}{5}\cos 144^\circ.\log\sqrt{(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1)}.$$

40. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{1 - 2x^n\cos\alpha + x^{2n}}$.

Der Differentialfactor läßt ſich in n partielle Brüche von der Form, $\frac{A + Bx}{1 - 2x\cos\varphi + xx}$, zerlegen, wo φ die

Werthe, $\frac{\alpha}{n}, \frac{2\pi+\alpha}{n}, \frac{4\pi+\alpha}{n}$, etc. hat. (S. unten 47.). Dadurch wird die Integration auf die in (25. ff) gewiesenen gebracht.

41. $\partial y = \frac{x^{pn:q-1}\partial x}{1-2x^n\cos\alpha+x^{2n}}$, wo p, q, n, ganze Zahlen sind.

Man setze $x^n = z^q$, so ist $x^{\frac{pn}{q}} = z^p$, und $\frac{pn}{q} x^{\frac{pn}{q}-1}\partial x = pz^{p-1}\partial z$. Daraus ist

$$\partial y = \frac{q}{n}\cdot\frac{z^{p-1}\partial z}{1-2z^q\cos\alpha+z^{2q}},$$

welches die Differentialformel in (40) ist.

Oder man setze $x = z^q$, so ist

$$\partial y = \frac{qz^{pn-1}\partial z}{1-2z^{qn}\cos\alpha+z^{2qn}}.$$

42. Wenn in (41.) der Factor q in dem Exponenten qn und 2qn der zweyten Formel eine Potenz der Zahl 2 ist, so läßt sich der Nenner in zwey trinomische Factoren zerlegen, worin die Exponenten von 2 halb so groß sind, als in jenem, also Potenzen von 2 bleiben. Denn es sey die Function

$a^2+bu^2+u^4 = (f+gu+u^2)(f-gu+u^2)$,

so ist $f^2 = a^2$, und $2f-g^2 = b$, also $g^2 = 2a-b$, und die Zerlegung ist möglich, wenn $2a > b$ ist. Bey einem negativen b, das ist für die Function $a^2-bu^2+u^4$, ist sie immer möglich. Diese Fälle sind in (41.) vorhanden.

Der Bruch $\frac{1}{a^2+bu^2+u^4}$ wird nun in die Brüche, $\frac{A+Bu}{f+gu+u^2} + \frac{C+Du}{f-gu+u^2}$, zerlegt. Man

setze $u^2 = z^{qn}$, so ist $u = z^{qn:2}$, wo der Exponent $qn:2$ eine ganze Zahl bleibt. Mit den durch diese Substitution erhaltenen beiden Brüchen wird eben so verfahren, wie mit dem Bruche $\frac{1}{a^4 + bu^2 + u^4}$, und so ferner, bis daß man auf Nenner, wie $1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}$, kommt. Zuletzt werden alle partiellen Brüche mit dem Zähler in ∂y, nämlich $qz^{pn-1}\partial z$, multiplicirt. Dadurch erhält man Differentialformeln von der Form $\frac{z^{rn-1}\partial z}{1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}}$, deren Integration von derjenigen der Formel $\frac{z^{n-1}\partial z}{1 - 2z^n \cos\varphi + z^{2n}}$ abhängt.

Dieses weitläuftigere Verfahren als dasjenige, welches in (40.) angegeben ist, hat Cotes gebraucht, da ihm das letztere noch nicht bekannt war. Man sehe in der Harmonia mensurarum, Forma XXIX, XXX. cas. 2. und die Analyse des mesures par Walmesley, pag. 202.

43. Hier sieht man, wie man die Potenzen der x mit gebrochnem Exponenten wegschaffen könne. Die Differentialformel sey $\partial y = \frac{x^{m:r-1}\partial x}{a + bx^n}$. Haben m und n keinen gemeinschaftlichen Factor, so setze man $x = z^r$, so ist $x^m = z^{mr}$; $x^{m:r} = z^m$, und

$\frac{m}{r} x^{m:r-1}\partial x = mz^{m-1}\partial z$, also $\partial y = \frac{rz^{m-1}\partial z}{a + bx^{nr}}$.

Haben m und n einen gemeinschaftlichen Factor, so daß $m = \mu\eta$; $n = \nu\eta$, so setze man $x^\eta = z^r$, und es ist $x^{m:r} = z^\mu$; $x^n = z^{\nu r}$, und $\partial y = \frac{r}{\eta} \cdot \frac{z^{\mu-1}\partial z}{a + z^{\nu r}}$.

Zusatz.

Die Zerlegung gebrochner rationaler Functionen.

44. Aufg. Es sind M, N, P, Q, R, S, rationale ganze Functionen von x, und $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}$.

Die Function M sey von einem niedrigern Grade als N, und N enthalte jeden Factor nur einfach, auf welchen Grad er auch steige: es soll der Zähler P des partiellen Bruchs $\frac{P}{Q}$ aus dem Nenner desselben gefunden werden, ohne daß es nöthig sey, den andern Nenner S zu kennen.

I. Es ist

$$M = PS + QR.$$
$$N = QS.$$
$$\partial N = S\partial Q + Q\partial S.$$

Da PS von keinem höhern Grade als M, also von einem niedrigern als N, das ist QS, ist, so ist P von einem niedrigern Grade als Q.

II. Es sey p eine der Wurzeln der Gleichung $Q = 0$, so ist, wenn $x = p$ gesetzt wird, und M', P', S', so wie $\frac{\partial N'}{\partial Q'}$ die Werthe von M, P, S, $\frac{\partial N}{\partial Q}$ für $x = p$ sind, wodurch $Q = 0$ wird,

$$M' : S' = P' ; \qquad \partial N' : \partial Q' = S';$$

also $M'(\partial Q' : \partial N') = P'$.

III. Es sey zuerst $Q = x - p$, so ist P eine bestimmte Größe A. Dadurch ist $P' = P$, und $P = A = M'(\partial x : \partial N')$.

IV. Es sey zweytens Q ein trinomischer Factor, $xx - 2ax + b$, und die Würzeln der Gleichung, $Q = 0$, seyn, p, q; die Werthe von M, P, S, $\frac{\partial N}{\partial Q}$ für $x = p$

seyn wie vorher M', P', S', $\frac{\partial N'}{\partial Q'}$, und für $x=q$ seyn dieselben M'', P'', S'', $\frac{\partial N''}{\partial Q''}$, so ist $P'=M'(\partial Q':\partial N')$; $P''=M''(\partial Q'':\partial N'')$.

V. Nun ist P eine Function des ersten Grades von x, oder $P=A+Bx$, wo A und B zu bestimmen sind. Es ist

$$P' = A + Bp,$$
$$P'' = A + Bq.$$

Daher $A = \frac{pP''-qP'}{p-q}$,

$$B = \frac{P'-P''}{p-q}.$$

Das ist

$$A = -\frac{qM'}{p-q}\cdot\frac{\partial Q'}{\partial N'} + \frac{pM''}{p-q}\cdot\frac{\partial Q''}{\partial N''},$$
$$B = \frac{M'}{p-q}\cdot\frac{\partial Q'}{\partial N'} - \frac{M''}{p-q}\cdot\frac{\partial Q''}{\partial N''}.$$

VI. Es ist $\partial Q=(2x-2a)\partial x$, also $\partial Q'=(2p-2a)\partial x$; $\partial Q''=(2q-2a)\partial x$. Nun ist $p+q=2a$ (Gleichung 40.), also $\partial Q'=(p-q)\partial x$; $\partial Q''=(q-p)\partial x$. Dadurch ist

$$A = -qM'\cdot\frac{\partial x}{\partial N'} - pM''\cdot\frac{\partial x}{\partial N''},$$
$$B = M'\cdot\frac{\partial x}{\partial N'} + M''\cdot\frac{\partial x}{\partial N''}.$$

Sind p und q unmögliche Größen, so muß sich das unmögliche in den Werthen von A und B aufheben.

VII. Auf ähnliche Art kann man die Function P finden, wenn Q einen höhern Grad als den zweyten hat,

wofern nur die Wurzeln der Gleichung $Q = o$ sich bequem angeben lassen.

VIII. Die Function P muß von einem niedrigern Grade als Q seyn, weil zur Bestimmung derselben nicht mehr Gleichungen gegeben werden, als Factoren in Q sind. Daher kann P nicht mehr Glieder, als Q Factoren enthalten. Da das erste Glied eine bestimmte Größe ist, so ist die höchste Potenz von x in P niedriger, als die höchste in Q. Aber es hindert nichts, daß R nicht höhern Grades seyn dürfte, als S, da der Zähler R gar nicht in Rechnung kommt. Daher darf auch M höhern Grades seyn als N, wofern man nur nicht alle partiellen Brüche auf die hier für den Bruch $\frac{P}{Q}$ gewiesene Art suchen will. Den letzten muß man, wenn M höhern Grades als N ist, durch Absonderung der gefundenen Brüche von $\frac{M}{N}$ bestimmen.

45. I. Es sey $Q = (x-p)^s$, so ist (Function 28.) der Bruch $\frac{M}{N}$ zu zerlegen in die Brüche, $\frac{A}{(x-p)^s} + \frac{B}{x-p} + \frac{R}{S}$. Es ist also $P = A + B(x-p)$, und $M = AS + BS(x-p) + R(x-p)^s$. Daraus ist $M' = AS'$, aber S' kann aus der Gleichung, $\partial N = S\partial Q + Q\partial S$, nicht gefunden werden, da ∂Q wie $Q = o$ ist für $x = p$. Man nehme das zweyte Differential von N, nämlich

$$\partial^2 N = S\partial^2 Q + 2\partial S.\partial Q + \partial^2 S.Q,$$

so ist

$$\partial^2 N' : \partial^2 Q' = S' \text{ oder } \partial^2 N' : 2\partial x^2 = S',$$

also $A = M'(2\partial x^2 : \partial^2 N')$.

II. Ferner werde M differentiirt, so ist

$$\partial M = P\partial S + S\partial P + Q\partial R + R\partial Q,$$

und $\partial M' = P'\partial S' + S'\partial P'$,

das ist $\partial M' = A\partial S' + S'.B\partial x$.

III. Um $\partial S'$ zu erhalten, differentiire man N zum drittenmahle. Es ist

$\partial^3 N = S.\partial^3 Q + 3\partial S.\partial^2 Q + 3\partial^2 S.\partial Q + \partial^3 S.Q.$

Daraus ist $\partial^3 N' = 3\partial S'.\partial^2 Q'$, weil $\partial^3 Q = 0$, also $\partial S' = \partial^3 N' : 3\partial^2 Q'$, oder $\partial S' = \partial^3 N' : 6\partial x^2$.

IV. Hierdurch ist $\partial M' = A(\partial^3 N' : 6\partial x^2) + B(\partial^2 N' : 2\partial x)$, so daß

$B = 2\partial M'\partial x : \partial^2 N' - A(\partial^3 N' : 3\partial^2 N'\partial x)$.

oder

$B = 2\partial M'\partial x : \partial^2 N' - 2M'(\partial^3 N'\partial x : 3(\partial^2 N')^2)$.

V. Exempel. $\frac{M}{N} = \frac{x^m}{3x^4 - 4x^3 + 1}$. Ein Quadratfactor des Nenners ist $Q = (x-1)^2$. Es ist $\partial N = -12x^2\partial x + 12x^3\partial x$; $\partial^2 N = -24x\partial x^2 + 36x^2\partial x^2$; $\partial^3 N = -24\partial x^3 + 72x\partial x^3$, also ist $\partial N' = 0$; $\partial^2 N' = +12\partial x^2$; $\partial^3 N' = +48\partial x^3$. Ferner ist $\partial M = mx^{m-1}\partial x$; $M' = 1$; $\partial M' = m\partial x$.

Daraus $A = +\frac{1}{6}$; $B = \frac{m}{6} - \frac{2}{6}$, und der partielle Bruch, der aus dem Factor $(x-1)^2$ des Nenners N entsteht, ist $\frac{1}{6(x-1)^2} + \frac{3m-4}{18(x-1)}$.

Dieses Beyspiel kann zur Erläuterung von 44. VIII. dienen, wenn m grösser als 4 genommen wird.

VI. Aus der für den Factor $(x-p)^2$ gezeigten Methode wird man abnehmen, wie man für höhere Potenzialfactoren den zugehörigen Zähler des partiellen Bruches finden könne, wenn man nicht unmittelbar den Factor S in Rechnung bringen will, der allerdings aus dem Nenner N durch den Factor Q gefunden werden kann.

VII. Nach derselben Methode kann man auch die Zähler der partiellen Brüche suchen, die aus dem Qua-

drate oder einer höhern Potenz des trinomischen Factors, $xx + ax + b$, entstehen. Wenn N das Quadrat desselben enthält, so entstehen daraus zwey Brüche,

$$\frac{A + Bx}{(xx + ax + b)^s} + \frac{C + Dx}{xx + ax + b}.$$

Hier müßte man zuerst die beiden Theile A und C zu bestimmen suchen, mittelst der Wurzeln p und q der Gleichung, $xx + ax + b = 0$, eben so wie es in (44. IV—VI.) geschehen ist. Dann würde man die Coefficienten B und D suchen, jeden durch dieselben Wurzeln p und q, so wie vorher in (IV.) B gefunden ist.

VIII. Das hier gezeigte Verfahren ist ein anderes, als das von Euler in der Differentialrechnung P. II. Cap. XVIII. gelehrte, wovon in dem Artikel, Function (52—55.) etwas mitgetheilt ist. Für Doppelfactoren scheint jenes deutlicher zu seyn. Bey Potenzialfactoren gebraucht Euler den Factor S zur Berechnung des Zählers P, ob er gleich Anfangs (§. 403.) es als einen Vorzug der Methode durch Differentiiren die partiellen Brüche zu finden, angiebt, daß man nicht nöthig habe, den zweyten Factor des Nenners zu suchen.

Die folgenden Zerlegungen dienen zu Beyspielen der hier gezeigten Methode, und liegen zugleich bey den Integrationen (36. ff.) zum Grunde. In dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Analysis, VI. und VII. ist schon von diesen Zerlegungen gehandelt. Wegen der bessern Übersicht des Ganzen sey hier eine Wiederholung gestattet, die aber auch ihr eigenes hat.

46. Aufg. Den Bruch $\frac{x^m}{x^n \pm a^n}$ in partielle Brüche mit binomischen oder trinomischen Nennern zu zerlegen. Der Exponent m sey kleiner als n.

I. Aus Goniometrie (100.) ist

$(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$,

oder

$(a\cos\varphi \pm a\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = a^n(\cos n\varphi \pm \sin n\varphi.\sqrt{-1})$.
Man ſetze $\sin n\varphi = 0$, ſo iſt $\cos n\varphi = +1$, oder $\cos n\varphi = -1$, jenes, wenn $n\varphi = 2k\pi$, dieſes wenn $n\varphi = (2k+1)\pi$, iſt und

$$(a\cos\varphi \pm a\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = a^n,$$

oder $$(a\cos\varphi \pm a\sin\varphi.\sqrt{-1})^n = -a^n.$$

II. Der $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ erhalten in beiden Fällen n verſchiedene Werthe (Goniometrie. V.). Diejenigen Winkel, welche verſchiedene Sinus und Coſinus geben, ſind, wenn $\cos n\varphi = +1$ genommen wird, für ein gerades n,

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \ldots \frac{n\pi}{n} \ldots \frac{2n-2}{n}\pi;$$

für ein ungerades n,

$$0, \frac{2\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}\pi, \frac{n+1}{n}\pi \ldots \frac{2n-2}{n}\pi.$$

Iſt $\cos\varphi = -1$, ſo ſind dieſe Winkel für ein gerades n,

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n-1}{n}\pi, \frac{n+1}{n}\pi \ldots \frac{2n-1}{n}\pi;$$

für ein ungerades n,

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{n\pi}{n} \ldots \frac{2n-1}{n}\pi.$$

Die Winkel, deren Summe vier Rechte oder 2π beträgt, haben einerley Coſinus, und gleiche aber entgegengeſetzte Sinus. Man hat alſo, außer den Winkeln 0 und π, nur die Winkel unter zwey Rechten zu nehmen nöthig, und für die Sinus derer über zwey Rechte zu ſetzen $-\sin\varphi$. Solchergeſtalt ſind für $\pm a^n$ je zwey Factoren, $\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}$ und $\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}$, worin φ denſelben Werth hat. In den Werthen von φ, ſie ſeyn $\frac{2k\pi}{n}$ oder $\frac{2k+1}{n}\pi$, iſt $2k$ ſo wie $2k+1$ nicht größer als n zu nehmen.

III. Man bezeichne jeden der n Factoren in $(a\cos\varphi \pm a\sin\varphi.\sqrt{-1})^n$ durch x, wie in einer Gleichung jede ihrer Wurzeln durch daſſelbe Zeichen bedeutet wird, ſo daß ein Paar Wurzeln, mit demſelben Werthe von φ, ſey

$$x = a\cos\varphi + a\sin\varphi.\sqrt{-1},$$
$$x = a\cos\varphi - a\sin\varphi.\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man dieſe beſtimmten Werthe von x durch p und q, ſo ſind p und q zwey Wurzeln der Gleichung, $x^n - a^n = 0$, oder der Gleichung, $x^n + a^n = 0$, und die Functionen, $x^n - a^n$; $x^n + a^n$, haben die einfachen Factoren, $x - p$; $x - q$, oder den Doppelfactor, $x^2 - (p+q)x + pq$, das iſt, $x^2 - 2ax\cos\varphi + aa$. Iſt $\varphi = 0$ oder π, ſo hat die Function den Factor $x - a$ oder $x + a$. Die Function $x^n - a^n$ hat für ein gerades n die Factoren $x - a$ und $x + a$, für ein ungerades n den Factor $x - a$. In jenem Falle iſt für $\sin\varphi = 0$ der Werth von $x = \pm a$, in dieſem bloß $x = +a$. Die Function $x^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen einfachen Factor, für ein ungerades den $x + a$. Hier iſt bloß für ein ungerades n der Werth $\sin\varphi = 0$, und $x = -a$.

IV. Der Bruch $\frac{x^m}{x^n + a^n}$ werde in die partiellen, $\frac{P}{Q} + \frac{R}{S}$, zerlegt, und Q ſey ein trinomiſcher Factor, $xx - 2ax\cos\varphi + aa$. In der Formel (44. VII.) iſt $M = x^m$, $N = x^n + a^n$; $M' = p^m$; $M'' = q^m$; $\partial N = nx^{n-1}\partial x$; $\frac{\partial x}{\partial N'} = \frac{1}{np^{n-1}}$; $\frac{\partial x}{\partial N''} = \frac{1}{nq^{n-1}}$, alſo

$$A = -\frac{qp^m}{np^{n-1}} - \frac{pq^m}{nq^{n-1}},$$
$$B = \frac{p^m}{np^{n-1}} + \frac{q^m}{nq^{n-1}}.$$

Da $p = a(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$,
$q = a(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})$,

so ist $pq = aa$, also $p = \frac{aa}{q}$, und $q = \frac{aa}{p}$.

Dadurch $A = -\frac{1}{n} a^s (p^{m-n} + q^{m-n})$

$= -\frac{1}{n} \cdot \frac{a^s}{a^{2n-2m}} (q^{n-m} + p^{n-m})$,

und $B = \frac{1}{n} \cdot \frac{a^s}{a^{2n-2m}} (q^{n-m-1} + p^{n-m-1})$.

Nun ist
$p^{n-m} = a^{n-m}(\cos(n-m)\varphi + \sin(n-m)\varphi.\sqrt{-1})$,
$q^{n-m} = a^{n-m}(\cos(n-m)\varphi - \sin(n-m)\varphi.\sqrt{-1})$.
Also
$p^{n-m} + q^{n-m} = 2a^{n-m}\cos(n-m)\varphi$,
$p^{n-m-1} + q^{n-m-1} = 2a^{n-m-1}\cos(n-m-1)\varphi$.
Dadurch ist

$$A = -\frac{2a^s}{na^{n-m}}\cos(n-m)\varphi,$$

$$B = +\frac{2a^s}{na^{n-m}}\cos(n-m-1)\varphi.$$

Da für die Function $x^n + a^n$ zu setzen ist $\cos n\varphi = -1$, so ist $n\varphi = (2k+1)\pi$, und $(n-m)\varphi = (2k+1)\pi - \frac{m}{n}(2k+1)\pi$. Daher $\cos(n-m)\varphi = -\cos\frac{m}{n}(2k+1)\pi$, (Goniometrie, 17.). Eben so ist $\cos(n-m-1)\varphi = -\cos\frac{m+1}{n}(2k+1)\pi$.

Folglich

$$A = + \frac{2a^2}{na^{n-m}} \cos\frac{m}{n}(2k+1)\pi;$$

$$B = - \frac{2a}{na^{n-m}} \cos\frac{m+1}{n}(2k+1)\pi.$$

Solchergestalt wird jeder partielle Bruch von der Form $\frac{A+Bx}{xx-2axcos\varphi+aa}$, der aus $\frac{x^m}{x^n+a^n}$ entsteht, gefunden. Für $2k+1$ werden alle ungerade Zahlen von 1 bis $n-1$ oder $n-2$ gesetzt. In dem Falle, da n ungerade ist, giebt der Factor $x+a$ der Function x^n+a^n nach (44. II.) den partiellen Bruch $\frac{(-a)^m}{n(-a)^{n-1}} \cdot \frac{1}{x+a}$, oder $\frac{(-a)^m}{na^{n-1}} \cdot \frac{1}{x+a}$. Es ist nämlich $\partial N = nx^{n-1}\partial x$, und $\partial N' = n(-a)^{n-1}\partial x$.

V. Der Bruch $\frac{x^m}{x^n-a^n}$ wird auf gleiche Art zerlegt. Nur hat φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$, wo für die trinomischen Nenner $2k$ alle gerade Zahlen von 2 bis $n-2$ oder $n-1$ bedeutet, da die Werthe 0 und n für die binomischen Nenner gehören. Es ist nun $(n-m)\varphi = 2k\pi - \frac{m}{n}.2k\pi$, und $\cos(n-m)\varphi = \cos\frac{m}{n}.2k\pi$, (Goniometrie, 17.) so wie $\cos(n-m-1)\varphi = \cos\frac{m+1}{n}2k\pi$. Dadurch ist

$$A = - \frac{2aa}{na^{n-m}} \cos\frac{m}{n}.2k\pi,$$

$$B = + \frac{2a}{na^{n-m}} \cos\frac{m+1}{n}.2k\pi.$$

Für ein gerades n geben die Factoren $x-a$ und $x+a$ der Function x^n-a^n noch die partiellen Brüche, $\frac{(+a)^m}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{(-a)^m}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{x+a}$. Für ein ungerades n giebt der Factor $x-a$ den partiellen Bruch $+\frac{(+a)^m}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{x-a}$.

VI. Der Bruch $\frac{x^m}{a^n-x^n}$ wird in dieselben Brüche, wie der in V. zerlegt, nur daß die Werthe derselben den daselbst gefundenen entgegengesetzt sind, und daß $a-x$ statt $x-a$ zu setzen ist.

47. Aufg. Den Bruch $\frac{x^m}{1-2x^n\cos\alpha+x^{2n}}$ in partielle Brüche von der Form $\frac{A+Bx}{1-2x\cos\varphi+xx}$ zu zerlegen.

Es ist $1-2x^n\cos\alpha+x^{2n}$ ein Product aus n Factoren, $1-2ax+xx$; $1-2bx+xx$; $1-2cx+xx$; u. s. f., so daß $a=\cos\frac{\alpha}{n}$; $b=\cos\frac{2\pi+\alpha}{n}$; $c=\cos\frac{4\pi+\alpha}{n}$, u. s. w. (Goniometrie 107. 108.). Man bezeichne die Winkel dieser Cosinus überhaupt durch φ, so ist der Nenner eines der partiellen Brüche $=1-2x\cos\varphi+xx$. Es ist also in der Aufgabe (44.) für diesen Fall $M=x^m$; $N=1-2x^n\cos\alpha+x^{2n}$; $Q=1-2x\cos\varphi+xx$; $M'=p^m$; $M''=q^m$, wenn p und q die Wurzeln der Gleichung $Q=0$ bedeuten; $\frac{\partial N'}{\partial x}=2np^{n-1}$; $(p^n-\cos\alpha)$; $\frac{\partial N''}{\partial x}=2nq^{n-1}(q^n-\cos\alpha)$. Da p und q Wurzeln der

Gleichung, $1 - 2x\cos\varphi + xx = 0$, und auch der $1 - 2x^n\cos\alpha + x^{2n} = 0$, sind, so ist $pq = 1$, und $p^n + q^n = 2\cos\alpha$. (Zu vergl. am angef. O. 107.). Dadurch ist $\frac{\partial N'}{\partial x} = np^{n-1}(p^n - q^n)$;

$\frac{\partial N''}{\partial x} = nq^{n-1}(q^n - p^n)$, und

$$A = \frac{p^{n-m} - q^{n-m}}{n(p^n - q^n)};$$

$$B = \frac{-p^{n-m-1} + q^{n-m-1}}{n(p^n - q^n)}.$$

Da ferner die Wurzeln der Gleichung, $xx - 2x\cos\varphi + 1 = 0$, sind $p = \cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}$. und $q = \cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}$, so ist $p^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, und $q^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, also $p^n - q^n = 2\sin n\varphi.\sqrt{-1}$. Eben so ist $p^{n-m} - q^{n-m} = 2\sin(n-m)\varphi.\sqrt{-1}$; und $p^{n-m-1} - q^{n-m-1} = 2\sin(n-m-1)\varphi.\sqrt{-1}$. Der $\sin n\varphi$ ist immer $= \sin\alpha$, für jeden Werth von φ. Also ist

$$A = \frac{\sin(n-m)\varphi}{n\sin\alpha},$$

$$B = -\frac{\sin(n-m-1)\varphi}{n\sin\alpha},$$

wo für φ nach der Reihe die Werthe $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{2\pi+\alpha}{n}$, $\frac{4\pi+\alpha}{n}$, etc. zu setzen sind, bis daß man n derselben genommen hat. Irgend einer dieser Winkel, $\frac{2k\pi+\alpha}{n}$, giebt $(n-m)\varphi = 2k\pi - \frac{2mk\pi-(n-m)\alpha}{n}$, also $\sin(n-m)\varphi = -\sin\frac{2mk\pi-(n-m)\alpha}{n}$. (Es

niometrie, 16). Setzt man $n-k$ statt k, so ist $\sin(n-m)\phi = -\sin(2m\pi - \frac{2mk\pi+(n-m)\alpha}{n}) = +\sin\frac{2mk\pi+(n-m)\alpha}{n}$. In dem Coefficienten B ist $m+1$ statt m zu setzen. Man setze noch Eulers Differentialrechnung, p. 879.

Eine von diesen Methoden, rationale Brüche in einfache aufzulösen, ganz verschiedene, hat Euler in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. vorgetragen.

II. Classe, in welcher der Differentialquotient eine irrationale Function von x ist.

48. Die mit Wurzelgrößen behafteten Differentialformeln können manchmahl rational gemacht werden, wie in folgenden Beyspielen.

I. Die Formel $X\partial x(a+bx)^{\mu:\nu}$, worin X eine Function von x ist, wird eine rationale dadurch, daß $a+bx=z^\nu$ gesetzt wird. Dieses giebt $x=\frac{z^\nu-a}{b}$, und $\partial x=\frac{\nu}{b}z^{\nu-1}\partial z$. Durch die Substitution für x wird X eine rationale Function von z, die Z heiße, und es erhält daher die Formel die Gestalt $\frac{\nu}{b}Zz^{\mu+\nu-1}\partial z$.

II. Es sey $\partial y = X\partial x\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\mu:\nu}$. Man setze $\frac{a+bx}{f+gx}=z^\nu$, so ist $x=\frac{a-fz^\nu}{gz^\nu-b}$, und $\partial x = \frac{\nu(bf-ag)z^{\nu-1}dz}{(gz^\nu-b)^2}$. Durch die Substitutionen dieser Werthe wird die Differentialformel rational.

III. Es sey $\partial y = x^{m-1}\partial x\,(a+bx^n)^{\mu:\nu}$. Man setze $a+bx^n=u^\nu$, so verwandelt sich die Formel in $\frac{\nu}{n}u^{\mu+\nu-1}du\left(\frac{u^\nu-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$. Diese ist rational, wenn $\frac{m-n}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, positive oder negative, ist.

Oder man setze $a+bx^n=x^nz^\nu$, so wird dadurch die Formel verwandelt in $\frac{-\nu a^{m:n+\mu:\nu}z^{\mu+\nu-1}\partial z}{n(z^\nu-b)^{m:n+\mu:\nu+1}}$. Sie ist rational, wenn $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist.

IV. Es sey $\partial y=\frac{X\partial x}{\sqrt{(a+bx+xx)}}$. Man setze die Wurzelgröße $=x+z$, so ist, durch Erhebung aufs Quadrat, $a+bx=2zx+zz$, und $x=\frac{a-zz}{2z-b}$, wovon das Differential $\partial x=-\frac{2(a-bz+zz)z\partial z}{(2z-b)^2}$. Vermittelst dieser Werthe wird $\partial y=Z\partial z$, wo Z eine rationale Function von z ist.

V. Es sey $\partial y=X\sqrt{(a+bx-xx)}$. Man setze $xx-bx-a=(x-p)(x+q)$, so sind p und $-q$ die möglichen Wurzeln der Gleichung, $xx-bx-a=0$, und es ist $a+bx-xx=(p-x)(q+x)$. Nun sey $\sqrt{(p-x)(q+x)}=(p-x)z$, so ist durch Erhebung, $q+x=(p-x)z^2$, also $x=\frac{pz^2-q}{zz+1}$. Dadurch wird $\partial y=Z\partial z$, wo Z eine rationale Function von z ist.

VI. Es sey $\partial y = \partial x \sqrt{(a + 2bx + cxx)}$.

Man setze $a + 2bx + cxx = \frac{bb - ac}{uu - c}$,

oder $ac + 2bcx + c^2x^2 = \frac{bbc - acc}{uu - c}$,

so ist

$$bb + 2bcx + c^2x^2 = \frac{(bb - ac)uu}{uu - c},$$

und, $bb - ac = e^2$ gesetzt, wenn nämlich $bb > ac$ ist,

$$b + cx = \frac{eu}{\sqrt{(uu - c)}},$$

$$c\partial x = \frac{e\partial u}{\sqrt{(uu - c)}} - \frac{eu^2\partial u}{(uu - c)^{\frac{3}{2}}},$$

$$c\partial y = \frac{e^2\partial u}{uu - c} - \frac{e^2u^2\partial u}{(uu - c)^2}.$$

Ist $b^2 < ac$, so sey $ac - bb = ee$, und $a + 2bx + cxx = \frac{ee}{c - uu}$. Dadurch ist

$$c\partial y = \frac{ee\partial u}{c - uu} + \frac{eeuu\partial u}{(c - uu)^2}.$$

Auf gleiche Weise ist

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(a + 2bcx + cxx)}} = \partial u - \frac{uu\partial u}{uu - c},$$

in beiden Fällen des Verhaltens zwischen ac und bb.

VII. Wenn X in dem Differential $X\partial x$ ausser $\sqrt{(a + bxx)}$, und den ganzen Potenzen dieser Wurzel keine andere irrationale Function von x, noch eine transscendente enthält, so setze man $\sqrt{(a + bx^2)} = \frac{z^2 + a}{2z}$,

und es ist $x = \frac{zz - a}{2z\sqrt{b}}$; $\partial x = \frac{(zz + a)\partial z}{2zz\sqrt{b}}$,

und $z = x\sqrt{b} + \sqrt{(a + bxx)}$.

VIII. Mehrere Arten der Substitution sehe man in Eulers Abhandlung: de integratione formularum differentialium irrationalium. Acta Acad. Petrop. T. IV. Noch eine hieher gehörige Abhandlung aus Eulers Nachlaß ist in dem vierten Theile der neuen Ausgabe der Integralrechnung, S. 48 — 59. anzutreffen.

Die gegenwärtige Absicht geht aber mehr dahin, unmittelbar die Integrale zu finden, als auf jenem Wege, der wieder eine Zurückbringung von x nöthig machen kann. Mit den einfachsten Integrationen, deren Gebrauch am häufigsten ist, wird es dienlich seyn, anzufangen, da die allgemeinern auf sie zurückgebracht werden. Die Beweise sind aus dem Artickel, Differentialformel, zu nehmen.

$$49.\ \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}}.$$

$$y = \text{Ang. sin } \frac{x}{a} + C.$$

Ist $\partial y = -\frac{\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, so ist

$y = \text{Ang. cos } \frac{x}{a} + C$, wo $C = -\frac{1}{2}\pi$ ist, wenn y mit x zugleich $= o$ seyn soll.

$$50.\ \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(aa+xx)}},$$

$$y = \log. \frac{\sqrt{(aa+xx)}+x}{\text{const.}} = \log. \frac{aa:C}{\sqrt{(aa+xx)}-x}$$

Es sey $\frac{x}{a} = \text{tang } \varphi$, so ist $\sqrt{(aa+xx)}+x$

$= a(\text{sec}\,\varphi + \text{tang}\,\varphi) = a \text{ tang } (45° + \frac{1}{2}\varphi)$ (Goniometrie, 48.), und

$y = \log. \text{tang}(45° + \frac{1}{2}\varphi) + C.$

51. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(xx-aa)}}$.

$y = \log. \frac{x+\sqrt{(xx-aa)}}{\text{conſt.}} = \log \frac{aa.C}{x-\sqrt{(xx-aa)}}$.

Iſt $\frac{x}{a} = \text{ſec } \varphi$, ſo iſt

$y = \log. \text{tang } (45° + \frac{1}{2}\varphi) + C.$

52. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(aa-xx)}}$.

$y = \log. \frac{a-\sqrt{(aa-xx)}}{x} + C. = \log \frac{x}{a+\sqrt{(aa-xx)}}$

$= \frac{1}{2} \log \frac{a-\sqrt{(aa-xx)}}{a+\sqrt{(aa-xx)}}$.

Die dritte Formel für y entſteht durch Halbirung der Summe der beiden erſten.

Iſt $\frac{x}{a} = \text{ſin } \varphi$, ſo iſt $y = \log. \text{tang } \frac{1}{2}\varphi + C.$

Denn $\frac{a-\sqrt{(aa-xx)}}{x} = \frac{1-\text{coſ } \varphi}{\text{ſin } \varphi} =$ tang $\frac{1}{2}\varphi$, (Goniometrie. 38.). Der dritte Ausdruck für y verwandelt ſich in $\frac{1}{2} \log \frac{1-\text{coſ } \varphi}{1+\text{coſ } \varphi}$.

53. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}$.

$y = \log. \frac{\sqrt{(aa+xx)}-a}{x} + C.$

$= \log. \frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}+a} = \frac{1}{2} \log. \frac{\sqrt{(aa+xx)}-a}{\sqrt{(aa+xx)}+a}$.

Iſt $\frac{x}{a} = \text{tang } \varphi$, ſo iſt $y = \log. \text{tang } \frac{1}{2}\varphi + C.$

54. $\partial y = \frac{a\,\partial x}{x\sqrt{(xx-aa)}}$.

$y = \text{Ang. sec}\frac{x}{a} + C = \text{Ang. cof}\frac{a}{x} + C.$

55. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

$y = \text{Ang. fin verf.}\frac{x}{a} + C = \text{Ang. cof}\frac{a-x}{a} + C.$

56. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax+xx)}}$.

$y = \log.\frac{a+x+\sqrt{(2ax+xx)}}{\text{conſt.}}$.

Es ſey $\frac{a+x}{a} = \text{ſec}\,\varphi$, ſo iſt $\text{tang}\,\varphi^2$

$= \left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - 1 = \frac{2ax+xx}{a^2}$, und

$y = \log.\text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) + C.$

57. $\partial y = \partial x\sqrt{(a+bxx)}$.

$y = \frac{1}{2}x\sqrt{(a+bxx)} + \frac{1}{2}a\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}$.

Erhellt durch die Differentiation, oder aus (59. V.)

58. $\partial y = \partial x\sqrt{(2ax+bx^2)}$.

$y = \frac{a+bx}{2b}\sqrt{(2ax+bx^2)}$

$-\frac{a^2}{2b}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}$.

59. Es ſey $\partial y = x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$, wo m, n, p ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahlen, ſeyn mögen. Sind $m-1$ und n gebrochne rationale Zahlen, jene $= \frac{\alpha}{\beta}$, dieſe $= \frac{\gamma}{\delta}$, ſo ſetze man

$x = u^{\beta\delta}$, und es ist $x^{\alpha:\beta} = u^{\alpha\delta}$, und $x^{\gamma:\delta} = u^{\beta\gamma}$; $\partial x = \beta\delta u^{\beta\delta-1}\partial u$, wodurch die Exponenten der eintheiligen Größen alle ganze Zahlen werden. (Vergl. 37.)

Es sollen nun alle Arten gefunden werden, wie das vorgegebene Differential auf die Integration eines einfachern Differentials zurück geführt werden kann, entweder durch Verminderung des Exponenten von x in dem monomischen Factor, oder durch Verminderung des Exponenten von dem Binomium, oder beider.

Man differentiire das Product $x^\alpha(a+bx^n)^\beta = v$, und setze noch zur Abkürzung $a + bx^n = z$, so daß $x^\alpha z^\beta = v$. Es ist

$$\alpha x^{\alpha-1} z^\beta \partial x + \beta x^\alpha z^{\beta-1}\partial z = \partial v,$$

also, für ∂z seinen Werth gesetzt,

I. $$\alpha x^{\alpha-1} z^\beta \partial x + n\beta b x^{\alpha+n-1} z^{\beta-1}\partial x = \partial v.$$

In dem ersten Gliede des ersten Theils setze man $(a+bx^n)z^{\beta-1}$ für z^β, so ist

II. $$\alpha a x^{\alpha-1} z^{\beta-1}\partial x + (\alpha+n\beta) b x^{\alpha+n-1} z^{\beta-1}\partial x = \partial v.$$

In dem zweyten Gliede des ersten Theils (I.) setze man $z - a$ für bx^n, so ist

III. $$(\alpha+n\beta)x^{\alpha-1} z^\beta \partial x - n\beta a x^{\alpha-1} z^{\beta-1}\partial x = \partial v.$$

Hieraus ergeben sich, indem ∂y den einen oder den andern Theil von ∂v bedeuten kann, drey Paare Differentialformeln, deren Integrale einen algebraischen und einen involutorischen (summatorischen) Theil enthalten.

I. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x = \frac{1}{m} x^m (a+bx^n)^p - \frac{npb}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

II. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{n(p+1)b}x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n}{n(p+1)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\,\partial x.$

III. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^{p+1} - \frac{(m+np+n)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\,\partial x.$

IV. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{(m+np)b}x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\,\partial x.$

V. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{1}{m+np}x^m(a+bx^n)^p + \frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\,\partial x.$

VI. $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = -\frac{1}{n(p+1)a}x^m(a+bx^n)^{p+1} + \frac{m+np+n}{n(p+1)a}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}\,\partial x.$

60. I. Es sey $m-kn-1=\mu-1$, wo k eine ganze positive Zahl ist, so wird nach den Formeln II. oder IV. die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$ auf die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^{p+k}\,\partial x$ oder die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$ gebracht. Ist nun $\mu=n$, das ist, $m=(k+1)n$, so ist das Integral algebraisch nach (4.). Der zweyte Theil enthält den Coefficienten $\mu-n=0$.

II. Es sey $m+kn-1=\mu-1$, so wird durch successive Integration nach den Formeln, I. oder III. die Integration von $x^{n-1}(a+bx^n)^p\,\partial x$ auf die von $x^{\mu-1}(a+bx^n)^{p-k}\,\partial x$ oder auf die von

$x^{\mu-1}(a+bx^n)^p\partial x$ gebracht. Iſt $\mu=n$, ſo iſt in dem erſten Falle (I.) das Integral algebraiſch. Iſt $\mu+np+n=0$, ſo iſt in III. der Coefficient des zweyten Theils $=0$, und das Integral iſt algebraiſch, nämlich $=\frac{1}{\mu a}x^{\mu}(a+bx^n)^{p+1}$. In dieſem zweyten Falle iſt $m=-(k+p+1)n$, oder $\frac{m}{n}+p=-k-1$.

III. Es ſey $p+k=q$, und $m+n(q+1)=0$. Nach der Formel VI. wird die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf die von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ gebracht. Da $m+n(q+1)=0$, ſo iſt das Integral algebraiſch, und $=-\frac{1}{n(q+1)a}x^m(a+bx^n)^{q+1}$. In dieſem Falle iſt $p=-\left(\frac{m}{n}+k+1\right)$. Die Bedingung iſt dieſelbe mit der nächſt vorher gemachten.

IV. Iſt p eine ganze poſitive Zahl, ſo wird der binomiſche Differentialfactor in eine endliche Reihe verwandelt, nach dem binomiſchen Lehrſatze, und das Differential iſt aus einer endlichen Reihe monomiſcher Potenzen von x zuſammen geſetzt, wovon das Integral nach (2.) leicht gefunden wird.

V. Iſt p eine ganze negative Zahl, und ſind m und n ganze Zahlen, oder werden auf ſolche gebracht, ſo wird nach den Formeln II. oder VI. die Integration von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf die von $\frac{x^{m-p}\partial x}{a+bx^n}$ oder von $\frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$ gebracht, welche in (36. 38.) gezeigt iſt.

VI. Iſt $n=2$ und p ein Bruch von der Form $\pm\frac{2k+1}{2}$ ſo wird nach den Formeln I. V. ein poſ-

ſiver Exponent des Binomium, und ein negativer nach den Formeln II. VI. ſucceſſiv um 1 vermindert, ſo daß man zuletzt auf ein Differential $\frac{x^r \partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ kommt. Dieſes läßt ſich durch ſucceſſive Verminderung des Exponenten r, wenn dieſer eine ganze, poſitive oder negative Zahl iſt, auf dieſes, $\frac{\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}$, oder auf $\frac{\partial x}{x\sqrt{(a+bx^2)}}$ bringen, wovon die Integrale in (52. 53. 54.) angegeben ſind.

VII. Iſt $n=2r$, und m durch r theilbar, ſo ſetze man $x^r=u$, ſo iſt $x^n=u^2$, und $x^m=u^{m:r}$; $mx^{m-1}\partial x=\frac{m}{r}u^{m:r-1}\partial u$, oder $x^{m-1}\partial x=\frac{1}{r}u^{m:r-1}\partial u$. Daher läßt ſich in dieſem Falle das Differential $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ auf eine der gleich vorher bemerkten Formen bringen.

VIII. Differentialformeln von der Form, $x^m(1-xx)^{p:2}\partial x$, wo p eine ungerade ganze Zahl iſt, laſſen ſich vollſtändig durch Functionen eines Winkels integriren, die Exponenten m und p, mögen poſitiv oder negativ ſeyn, nur ſey m wie p eine ganze Zahl. Man ſetze $x=\sin\varphi$, ſo iſt $\sqrt{(1-xx)}=\cos\varphi$, und $\partial x=\partial\varphi\cos\varphi$, folglich jenes Differential $=\partial\varphi\sin\varphi^m.\cos\varphi^{p-1}$, wovon die Integration in dem vierten Abſchnitte dieſes Artikels gezeigt wird. Das Differential $x^m(aa-bbxx)^{p:2}\partial x$ läßt ſich leicht auf jene Form bringen. Die Differentiale, $x^m(1+xx)^{p:2}\partial x$, und $x^m(xx-1)^{p:2}\partial x$, laſſen ſich auf ähnliche Art durch Functionen von hyperboliſchen Sinus und Coſinus vollſtändig integriren, da der Sector einer gleichſeitigen Hyperbel iſt $\int\frac{\partial x}{2\sqrt{(xx+1)}}$, wenn x der hyperboliſche

Sinus ist, und $= \int \frac{\partial x}{2\sqrt{(xx-1)}}$, wenn x der hyperbolische Cosinus ist. Es müßten nur für die hyperbolischen Sectoren Tafeln berechnet seyn, wie man sie für Kreissectoren oder Kreisbogen hat.

61. $$\partial y = \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}},$$

$$y = \frac{1}{(m-1)b} x^{m-2}\sqrt{(a+bxx)} - \frac{(m-2)a}{(m-1)b} \int \frac{x^{m-3}\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

62. Hieraus fließen folgende Formeln, die oft gebraucht werden. Der Kürze wegen sey $\sqrt{(1-xx)} = z$.

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \text{Ang. sin } x.$$

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \tfrac{1}{2}\,\text{Ang. sin } x - \tfrac{1}{2}xz.$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\,\text{Ang. sin } x - \frac{1.3}{2.4}xz - \tfrac{1}{4}x^3z,$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{Ang. sin } x - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^2 - \frac{1.5}{4.6}x^3z - \tfrac{1}{6}x^5z.$$

$$\int \frac{x^8\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{Ang. sin } x - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}xz - \frac{1.5.7}{4.6.8}x^3z - \frac{1.7}{6.8}x^5z - \tfrac{1}{8}x^7z,$$

u. s. f. Die Constante ist noch beyzufügen. Soll das Integral mit $x = 0$ anfangen, so ist die Constante $= 0$.

63. Daher ferner folgende Integrale.

$$\int \frac{x\partial x}{V(1-xx)} = C - z.$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{V(1-xx)} = C - \tfrac{2}{3}z - \tfrac{1}{3}x^2z.$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{V(1-xx)} = C - \frac{2.4}{3.5}z - \frac{1.4}{3.5}x^2z - \tfrac{1}{5}x^4z$$

$$\int \frac{x^7\partial x}{V(1-xx)} = C - \frac{2.4.6}{3.5.7}z - \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2z - \frac{1.6}{5.7}x^4z - \tfrac{1}{7}x^6z.$$

Soll das Integral mit $x = 0$ anfangen, so ist $C = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}$, wenn $2n+1$ der Exponent von x ist. Für $x = 0$ ist $z = 1$.

64. Das Integral, $\int \frac{x^{2n}\partial x}{V(1-xx)}$ sey $= \Phi$ für $x = 0$, so ist für $x = 1$ der Werth desselben $= \frac{1.3.5.7\ldots 2n-1.}{2.4.6.8\ldots 2n} \cdot \frac{1}{2}\pi$.

Bey eben dieser Voraussetzung ist der Werth des Integrals,

$$\int \frac{x^{2n+1}\partial x}{V(1-xx)} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}.$$

Wird n unendlich groß genommen, so ist es einerley, ob man das eine oder das andere Integral nimmt. Dadurch ist $\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}$, wie in dem Artikel, Cyklometrie, 29; und dem Art. Einschalten, 49.

65. $$\partial y = \frac{\partial x}{x^m V(a+bxx)}.$$

$$y = \text{Conft.} - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{V(a+bxx)}{x^{m-1}} - \frac{(m-2)b}{(m-1)a} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2} V(a+bxx)}.$$

Das Integral ist algebraisch, wenn m gerade ist, nach (60. II.), und hängt vom Kreise oder von den Logarithmen ab, wenn m ungerade ist.

66. Es sey $x = \sin \varphi$, und $V(1-xx) = z$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{x V(1-xx)} = C + \log. \tan \tfrac{1}{2} \varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3 V(1-xx)} = C - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{x^2} + \tfrac{1}{2} \log. \tan \tfrac{1}{2} \varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5 V(1-xx)} = C - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{z}{x^4} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{z}{x^2} + \frac{1.3}{2.4} \log. \tan \tfrac{1}{2} \varphi.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^7 V(1-xx)} = C - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{z}{x^6} - \frac{1.5}{4.6} \cdot \frac{z}{x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{z}{x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \log. \tan \tfrac{1}{2} \varphi.$$

u. s. f.

67. $$\int \frac{\partial x}{x^2 V(1-xx)} = C - \frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4 V(1-xx)} = C - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{z}{x^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{x}.$$

$$\int \frac{\partial x}{x^6 V(1-xx)} = C - \frac{1}{5} \cdot \frac{z}{x^5} - \frac{1.4}{3.5} \cdot \frac{z}{x^3} - \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{z}{x}.$$

u. s. f.

68. Es ist, wenn $\sqrt{(xx-1)} = u$ gesetzt wird,

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(xx-1)}} = \text{Ang. cos} \frac{a}{x}, \text{ aus (54.).}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{(xx-1)}} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{x^2} + \frac{1}{2}\text{Ang. cos}\frac{a}{x},$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{(xx-1)}} = +\frac{1}{4}\cdot\frac{u}{x^4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u}{x^2} + \frac{1.3}{2.4}\text{ Ang. cos}\frac{a}{x}.$$

u. s. f.

69. $$\int x^{m-1}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1}{(m+1)b}\cdot x^{m-2}(a+bxx)^{\frac{3}{2}} - \frac{(m-2)a}{(m+1)b}\int x^{m-3}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x.$$

Für den involutorischen Theil dienen die Formeln,

$$\int x\partial x\sqrt{(a+bxx)} = \frac{1}{3b}(a+bxx)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int \partial x\sqrt{(a+bxx)} = \frac{1}{2}x(a+bxx)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(a+bxx)}}.$$

Das Integral in der zweyten Formel ist in einer der Formeln, 49. 50. 51. enthalten. Auf das eine oder das andere jener beiden Integrale kommt man durch die successive Verminderung des Exponenten von x.

Es ist auch $\int x^{m-1}(a+bxx)^{\frac{1}{2}}\partial x$

$$= \frac{1}{m+1}x^m(a+bxx)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{m+1}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bxx)^{\frac{1}{2}}},$$

wovon der zweyte Theil durch die Formel in (61.) gefunden wird.

70. $\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx)}}{x^m}$.

$$y = C - \frac{1}{(m-1)a} \cdot \frac{(a+bxx)^{\frac{3}{2}}}{x^{m-1}} - \frac{(m-4)b}{(m-1)a} \int \frac{\partial x \sqrt{(a+bxx)}}{x^{m-2}}.$$

71. $\partial y = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}$.

$$y = C + \frac{1}{mb} x^{m-1} \sqrt{(2ax+bxx)} - \frac{(2m-1)a}{mb} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{\sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

72. $\partial y = \frac{\partial x}{x^m \sqrt{(2ax+bxx)}}$.

$$y = C - \frac{1}{(2m-1)a} \cdot \frac{\sqrt{(2ax+bxx)}}{x^m} - \frac{(m-1)b}{(2m-1)a} \int \frac{\partial x}{x^{m-1} \sqrt{(2ax+bxx)}}.$$

73. $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+xx)}}$.

$y = \log(b+x+\sqrt{(a+2bx+xx)}) + C$.

Man setze $x = u - b$, so wird

$\partial y = \frac{\partial u}{\sqrt{(uu+a-bb)}}$. Davon ist das Integral in (50.) oder (51.) angegeben, nach dem a größer oder kleiner als bb ist. Setzt man darin für u seinen Werth durch x zurück, so erhält man die hier aufgestellte Integralformel.

Oder man ſetze, um die Formel rational zu machen, $xx+2bx+a=(x+z)^2$, ſo iſt $x=\frac{zz-a}{2(b-z)}$, und $x+z=\frac{2bz-zz-a}{2(b-z)}$. Ferner $\partial x=\frac{2bz-zz-a}{2(b-z)^2}\partial z$. Alſo iſt $\partial y=\frac{\partial z}{b-z}$, und $y=\log\frac{1}{b-z}$. Für z werde deſſen Werth aus der Gleichung, $zz+2xz=2bx+a$, geſetzt, ſo erhält man dieſelbe Integralformel für y.

74. $$\partial y=\frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx-xx)}}.$$

$$y=\text{Ang. sin}\frac{x-b}{\sqrt{(a+bb)}}+C.$$

oder $$y=\text{Ang. cos}\frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}+C.$$

Denn man ſetze $x=u+b$, ſo iſt $\partial y=\frac{\partial u}{\sqrt{(a+bb-uu)}}$, und $y=\text{Ang. sin}\frac{u}{\sqrt{(a+bb)}}$ aus (49.). Setzt man $x=b-u$, ſo iſt auch $\partial y=\frac{-\partial u}{\sqrt{(a+bb-uu)}}$, alſo $y=\text{Ang. cos}\frac{u}{\sqrt{(a+bb)}}$. Die Conſtanten in den beiden Werthen von y ſind verſchieden. Es iſt nämlich nach der erſten Formel, $y=C-\text{Ang. sin}\frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$ $=C-\frac{1}{2}\pi+\text{Ang. cos}\frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$. Die Conſtan

te in der zweyten Formel werde durch die Bezeichnung C' unterſchieden, ſo iſt $C' = C - \frac{1}{2}\pi$, und $C - C' = \frac{1}{2}\pi$.

75. Um die Formel rational zu machen, ſetze man $a + 2bx - xx = (p + x)(q - x)$, ſo iſt $pq = a$; $q - p = 2b$. Iſt a poſitiv, ſo ſind p und q mögliche Größen (Gleichung 34); iſt a negativ, ſo iſt p negativ zu nehmen, ſo daß $pq = a$; $q + p = 2b$, daher (nach Gleichung 36.) $a < bb$ ſeyn muß. In dem Falle, da $a > bb$ iſt hätte die Function $a - 2bx + xx$ keine andere als poſitive Werthe (Gleichung, 46.), die Function $-a + 2bx - xx$ alſo durchaus negative, und das Differentialverhältniß $\partial y : \partial x$ wäre für jeden Werth von x ein unmögliches.

Man ſetze $\frac{p+x}{q-x} = zz$, ſo iſt $x = \frac{qzz - p}{1 + zz}$,

und $\partial x = \frac{2(p+q)z\partial z}{(1+zz)^2}$. Da

$V(a + 2bx - xx) = (q - x)z = \frac{(p+q)z}{1+zz}$ iſt,

ſo iſt $\partial y = \frac{2\partial z}{1+zz}$, und

$y = 2$ Ang. tang z, das iſt

$$y = 2 \text{ Ang. tang } \frac{V(p+x)}{V(q-x)} + C,$$

oder $y = \text{Ang. cof } \frac{q - p - 2x}{p+q} + C$.

Es iſt nämlich, wenn φ den Winkel zu der Tangente $\frac{V(p+x)}{V(q-x)}$ bezeichnet, $\sec \varphi^2 = \frac{p+q}{q-x}$;

$\text{cof } \varphi^2 = \frac{q-x}{p+q}$; $\text{cof } 2\varphi = 2 \text{ cof } \varphi^2 - 1$

$= \frac{q-p-2x}{p+q}$, (Goniometrie, 36.).

Da $pq = a$; $q - p = 2b$; so ist $(q+p)^2 = (q-p)^2 + 4pq = 4b^2 + 4a$. Dadurch wird erhalten $y = \text{Ang. cos} \frac{b-x}{\sqrt{(a+bb)}}$, wie nach der ersten Auflösung.

76. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(xx+2bx-aa)}}$.

$$y = \text{Ang. sin} \frac{bx-aa}{cx} + C,$$

wo $c = \sqrt{(aa+bb)}$ ist.

Das Integral folgt aus der Vergleichung der Differentialformel in Th. I. S. 873. Nr. 36. mit der vorgegebenen.

Es ist auch $y = \text{Ang. cos} \frac{aa-bx}{cx} + C$,

wo aber die Constante eine andere als in der erstern Formel ist. Denn in dieser setze man $C = C' + \frac{1}{2}\pi$, so ist

$$y = C' + \tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin} \frac{aa-bx}{cx} = \ldots$$

$$C' + \text{Ang. cos} \frac{aa-bx}{cx}.$$

77. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(xx+2bx+aa)}}$.

$$y = \log \frac{\pm a\sqrt{(xx+2bx+aa)} \mp bx \mp aa)}{cx} + C,$$

wo $cc = aa - bb$, oder $cc = bb - aa$ ist, jenes für das obere Vorzeichen, dieses für das untere.

I. Denn man setze $\frac{bx+aa}{cx} = z$, so ist

$\partial z = -\frac{aa\partial x}{cxx}$, und $\sqrt{(zz+1)} =$

$\frac{a\sqrt{(xx+2bx+aa)}}{cx}$, wenn $cc+bb=aa$ ist.

Es ist also $\partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{(zz+1)}}$, und $y = \log(\sqrt{(zz+1)}-z)$, (50.), da überhaupt $\log\frac{\alpha}{\beta} = -\log\frac{\beta}{\alpha}$ ist. Setzt man für z desselben Werth, so entsteht die angegebene Formel.

II. Es bleibe $z = \frac{bx+aa}{cx}$, so ist

$\sqrt{(zz-1)} = \frac{a\sqrt{(xx+2bx+aa)}}{cx}$, wenn hier $bb-cc=aa$ genommen wird. Nun ist $\partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{(zz-1)}}$, und daher $y = \log(z-\sqrt{(zz-1)})$ aus (51.). Setzt man hier für z desselben Werth, so wird das angegebene Integral mit den untern Vorzeichen erhalten.

78. $\partial y = \frac{a\partial x}{x\sqrt{(aa+2bx-xx)}}$.

$y = \log.\frac{aa+bx-a\sqrt{(aa+2bx-xx)}}{cx}$,

wo $cc=aa+bb$ ist.

Die Rechnung ist der in (77.) ähnlich.

79. Durch Hülfe der Formeln (73—78.) läßt sich das Integral von $\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}}$ finden.

Denn es sey $\sqrt{(a+2bx+cxx)} = R$, und $y = x^{m-1}R$, so ist

$\partial y = (m-1)x^{m-2}R\partial x + x^{m-1}\partial R$,

oder

$$\partial y = \frac{(m-1)x^{m-2}R^2\partial x}{R} + \frac{(b+cx)x^{m-1}\partial x}{R}.$$

Für R^2 werde dessen Werth gesetzt, so ist

$$\partial y = [(m-1)ax^{m-2}\partial x + (2m-1)bx^{m-1}\partial x + mcx^m\partial x] : R,$$

und

$$\int\frac{cx^m\partial x}{R} = \frac{1}{m}x^{m-1}R - \frac{(m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{R} - \frac{(2m-1)b}{m}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{R}.$$

Das Integral $\int\frac{x^m\partial x}{R}$ wird also aus den Integralen $\int\frac{x^{m-2}\partial x}{R}$ und $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{R}$, gefunden. Für $m=1$, sind diese aus den vorher gefundenen Formeln bekannt. Dadurch wird das $\int\frac{x\partial x}{R}$ gefunden. Aus diesem und $\int\frac{\partial x}{R}$ wird das $\int\frac{x^2\partial x}{R}$ hergeleitet, und so weiter für alle folgende ganze Exponenten m.

Aus dem entwickelten Werthe von ∂y läßt sich auch das $\int\frac{\partial x}{x^m R}$ herleiten.

Euler hat nach einer andern Methode dieses Integral zu finden gelehrt, in den Actis Acad. Petrop. T. VI. P. II.

80. Die in der Form $\int x^{m-2}(a+bx+cxx)^{p-2}\partial x$ begriffenen Integrale, wo m und p ungerade, positive oder negative, ganze Zahlen bedeuten, hängen von der Rectification eines oder mehrerer Kegelschnitte ab. In einigen

Fällen hängt auch das Integral von $\frac{\partial x}{x^n \sqrt{(a+bx+cx^2+\partial x^3)}}$ davon ab. Sonst ist es ein Integral von einer höhern transſcendenten Gattung, als jene ſind, die man irrational transſcendente von der logarithmiſchen oder circularen Gattung nennen möchte. Umſtändlich handelt von dieſen Integrationen d'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin. T. II. a. 1746. und T. IV. a. 1748.

81. Über die Integration der Formel $\frac{P\partial x}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}}$ haben La Grange (Mém. de l'Acad. de Turin, 1784, 85.) und Le Gendre Unterſuchungen angeſtellt. Die Methode des letztern, welche in einer einzeln gedruckten Abhandlung ſur les transcendantes élliptiques vorgetragen iſt, hat La Croix in ſeinem Werke über Differential- und Integralrechnung Th. II. S. 52 f. f. mitgetheilt. Die Vergleichung der Functionen, die unter der gedachten Form enthalten ſind, für verſchiedene veränderliche Größen, wie daſelbſt x iſt, hat Euler entdeckt, in den Novis Comment. Act. Petrop. T. XII. und ſie daraus in das Werk von der Integralrechnung P. I. Sect. II. cap. 6. übergetragen. Sie gehört zu der Lehre von den Differentialgleichungen.

82. Wenn der Differentialfactor die Form $\partial x \left(\frac{a+bx^n}{e+fx^n}\right)^p$ hat, ſo muß der Zähler, $(a+bx^n)^p$, in eine Reihe aufgelöſet werden, wodurch eine Reihe Differentiale von der Form $\frac{x^m \partial x}{(e+fx^n)^p}$ erhalten wird. Dies iſt z. B. der Fall bey der Rectification der Ellipſe. Hier iſt das Differential des Bogens

$$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$$ wo x die Abſciſſe von dem

Mittelpuncte aus genommen, und e die Excentricität, für die halbe große Axe als Einheit, ist. So verfährt man auch mit dem Differential $\frac{\partial x}{(a+bx^n)^p(e+fx^r)^q}$, wo man die Potenz $(a+bx^n)^{-p}$ oder $(e+fx^r)^{-q}$, in eine Reihe auflöset. Eine solche Formel kommt bey der Bestimmung der Zeit des Schwunges eines einfachen Pendels vor, nämlich $\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)(aa-xx)}}$, wo a und x die Sinus der halben Winkel sind, welche das Pendel beym Anfange des Falles, und in irgend einem Theile seines Weges mit der Verticalen macht. Der Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ wird hier in eine Reihe verwandelt.

Es kann auch dienlich seyn, in dieser so wie in der ersten Form beide Potenzen in eine Reihe aufzulösen, und den ganzen Differentialfactor durch die Multiplication beider Reihen in eine einzige zu verwandeln. Für die gemeine elastische Linie ist die Differentialgleichung zwischen den Coordinaten diese:

$$\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^4-(c^2-x^2)^2)}}, \text{ oder}$$

$$\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^2+c^2-x^2)(a^2-c^2+x^2)}}, \text{ wo x der}$$

Abstand eines Punctes der Curve von der Richtung der spannenden Kraft ist, oder die y als Abscissen in dieser Richtung genommen werden.

83. Wenn das Integral von $x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$ weder algebraisch ist, noch sich auf Logarithmen oder Winkelfunctionen bringen läßt, so macht es eine eigene Art von transscendenten Functionen aus. In solchen Fällen ist der Differentialfactor in eine Reihe zu verwandeln, bey welcher man die Einrichtung so zu treffen hat, daß sie con-

bergent sey, auf ähnliche Art, wie man es bey Logarithmen und Winkeln möglich gemacht hat.

84. Man kann zu diesem Zwecke erstlich die Potenz des Binomium in eine Reihe verwandeln, wobey man entweder a oder bx^n zum ersten Gliede des Binomium nimmt. Geschieht jenes, so ist die Reihe der Exponenten: $0, n, 2n, 3n$, etc. Nimmt man bx^n zum ersten Gliede, so ist die Reihe der Exponenten: $np, np-n, np-2n, np-3n$, etc. Das Differential ∂z wird dadurch in eine Reihe von Potenzen der x verwandelt, deren Exponenten den Unterschied $\pm n$ haben. Das Integral wird ohne Mühe nach (2.) gefunden. Ist p ein Bruch, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, und a oder b negativ, so kann man diese nicht zum ersten Gliede des Binomium setzen, weil dadurch unmögliche Größen entständen.

85. Die involutorischen Ausdrücke des Integrals III. IV. in 59. geben noch eine andere Form der Reihen für dasselbe, welche auch schon oben in besondern Fällen gebraucht sind. Die Potenz des Binomium bleibt in allen Gliedern der Reihe als Factor.

I. In der Integralformel III. setze man $p-1$ statt p, so ist

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^p - \frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

da die Exponenten der Potenzen von x in dem involutorischen Theile jedesmahl um n zunehmen. Es erhellt leicht, daß

$$A=\frac{1}{ma};\quad B=-\frac{(m+np)b}{(m+n)a}A;$$

$$C=-\frac{(m+n+np)b}{(m+2n)a}B;$$

$$D=-\frac{(m+2n+np)b}{(m+3n)a}C;$$

etc.

II. In der Integralformel IV. setze man au $p-1$ statt p, so ist, wenn zur Abkürzung $a+bx^n=u$ gesetzt wird,

$$\int x^{m-1}u^{p-1}\partial x=\frac{1}{(m-n+np)b}x^{m-n}u^p$$
$$-\frac{(m-n)a}{(m-n+np)b}\int x^{m-n-1}u^{p-1}\partial$$

Man setze nun das Integral, oder,

$$y=(Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}$$
$$+Dx^{m-4n}+\text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

so erhellt, wie vorher, daß

$$A=\frac{1}{(m-n+np)b};$$

$$B=-\frac{(m-n)a}{(m-2n+np)b}A;$$

$$C=-\frac{(m-2n)a}{(m-3n+np)b}B;$$

$$D=-\frac{(m-3n)a}{(m-4n+np)b}C;$$

etc.

Die Coefficienten bilden eine Reihe von Brüche deren Zähler und Nenner aus Factoren in arithmetisch Fortschreitung bestehen, so daß die Anzahl der Factor

vergent sey, auf ähnliche Art, wie man es bey Logarithmen und Winkeln möglich gemacht hat.

84. Man kann zu diesem Zwecke erstlich die Potenz des Binomium in eine Reihe verwandeln, wobey man entweder a oder bx^n zum ersten Gliede des Binomium nimmt. Geschieht jenes, so ist die Reihe der Exponenten: $0, n, 2n, 3n$, etc. Nimmt man bx^n zum ersten Gliede, so ist die Reihe der Exponenten: $np, np-n, np-2n, np-3n$, etc. Das Differential ∂z wird dadurch in eine Reihe von Potenzen der x verwandelt, deren Exponenten den Unterschied $\pm n$ haben. Das Integral wird ohne Mühe nach (2.) gefunden. Ist p ein Bruch, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, und a oder b negativ, so kann man diese nicht zum ersten Gliede des Binomium setzen, weil dadurch unmögliche Größen entständen.

85. Die involutorischen Ausdrücke des Integrals III. IV. in 59. geben noch eine andere Form der Reihen für dasselbe, welche auch schon oben in besondern Fällen gebraucht sind. Die Potenz des Binomium bleibt in allen Gliedern der Reihe als Factor.

I. In der Integralformel III. setze man $p-1$ statt p, so ist

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^p - \frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

da die Exponenten der Potenzen von x in dem involutorischen Theile jedesmahl um n zunehmen. Es erhellt leicht, daß

$$A = \frac{1}{ma}; \quad B = -\frac{(m+np)b}{(m+n)a} A;$$

$$C = -\frac{(m+n+np)b}{(m+2n)a} B;$$

$$D = -\frac{(m+2n+np)b}{(m+3n)a} C;$$

etc.

II. In der Integralformel IV. setze man auch $p-1$ statt p, so ist, wenn zur Abkürzung $a+bx^n = u$ gesetzt wird,

$$\int x^{m-1} u^{p-1} \partial x = \frac{1}{(m-n+np)b} x^{m-n} u^p - \frac{(m-n)a}{(m-n+np)b} \int x^{m-n-1} u^{p-1} \partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

so erhellt, wie vorher, daß

$$A = \frac{1}{(m-n+np)b};$$

$$B = -\frac{(m-n)a}{(m-2n+np)b} A;$$

$$C = -\frac{(m-2n)a}{(m-3n+np)b} B;$$

$$D = -\frac{(m-3n)a}{(m-4n+np)b} C;$$

etc.

Die Coefficienten bilden eine Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner aus Factoren in arithmetischer Fortschreitung bestehen, so daß die Anzahl der Factoren

bergent sey, auf ähnliche Art, wie man es bey Logarithmen und Winkeln möglich gemacht hat.

84. Man kann zu diesem Zwecke erstlich die Potenz des Binomium in eine Reihe verwandeln, wobey man entweder a oder bx^n zum ersten Gliede des Binomium nimmt. Geschieht jenes, so ist die Reihe der Exponenten: $0, n, 2n, 3n$, etc. Nimmt man bx^n zum ersten Gliede, so ist die Reihe der Exponenten: $np, np-n, np-2n, np-3n$, etc. Das Differential ∂z wird dadurch in eine Reihe von Potenzen der x verwandelt, deren Exponenten den Unterschied $\pm n$ haben. Das Integral wird ohne Mühe nach (2.) gefunden. Ist p ein Bruch, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, und a oder b negativ, so kann man diese nicht zum ersten Gliede des Binomium setzen, weil dadurch unmögliche Größen entständen.

85. Die involutorischen Ausdrücke des Integrals III. IV. in 59. geben noch eine andere Form der Reihen für dasselbe, welche auch schon oben in besondern Fällen gebraucht sind. Die Potenz des Binomium bleibt in allen Gliedern der Reihe als Factor.

I. In der Integralformel III. setze man $p-1$ statt p, so ist

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x = \frac{1}{ma}x^m(a+bx^n)^p - \frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y = (Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

da die Exponenten der Potenzen von x in dem involutorischen Theile jedesmahl um n zunehmen. Es erhellt leicht, daß

$$A=\frac{1}{ma};\quad B=-\frac{(m+np)b}{(m+n)a}A;$$

$$C=-\frac{(m+n+np)b}{(m+2n)a}B;$$

$$D=-\frac{(m+2n+np)b}{(m+3n)a}C;$$

etc.

II. In der Integralformel IV. setze man auch $p-1$ statt p, so ist, wenn zur Abkürzung $a+bx^n=u$ gesetzt wird,

$$\int x^{m-1}u^{p-1}\partial x=\frac{1}{(m-n+np)b}x^{m-n}u^p - \frac{(m-n)a}{(m-n+np)b}\int x^{m-n-1}u^{p-1}\partial x.$$

Man setze nun das Integral, oder

$$y=(Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}+Dx^{m-4n}+\text{etc.})(a+bx^n)^p,$$

so erhellt, wie vorher, daß

$$A=\frac{1}{(m-n+np)b};$$

$$B=-\frac{(m-n)a}{(m-2n+np)b}A;$$

$$C=-\frac{(m-2n)a}{(m-3n+np)b}B;$$

$$D=-\frac{(m-3n)a}{(m-4n+np)b}C;$$

etc.

Die Coefficienten bilden eine Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner aus Factoren in arithmetischer Fortschreitung bestehen, so daß die Anzahl der Factoren

der Stellenzahl nach dem ersten A gleich ist, verbunden mit den Gliedern der geometrischen Reihe, $\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}$, etc. und dem ersten Gliede A.

In Eulers Integralrechnung, T. I. §. 159. sind diese Reihen nach einer andern Methode gefunden. Euler differentiirt das Product $(a + bx^n)^p z$, und setzt es dem $x^{m-1}(a + bx^n)^{p-1} \partial x$ gleich. Für z nimmt er eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten an, setzt diese in die erhaltene Differentialgleichung, und bestimmt nun aus den Gleichungen, welche die Coefficienten der zusammengesetzten Reihe geben, diejenigen der angenommenen.

Zu merken ist, daß die durch die eine oder die andere Methode erhaltenen Reihen kein vollständiges Integral geben, da die Constante fehlt. Wie diese allgemein zu bestimmen sey, zeigt Euler a. a. O. §. 164. Er findet sie $= \alpha a^p$, wo α eine willkührliche Größe ist.

86. La Grange hat eine besondere Methode angegeben, das Integral einer Reihe zu finden, worin ein Differential aufgelöset ist, so daß es von einem einfachen Integral abhange. Die Reihe sey

$$(A + A'U + A''U^2 + A'''U^3 + \text{etc.})\, V \partial x,$$

wo U und V Functionen von x, und A, A', A'', etc. gegebene Größen sind. Man nehme neben dieser Reihe noch diese an:

$$(1 + aU + a^2U^2 + a^3U^3 + \text{etc.})\, V \partial x,$$

worin die Coefficienten eine geometrische Reihe ausmachen. Diese Reihe entsteht durch die Entwicklung der gebrochnen Function $\frac{V \partial x}{1 - aU}$. Das Integral dieser Function besteht also aus allen einzelnen Integralen der Theile jener Reihe, welches so bezeichnet wird:

$$\int \frac{V\partial x}{1-aU} = a^0\int V\partial x + a\int UV\partial x + a^2\int U^2V\partial x + a^3\int U^3V\partial x + \text{etc.}$$

Kann man nun das $\int \frac{V\partial x}{1-aU}$ angeben, so sey dieses $= X$. Dieses werde nicht nach den Potenzen von x, sondern nach Potenzen von a in eine Reihe geordnet, und die Function X oder jenes Integral werde nach dieser Form sp bezeichnet:

$$\int \frac{V\partial x}{1-aU} = a^0X_1 + aX_2 + a^2X_3 + a^3X_4 + \text{etc.}$$

Die Functionen X_1, X_2, X_3, X_4, etc. sind von a ganz unabhängig, da sie kein a enthalten, sondern hängen bloß von V und U ab. Nun ist durch Vergleichung mit dem vorher stückweise angegebenen Integral

$$\int V\partial x = X_1; \quad \int UV\partial x = X_2;$$
$$\int U^2V\partial x = X_3; \quad \int U^3V\partial x = X_4;$$
u. s. f.

Folglich werden nun diese Integrale durch die Functionen X_1, X_2, etc. bekannt; daher wird auch das Integral der zuerst vorgegebenen Reihe durch die Integrale ihrer Theile gefunden.

Diese Methode hat La Grange in den Mém. de Turin 1784—85. vorgetragen, woraus sie La Croix in seiner Integralrechnung §. 417. 418. mittheilt. Ich habe das Verfahren einleuchtender darzustellen gesucht. Die beiden Beispiele, welche La Croix von der Methode giebt, sind aber nicht geschickt, ihre Brauchbarkeit zu zeigen. Bey dem zweyten ist eine Verwirrung vorgegangen, die durch die in den Verbesserungen angezeigte Veränderung noch verschlimmert wird.

La Croix giebt eben daselbst einen Abriß der Methode, welche La Grange angewandt hat, das Integral der

Formel $\frac{P\partial x}{\sqrt{(e+fx^2)(g+hx^2)}}$ zu finden, wenigstens durch eine sichere Annäherung, mittelst einer oder mehrerer Umwandelungen. Er rühmt sie als eine der meisterhaftesten.

87. Aus Eulers handschriftlichen Nachlaß ist in dem vierten Theile seiner Integralrechnung eine Abhandlung eingerückt, über die Auflösung der Integralformel, $\int x^{m-1}\partial x(\Delta+x^n)^\lambda$ in eine für jeden Fall convergirende Reihe. Es ist Δ eine unveränderliche Größe. Die Methode verdient wegen ihrer Einfachheit hier angeführt zu werden.

Der Werth des Integrals soll sich von $x=o$ bis zu $x=a$ erstrecken, das heißt, es soll $=o$ seyn, wenn $x=o$ ist, und der Werth wird gesucht, den es für $x=a$ erhält.

Man verwandle die Formel $\Delta+x^n$ in diese, $(\Delta+a^n)\left(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)$, so wird die vorgegebene Integralformel diese:

$$(\Delta+a^n)^\lambda\int x^{m-1}\partial x\left(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)^\lambda.$$

Die Binomialpotenz entwickelt ist $=$

$$1-\frac{\lambda}{1}\left(\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)+\frac{\lambda.\lambda-1.}{1.2}\left(\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)^2-\text{etc.}$$

Dadurch ist die geforderte Integration auf die von der Formel $x^{m-1}\partial x(a^n-x^n)^\theta$ gebracht. Nun sey das Integral davon gefunden, und werde durch V bezeichnet, so soll daraus das $\int x^{m-1}\partial x(a^n-x^n)^{\theta+1}$ hergeleitet werden. Dazu dient die Formel V, in 59.

Nach dieser ist

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta+1}\partial x = \frac{1}{m+n(\theta+1)}x^m(a^n-x^n)^{\theta+1} + \frac{n(\theta+1)a^n}{m+n(\theta+1)}\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta}\partial x.$$

Da das Integral für $x=a$ gesucht wird, so ist der erste Theil $=0$, und es ist

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{\theta+1}\partial x = \frac{n(\theta+1)a^n}{m+n(\theta+1)}\,V.$$

Für $\theta=0$ ist $V = \frac{n}{m(m+n)}a^{m+n}$,

also ist

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{2}\partial x = \frac{n.2n}{m.m+n.m+2n.}a^{m+2n},$$

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{3}\partial x = \frac{n.2n.3n}{m.m+n.m+2n.m+3n.}\times a^{m+3n}$$

$$\int x^{m-1}(a^n-x^n)^{4}\partial x = \frac{n.2n.3n.4n}{m.m+n\ldots m+4n.}\times a^{m+4n},$$

u. s. f.

Hieraus ergiebt sich nun das Integral

$$(\Delta+a^n)^{\lambda}\int x^{m-1}\partial x\left(1-\frac{a^n-x^n}{\Delta+a^n}\right)^{\lambda},$$

für $x=a$, nach Versetzung des gemeinschaftlichen Factors $\frac{a^m}{m}$, folgendergestalt:

$$\frac{a^m}{m}(\Delta+a^n)^\lambda\left\{1-\frac{\lambda n}{m+n}\left(\frac{a^n}{\Delta+a^n}\right)+\frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\left(\frac{a^n}{\Delta+a^n}\right)^2-\frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\cdot\frac{(\lambda-2)n}{m+3n}\left(\frac{a^n}{\Delta+a^n}\right)^3+\text{etc.}\right\}$$

Setzt man hier x statt a, so erhält man den Werth des Integrals so, daß es mit $x=0$ zugleich anfängt.

Euler macht hievon noch Anwendungen auf einige künstliche Summirungen von Reihen.

88. Durch dieses Verfahren läßt sich nun auch für das $\int x^{m-1}\partial x\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}$, oder das $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$, immer eine convergirende Reihe finden, da man die trinomische Größe unter dem Wurzelzeichen auf eine binomische von der Form a^4+x^4 bringen kann. Dieses Verfahren wird leichter, als das von La Grange gebrauchte seyn.

89. Man sieht hier, wie die von Kramp so genannten numerischen Facultäten mit Integrationsformeln zusammen hangen. Eine Facultät wie $\frac{r.r+n.r+2n.\text{ etc.}}{m.m+n.m+2n.\text{ etc.}}$ entsteht durch die Division von $\int x^{m-1}(a^n-x^n)^p\partial x$ durch $\int x^{r-1}(a^n-x^n)^p\partial x$.

90. Zu den in (82) angeführten Integrationsmethoden dienen folgende sehr nützliche Beyspiele.

I. Das Integral, $\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}=X$, zu finden, für den Werth $x=a$, wenn es für $x=0$ anfängt.

Man entwickele den Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, oder die Potenz $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, nach binomischer Lehrsatz, 13. IV. und setze sie zur Abkürzung $= 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 +$ etc. so ist

$$X = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \alpha \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$+ \beta \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \gamma \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \text{etc.}$$

Diese Integrale sind $= 0$ für $x = 0$, wenn keine Constante zugesetzt wird, und für $x = a$ ist, nach (64.).

$$X = (1 + \alpha^2 a^2 + \beta^2 a^4 + \gamma^2 a^6 + \delta^2 a^8 + \text{etc.}) \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man diese Größe $= A$, die Länge eines einfachen Pendels $= r$, die Höhe des freyen Falles in einer Secunde $= g$, so ist die Zeit eines Schwunges (eines Hin- oder Herganges) $= 2A\sqrt{\frac{r}{2g}}$. Die Bedeutungen von a und x für diese Anwendung sind in (82.) angegeben.

II. Das Integral, $\frac{\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} \partial x = X$, zu finden, für $x = 1$, wenn es für $x = 0$ anfängt.

Es sey wiederum $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 +$ etc. so ist $\sqrt{(1-e^2x^2)} = 1 - \alpha e^2 x^2 - \frac{1}{3}\beta e^4 x^4 - \frac{1}{5}\gamma e^6 x^6 - \frac{1}{7}\delta e^8 x^8 -$ etc. Also

$$X = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \alpha e^2 \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$- \tfrac{1}{3}\beta e^4 \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \tfrac{1}{5}\gamma e^6 \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \text{etc.}$$

Diese Integrale sind $= 0$ für $x = 0$, wenn Conft. $= 0$ genommen wird, und für $x = 1$ ist

$X = (1 - \alpha^2 e^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\beta^2 e^4 - \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{1}{16}\delta^2 e^8 - \text{etc.})\frac{1}{2}\pi.$

Dieser Werth von X ist der elliptische Quadrant für die halbe große Axe $= 1$, und Excentricität $= e$.

III. Classe, worin der Differential-Factor eine logarithmische oder exponentielle Function ist.

91. Die einfachsten Formen eines Differential-Factors von der hier angezeigten Beschaffenheit sind:

$$X \log x\ ;\ \frac{\partial X}{\partial x};\ (\log x)^n\ ;\ \frac{X}{(lx)^n}\ ;\ a^x X;\ x^{nx}.$$

92. $\partial y = X \partial x \log x.$

Zufolge der Bemerkung in der Einleitung zu dem gegenwärtigen Artikel ist

$$y = \log x.\ X\partial x - \int(\int X \partial x).\ \frac{\partial x}{X},$$

da $\partial . \log x = \frac{\partial x}{x}$ ist. Oder, wenn zur mehrern Deutlichkeit gesetzt wird, $\int X \partial x = Z$,

$$y = Z \log x - \int \frac{Z \partial x}{x}.$$

Ist z eine Function von x, die keine Logarithmen enthält, so ist die Integration auf einen der Fälle der beiden ersten Classen gebracht. Sonst muß man gleich von Anfang das Differential in eine Reihe auflösen.

93. $\partial y = x^n \partial x \log x.$

$$y = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\log x - \frac{1}{n+1}) + \text{Const.}$$

94. $\partial y = \frac{\partial x}{1-x} . \log x$

$$y = l\frac{1}{1-x} . lx - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{25}x^5 - \text{etc.}$$

Hier ist $Z = \int \frac{\partial x}{1-x} = -\log.(1-x)$

und $\frac{Z\partial x}{x} = -\frac{\partial x}{x}\log.(1-x)$. Es ist aber

$\log.(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.})$

(s. Logarithmen, oder Differenzenrechnung 24. wenn das selbst $x=1$; $u=-x$ gesetzt wird); also

$\frac{Z\partial x}{x} = (1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.})\,\partial x$, und

$\int \frac{Z\partial x}{x} = x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \text{etc.}$

So wird der angegebene Werth von y erhalten, wenn nur noch $-\log.(1-x)$ mit $+\log.\frac{1}{1-x}$ vertauscht wird.

Für $x=0$ ist das Integral $=0$. Denn $\log\frac{1}{1-x}$, welcher alsdenn $=0$ ist, macht das Product $\log\frac{1}{1-x}.\log.x = 0$, wenn gleich $\log.x$ unendlich groß ist. Der Logarithme einer unendlich großen, so wie einer unendlich kleinen Zahl ist mit $\frac{1}{0}$ nicht vergleichbar, und wird durch die Division mit $\frac{1}{0}$ Null, s. Logarithmen.

95. $\partial y = \partial P(lx)^n$, wo P eine Function von x ist.

$$y = P(lx)^n - nQ(lx)^{n-1} + n(n-1)R(lx)^{n-2} - n(n-1)(n-2)S(lx)^{n-3} + \text{etc.}$$

wo $Q = \int \frac{P\partial x}{x}$; $R = \int \frac{Q\partial x}{x}$; $S = \int \frac{R\partial x}{x}$, u.s.f.

Denn es ist (nach der angeführten Formel)

$$y = P(lx)^n - \int P\partial(lx)^n.$$

Da $\partial(lx)^n = n(lx)^{n-1}\cdot\frac{\partial x}{x}$,

so ist $y = P(lx)^n - n\int\frac{P\partial x}{x}(lx)^{n-1}$.

Man setze $\frac{P\partial x}{x} = \partial Q$, so ist auf gleiche Art

$$\int\partial Q(lx)^{n-1} = Q(lx)^{n-1} - (n-1)\int\frac{Q\partial x}{x}(lx)^{n-2}.$$

Wiederum setze man $\frac{Q\partial x}{x} = \partial R$, so ist

$$\int\partial R(lx)^{n-2} = R(lx)^{n-2} - (n-2)\int\frac{R\partial x}{x}(lx)^{n-3}.$$

Durch diese fortgesetzten Entwickelungen und Substitutionen wird das angegebene Integral erhalten.

96. $\partial y = x^{m-1}(lx)^n\partial x.$

$$y = x^m\left(\frac{(lx)^n}{m} - \frac{n(lx)^{n-1}}{m^2} + \frac{n.n-1.(lx)^{n-2}}{m^3} - \frac{n.n-1.n-2.(lx)^{n-3}}{m^4} + \text{etc.}\right) + C.$$

Leibnitz fand dieses Integral, s. Commerc. epist. Leibnitii et Bernoullii T. I. p. 8.

97. $\partial y = \frac{X\partial x}{(lx)^n}.$

$$y = \text{Const.} - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} + \text{etc.}$$

wo $P = \frac{\partial(Xx)}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial(Px)}{\partial x}$; u. ſ. f.

Man kann dieſe Formel auf gleiche Weiſe behandeln, wie die in (95.), aber auch auf eine andere Art, wodurch das angegebene Integral erhalten wird. Man drücke die Differentialformel ſo aus: $Xx.\frac{\partial x}{x(lx)^n}$, und bezeichne das $\int\frac{\partial x}{x(lx)^n}$ durch u, ſo iſt

$$\int Xx.\partial u = Xx.u - \int u\,\partial(Xx).$$

Es iſt $u = \frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$; alſo iſt

$$y = C - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{\partial(Xx)}{(lx)^{n-1}}.$$

Setzt man $\partial(Xx) = P\partial x$, ſo iſt

$$y = C - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{-P\partial x}{(lx)^{n-1}}.$$

Der zweyte Theil iſt das Integral einer Differentialformel von derſelben Geſtalt als die vorgegebene iſt, und wird auf gleiche Art auf das $\int\frac{Q\partial x}{(lx)^{n-2}}$ gebracht. So wird fortgefahren, bis daß man auf das Integral $\int\frac{V\partial x}{lx}$ kommt, welches nicht einfacher dargeſtellt werden kann.

98. $\partial y = \frac{x^{m-1}\partial x}{(lx)^n}$.

$$y = C - \frac{x^m}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{mx^m}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}$$
$$- \frac{m^2x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \cdots$$
$$+ \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{x^{m-1}\partial x}{lx}.$$

In dem letzten Theil, der Ergänzung, setze man $x^m = z$, so verwandelt sich $\int \frac{x^{m-1}\partial x}{lx}$ in $\int \frac{\partial z}{lz}$. Dieses ist eine eigene Gattung transscendenter Functionen.

99. $\partial y = a^x X \partial x$.

$$y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^3} a^x Q$$
$$- \frac{1}{(la)^4} a^x R + \text{etc.}$$

wo $P = \frac{\partial X}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial P}{\partial x}$; $R = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

u. s. f.

Denn da $\partial . a^x = a^x \partial x . la$ (Differentialformeln, 15.) so ist $\int a^x \partial x = \frac{a^x}{la}$ und es ist nach der bisher gebrauchten Formel,

$$y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la} \int a^x \partial x.$$

Setzt man $\partial X = P \partial X$, so ist

$$\int a^x P \partial x = \frac{1}{la} a^x P - \frac{1}{la} \int a^x \partial P,$$

also $y = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^2} \int a^x \partial P.$

Auf gleiche Art werden die folgenden Theile des Integrals gefunden.

100. I. $\partial y = a^x x^n \partial x$, wo n eine ganze positive Zahl ist.

$$y = a^x \left(\frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n.n-1.x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n.n-1.n-2.x^{n-3}}{(la)^4} + \text{etc.} \right) + C.$$

Zufolge der allgemeinen Formel (99.)

II. $\partial y = \frac{a^x \partial x}{x^n}$.

$$y = C - \frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x \partial x}{x^{n-1}}.$$

Hier ist die Differentialformel in die Factoren a^x und $\frac{\partial x}{x^n}$ zerlegt, da sie für $a^x x^n \partial x$ in $a^x \partial x$ und x^n zerlegt worden. Die fortgesetzte Entwickelung des involutorischen Integrals führt zuletzt auf $\int \frac{a^x \partial x}{x}$, welches nur durch eine Reihe dargestellt werden kann.

101. $\partial y = \frac{a^x \partial x}{x}$.

$$y = C + lx + \frac{x la}{1} + \frac{x^2 (la)^2}{1.2.2} + \frac{x^3 (la)^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4 (la)^4}{1.2.3.4.4} + \text{etc.}$$

Die Exponentialgröße a^x wird in die Reihe,

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

aufgelöset. (Logarithmen, oder auch Differenzenrechnung, 24. 25. *) Diese Reihe mit $\frac{\partial x}{x}$ multiplicirt, und darauf integrirt, giebt die für y.

102. In dem jetzt gefundenen Integral nehme man für a die Basis der natürlichen Logarithmen, e, so ist $le = 1$, und

$$\int \frac{e^x \partial x}{x} = C + lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Nun sey $e^x = z$, die Zahl, deren natürlicher Logarithme $= x$ ist, oder $x = \log z$; so ist $\partial x = \frac{\partial z}{z}$ und $\frac{e^x \partial x}{x} = \frac{\partial z}{lz}$, also

$$\int \frac{\partial z}{lz} = C + llz + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{(lz)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Für $z = 1$ ist das Integral unendlich groß, weil $lz = l1 = o$, und $lo = \infty$ oder unendlich ist.

*) Man bezeichne den Logarithmen von $1 + u$ in dem System, dessen Basis $= a$ ist, durch $L(1+u)$, in dem natürlichen durch $l(1+u)$, so ist in Differenzenrechnung (24.), $x = 1$; $lx = o$, und, wenn die in c multiplicirte Reihe U heißt, $L(1+u) = cU$; und $l(1+u) = U$, also $c = L(1+u) : l(1+u)$. Setzt man: $1 + u = a$, so wird $c = \frac{1}{la}$.

103. $\partial y = x^{nx}\partial x$.

$$y = x\left(1 - \frac{nx}{2^2} + \frac{n^2x^2}{3^3} - \frac{n^3x^3}{4^4} + \frac{n^4x^4}{5^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{nx^2lx}{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{nx}{3^2} + \frac{n^2x^2}{4^3} - \frac{n^3x^3}{5^4} + \frac{n^4x^4}{6^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{n^2x^3(lx)^2}{1.2}\left(\frac{1}{3} - \frac{nx}{4^2} + \frac{n^2x^2}{5^3} - \frac{n^3x^3}{6^4} + \frac{n^4x^4}{7^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{n^3x^4(lx^3)}{1.2.3}\left(\frac{1}{4} - \frac{nx}{5^2} + \frac{n^2x^2}{6^3} - \frac{n^3x^3}{7^4} + \frac{n^4x^4}{8^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Das Integral fängt für $x = 0$ auch an. Dieses Integral wird dadurch gefunden, daß die Exponentialgröße x^{nx} in eine Reihe verwandelt wird, nämlich,

$$x^{nx} = 1 + nxlx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3x^3(lx)^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{n^4x^4(lx)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Hiezu wird das Differential ∂x als Factor gesetzt, worauf die Integration nach (96.) vorgenommen wird. Die Particularreihen werden dann nach den Potenzen von lx zerlegt, und zu neuen Reihen gebildet.

Man sehe den Briefwechsel zwischen Leibnitz und Joh. Bernoulli, Th. I. S. 8. 12. 20.

104. Das Integral (103.) erhält für $x = 1$ den Werth

$$1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \frac{n^4}{5^5} - \text{etc.}$$

eine durch ihre Form merkwürdige Reihe. Man sehe Io. Bernoullii Opera T. I. p. 184.

105. Von diesen Integrationen handelt Euler in der Integralrechnung, Th. I. §. 189-233. Lacroix,

Denn es ist (nach der angeführten Formel)

$$y = P(lx)^n - \int P\partial(lx)^n.$$

Da $\partial(lx)^n = n(lx)^{n-1}\cdot\frac{\partial x}{x}$,

so ist $y = P(lx)^n - n\int\frac{P\partial x}{x}(lx)^{n-1}$.

Man setze $\frac{P\partial x}{x} = \partial Q$, so ist auf gleiche Art

$$\int\partial Q(lx)^{n-1} = Q(lx)^{n-1} - (n-1)\int\frac{Q\partial x}{x}(lx)^{n-2}.$$

Wiederum setze man $\frac{Q\partial x}{x} = \partial R$, so ist

$$\int\partial R(lx)^{n-2} = R(lx)^{n-2} - (n-2)\int\frac{R\partial x}{x}(lx)^{n-3}.$$

Durch diese fortgesetzten Entwickelungen und Substitutionen wird das angegebene Integral erhalten.

96. $\partial y = x^{m-1}(lx)^n\partial x.$

$$y = x^m\left(\frac{(lx)^n}{m} - \frac{n(lx)^{n-1}}{m^2} + \frac{n.n-1.(lx)^{n-2}}{m^3} - \frac{n.n-1.n-2.(lx)^{n-3}}{m^4} + \text{etc.}\right) + C.$$

Leibnitz fand dieses Integral, s. Commerc. epist. Leibnitii et Bernoullii T. I. p. 8.

97. $\partial y = \frac{X\partial x}{(lx)^n}.$

$$y = \text{Const.} - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} + \text{etc.}$$

Die Integrale sind so genommen, daß sie für $x = o$ auch $= o$ sind. Es ist hier

$$P = x; \quad Q = -V(1 - xx); \quad R = -x;$$
$$S = +V(1 - xx); \quad T = +x; \quad \text{u. s. f.}$$

109. In dem Artikel, Differentialformeln (38.) setze man $n\varphi$ statt φ, so erhält man daraus folgende elementare Integrationsformeln.

$$\int \partial\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{n} \sin n\varphi.$$

$$\int \partial\varphi \sin n\varphi = -\frac{1}{n} \cos n\varphi.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n} \tang n\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n} \cot n\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \cos n\varphi}{\sin n\varphi^2} = -\frac{1}{n \sin n\varphi}.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin n\varphi}{\cos n\varphi^2} = \frac{1}{n \cos n\varphi}.$$

In der letzten Formel a. a. O. ist noch $\frac{1}{\cos\varphi}$ statt $\sec\varphi$, und $\frac{1}{\sin\varphi}$ statt $\operatorname{cosec}\varphi$ gesetzt.

110. $$\partial y = (A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.})\,\partial\varphi.$$
$$y = A\varphi + B\sin\varphi + \tfrac{1}{2} C\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3} D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4} E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

111. $$\partial y = (A + B\sin\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin 3\varphi + E\sin 4\varphi + \text{etc.})\,\partial\varphi.$$
$$y = A\varphi - B\cos\varphi - \tfrac{1}{2} C\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3} D\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4} E\cos 4\varphi - \text{etc.}$$

112. $\partial y = \partial\varphi \sin\varphi^m$.

Die Integration kann auf zweyerley Weise bewerkstelliget werden. Erstlich, man verwandelt $\sin\varphi^m$ in eine Reihe, nach den Sinus der vielfachen von φ für ein ungerades m, oder nach den Cosinus derselben für ein gerades m, zufolge Goniometrie (137.), worauf die Integration nach (110. 111.) bewerkstelligt wird. Zweytens wird die Integration stückweise vorgenommen, indem man das Differential folgeweise auf andere mit einer niedrigern Potenz von $\sin\varphi$ bringt.

Nämlich da $\partial\varphi = \frac{\partial \sin\varphi}{\cos\varphi}$ ist, so ist

$\partial y = \frac{\sin\varphi^m . \partial \sin\varphi}{\cos\varphi}$, und, wenn $\sin\varphi = x$ gesetzt wird, also $\cos\varphi = \sqrt{(1-xx)}$ ist, $\partial y = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Das involutorische Integral ist in (61.) angegeben; eine Reihe von entwickelten Werthen desselben in (62, 63.). Das Integral ist für ein ungerades m algebraisch.

113. In diesem Falle kann man das Integral noch auf eine andere Art ausdrucken. Nämlich nach der Formel II. in (59) ist

$$\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^{m-1}(1-xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{1} \int x^{m-2}(1-xx)^{\frac{1}{2}} \partial x.$$

Oder, wenn zur Abkürzung gesetzt wird $\sqrt{(1-xx)} = z$,

$$\int \frac{x^m \partial x}{z} = C - x^{m-1} z + \frac{m-1}{1} \int x^{m-2} z \, \partial x.$$

$$\int x^{m-2} z \, \partial x = -\tfrac{1}{3} x^{m-3} z^3 + \frac{m-3}{3} \int x^{m-4} z^3 \partial x$$

$$\int x^{m-4} z^3 \partial x = -\frac{1}{5} x^{m-3} z^5 + \frac{m-5}{5} \int x^{m-6} z^5 \partial x.$$

$$\int x^{m-6} z \partial x = -\frac{1}{7} x^{m-7} z^7 + \frac{m-7}{7} \int x^{m-8} z^7 \partial x.$$

u. s. f.

Exempel.

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - z.$$

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^2 z - \frac{2}{3} z^3.$$

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^4 z - \frac{4}{3} x^2 z^3 - \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} z^5.$$

$$\int \frac{x^7 \partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = C - x^6 z - \frac{6}{3} x^4 z^3 - \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^2 z^5 - \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7} z^7.$$

u. s. f.

114. Auf gleiche Art wird $\int \partial \varphi \operatorname{col} \varphi^m$ gefunden. Setzt man $\operatorname{col} \varphi = z$, so ist $\partial \varphi = -\frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, und $\int \partial \varphi \operatorname{col} \varphi^m = -\int \frac{z^m \partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$. Das Integral ist daher das Entgegengesetzte von dem Werthe des $\int \partial \varphi \sin \varphi^m$; nur ist zu merken, daß $-\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}} = +\operatorname{Ang\,col} z$ ist. Daher behält für gerade m das Glied, welches den Winkel φ enthält, in beiderley Integralen dasselbe Vorzeichen $+$.

115. $\partial y = \partial\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^n$.

Man setze $\sin\varphi = x$, so ist $\cos\varphi = \sqrt{(1-xx)}$, und $\partial\varphi\cos\varphi = \partial\sin\varphi = \partial x$, also

$\partial y = x^m (1-xx)^{\frac{n-1}{2}} \partial x$. Aus (59. IV. V.) ist, wenn $\sqrt{(1-xx)} = z$ zur Abkürzung gesetzt wird,

I. $y = -\frac{1}{m+n} x^{m-1} z^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int x^{m-2} z^{n-1} \partial x$,

II. $y = \frac{1}{m+n} x^{m+1} z^{n-1} + \frac{n-1}{m+n} \int x^m z^{n-3} \partial x$.

Man setze für x und z wieder ihre Werthe, so ist

I. $\int \partial\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^n = -\frac{1}{m+n} \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n$.

II. $\int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n = \frac{1}{m+n-2} \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n-1} + \frac{n-1}{m+n-2} \int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^{n-2}$.

In der zweyten Formel ist $m-2$ statt m gesetzt, damit man durch dieselbe sogleich den involutorischen Theil in der ersten Formel erhalte. Durch beide wird das Integral $\int \partial\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^n$ auf das $\int \partial\varphi \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^{n-2}$ gebracht.

116. Exempel. $\int \partial\varphi \sin\varphi^6 \cos\varphi^5$

$= -\frac{1}{11} \sin\varphi^5 \cos\varphi^6 + \frac{5 \cdot 1}{11 \cdot 9} \sin\varphi^5 \cos\varphi^4$

$- \frac{5 \cdot 4 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7} \sin\varphi^3 \cos\varphi^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} \sin\varphi^3 \cos\varphi^2$

$- \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \sin\varphi \cos\varphi^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \sin\varphi$.

117. I. $\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = \log. \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{l. tang } \frac{1}{2}\varphi.$

II. $\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = \log. \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} = \text{l. tang}(45° + \frac{1}{2}\varphi).$

III. $\int \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} = \log. \sin\varphi.$

IV. $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = -\log. \cos\varphi = \log. \sec. \varphi.$

V. $\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi . \cos\varphi} = \log. \text{tang } \varphi.$

VI. $\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang } \varphi.$

Denn man setze $\sin\varphi = x$, so ist $\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\partial x}{x\sqrt{(1-xx)}}$, wovon das Integral in (52.) gefunden ist.

Zweytens sey $\varphi = 90° - \omega$, so ist $\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\partial\omega}{\cos\omega}$; und $\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = \log. \frac{1-\sin\omega}{\cos\omega}$ $= -\log. \frac{\cos\omega}{1-\sin\omega}$; also $\int \frac{\partial\omega}{\cos\omega} = \log. \frac{\cos\omega}{1-\sin\omega}$.

Vertauscht man das Symbol ω mit φ, so erhält man die Formel II.

Die Formel III. zu erhalten, setze man $\sin\varphi = x$, so wird das Differential $= \frac{\partial x}{x}$, und das Integral $= \log. x = \log. \sin\varphi$. Die Formel IV. entsteht aus III. durch Vertauschung von φ mit $90° - \varphi$. Die Formel V. aus III. und IV. durch Addition. Die Formel VI. aus Differentialformeln (38.).

118. $\partial y = \frac{\partial\varphi \sin\varphi^m}{\cos\varphi^n}$.

Man ſetze $\sin\varphi = x$, und $\cos\varphi$ oder $\sqrt{(1-xx)} = z$,

ſo iſt $\partial y = \frac{x^m \partial x}{z^{n+1}}$, und (59. IV. VI.)

I. $y = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{x^{m-2}\partial x}{z^{n+1}}$.

II. $y = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{x^m \partial x}{z^{n-1}}$.

Das iſt,

I. $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^m}{\cos\varphi^n} = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{\sin\varphi^{m-1}}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi^n}$.

II. $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin\varphi^{m-1}}{\cos\varphi^{n-1}} - \frac{m-n}{n-1} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi^{n-2}}$.

Durch beide Operationen zuſammen fortgeſetzt werden die Exponenten von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ jedesmahl um 2 vermindert, ſo daß das Integral auf eine der Formen, $\int \partial\varphi \sin\varphi^r$, oder $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^r}{\cos\varphi}$, oder $\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^r}$, oder $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi^r}$, gebracht wird. Das erſte zu finden, iſt vorher gewieſen. Das letzte iſt algebraiſch, nämlich $= \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{\cos\varphi^{r-1}}$.

119. Wenn $m = n$ ist, so hat man in (118.) zuerst die Reduction nach II. und dann die nach I. vorzunehmen. Es ist

$$\text{I.} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^m}{\cos\varphi^m} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin\varphi^{m+1}}{\cos\varphi^{m-1}} - \frac{2}{m-1} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^m}{\cos\varphi^{m-2}}.$$

$$\text{II.} \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^m}{\cos\varphi^{m-2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\varphi^{m-1}}{\cos\varphi^{m-2}} + \frac{m-1}{2} \cdot \int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi^{m-2}}.$$

Dadurch wird die Integration zuletzt auf $\int \partial\varphi$ oder $\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi}$ gebracht. Jenes Integral ist φ, dieses ist $-\log.\cos\varphi$.

120. $$\partial y = \frac{\partial\varphi \sin\varphi^m}{\cos\varphi}.$$

Die erste Reduction in (118.) giebt

$$y = -\frac{1}{m-1} \cdot \sin\varphi^{m-1} + \int \frac{\partial\varphi \cdot \sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi}.$$

Daher ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = \log.\tang(45° + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = -\log\cos\varphi = +\log\sec\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^2}{\cos\varphi} = -\sin\varphi + \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^3}{\cos\varphi} = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi^2 + 1\sec\varphi.$$

$$\int \frac{\partial\varphi \sin\varphi^4}{\cos\varphi} = -\tfrac{1}{5}\sin\varphi^5 - \sin\varphi + \int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}.$$

u. s. f.

121. $$\partial y = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^n}.$$

Nach der zweyten Formel in (118.), wenn darin $m=2$ gesetzt wird, ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^{n-2}}.$$

Exempel.

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^6} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^5} + \frac{4\cdot 1}{5\cdot 3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

122. $$\partial y = \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n}.$$

Die Reduction auf kleinere Exponenten geschieht mittelst der Formeln III. und VI. in (59.). Es sey $\sin\varphi = x$; und $\cos\varphi = \sqrt{(1-xx)} = z$, so ist

$$\partial y = \frac{\partial x}{x^m z^{n+1}}, \text{ und}$$

I. $$y = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{x^{m-1}z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\cdot\int\frac{\partial x}{x^{m-2}z^{n+1}}.$$

II. $$y = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{m-1}z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{\partial x}{x^m z^{n-1}}.$$

Das ist,

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^m.\cos\varphi^n} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{m-1}.\cos\varphi^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\cdot\int\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2}.\cos\varphi^n}.$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2}.\cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{m-1}.\cos\varphi^{n-1}} + \frac{m+n-4}{n-1}\int\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^{m-2}\cos\varphi^{n-2}}.$$

123. $\partial y = \frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}$.

Man setze $\cos\varphi = \frac{1-xx}{1+xx}$, so ist

$\sin\varphi = \sqrt{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)} = \frac{2x}{1+xx}$, und

$\partial\varphi = \frac{\partial\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2\partial x}{1+xx}$. Dadurch ist

$$\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2\partial x}{a+b+(a-b)xx}.$$

Das Integral von dieser Formel ist nach (15.), wenn $a > b$ ist,

$$y = \frac{2}{\sqrt{(aa-bb)}}\,\text{Ang.tang}\,\frac{(a-b)x}{\sqrt{(aa-bb)}};$$

und nach (12.), wenn $a < b$ ist,

$$y = \frac{1}{\sqrt{(bb-aa)}}\log.\frac{\sqrt{(bb-aa)}+x(b-a)}{\sqrt{(bb-aa)}-x(b-a)}.$$

Um in diesen Integralen den Werth von x wieder herzustellen, bemerke man, daß

$x = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ ist. Ferner ist

$$2\,\text{Ang. tang}\frac{(a-b)x}{\sqrt{(aa-bb)}} = \text{Ang. tang}\frac{2x\sqrt{(aa-bb)}}{a+b-(a-b)xx}.$$

Setzt man hier für x seinen Werth, im Zähler nach der zweyten Form, im Nenner nach der ersten, so ist, wenn noch $\sqrt{(aa-bb)} = c$ gesetzt wird,

$$\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{c}\,\text{Ang. tang}\,\frac{c\sin\varphi}{a\cos\varphi+b}$$

$$= \frac{1}{c}\,\text{Ang. cos}\,\frac{a\cos\varphi+b}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{c}\,\text{Ang.sin}\,\frac{c\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

Für den Fall, da $a > b$ ist, wenn hier $\sqrt{(bb-aa)} = c$ gesetzt wird, durch Substitution des ersten Werthes von x,

$$\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{c}\log.\frac{a\cos\varphi+b+c\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

124. $$\partial y = \frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}.$$

$$y = -\frac{b}{aa-bb}\cdot\frac{\sin\varphi}{a+b\cos\varphi} + \frac{a}{aa-bb}\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

Dieses Integral wird unten (129.) in Form einer Reihe gefunden.

125. Die Integration von $\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ hat einige Schwierigkeit, weil sich keine Function findet, deren Differential aus zwey Differentialen von jener Form besteht. Es ist

$$\partial.\frac{\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}} = \frac{(n-1)b+a\cos\varphi-(n-2)b\cos\varphi^2)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}.$$

Dieſes Differential zerlege man in zwey Differentiale von einerley Form,

$$\frac{(f+g\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}+\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}},$$

in deren erſterm f und g gegeben, in dem andern B und C zu beſtimmen ſind. Bringt man beide Brüche auf einerley Nenner, ſo erhält man ein Differential von derſelben Form, wie das $\partial.\frac{\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$. Die drey Coefficienten von $1;\cos\varphi;\cos\varphi^2$ geben drey Gleichungen, zufolge der Methode der Unbeſtimmten. Da aber nur zwey unbekannte, B, C, vorhanden ſind, ſo ſetze man zu der Function von φ und deren Differential noch einen unbeſtimmten Factor A, und es geben nun die drey Gleichungen die Werthe von A, B, C. Dadurch wird die Integration von $\frac{(f+g\cos\varphi)\,\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ auf die von $\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$ gebracht. Setzt man zuerſt $f=1;\ g=0$, ſo wird das Integral von $\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ durch das von $\frac{(B+C\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$ gefunden, dieſes durch das von $\frac{(D+E\cos\varphi)\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-2}}$ worin D und E auf dieſelbe Weiſe, wie vorher B und C beſtimmt werden, und dieſer Prozeß wird fortgeſetzt, bis daß man auf die Formel $\frac{(M+N\cos\varphi)\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}$ kommt, wovon das Integral iſt

$$=\frac{N}{b}\varphi+\frac{bM-aN}{b}\int\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

126. Durch die Auflösung des Differentialfactors $\frac{1}{a+b\cos\varphi}$ in eine Reihe, die nach den Cosinus der Vielfachen von φ fortgeht, wird das Integral in einer besonders zu astronomischen Rechnungen bequemern Form erhalten. Der Radius Vector in einer Ellipse hat den Werth $\frac{1-ee}{1-e\cos\varphi}$, wenn die halbe große Axe $=1$, die Excentricität $=e$, und φ der Winkel des Radius Vector mit der Linie des größten Abstandes ist. Sollte φ der Winkel des Radius mit der Linie des kleinsten Abstandes seyn, so wird e negativ genommen. (Ellipse, 12.).

Es ist nach der gewöhnlichen Entwickelung eines Quotienten,

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi} = 1 - n\cos\varphi + n^2\cos\varphi^2 - n^3\cos\varphi^3 + n^4\cos\varphi^4 - \text{etc.}$$

Hieraus ließe sich $\int\frac{\partial\varphi}{1+n\cos\varphi}$ mittelst des Verfahrens in (112. 114.) finden. Allein zu der angezeigten Absicht ist folgendes besser.

Man setze (aus Goniometrie, 141.) für die Potenzen der Cosinus ihre Werthe, und bezeichne den Quotienten $\frac{1}{1+n\cos\varphi}$ durch

$$A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

so ist

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}n^2 + \frac{1.3}{2.4}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^6 + \frac{1..7}{2..8}n^8 + \text{etc.}$$

$$B = 2n\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}n^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$C = \tfrac{1}{2}n^2\left(1 + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 6}n^2 + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 6\cdot 4\cdot 8}n^4 + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 6\cdot 4\cdot 8\cdot 6\cdot 10}n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$D = \tfrac{1}{4}n^3\left(1 + \frac{4\cdot 5}{2\cdot 8}n^2 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 4\cdot 10}n^4 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 8\cdot 4\cdot 10\cdot 6\cdot 12}n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$E = \tfrac{1}{8}n^4\left(1 + \frac{5\cdot 6}{2\cdot 10}n^2 + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 10\cdot 4\cdot 12}n^4 + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 10\cdot 4\cdot 12\cdot 6\cdot 14}n^6 + \text{etc.}\right).$$

u. s. f.

Es ist zu merken, daß der erste Coefficient

$A = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}$, und der zweyte

$B = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-nn)}} - 1\right)$ ist. Ferner machen die übrigen Coefficienten eine rücklaufende Reihe aus, nachdem die beiden ersten bestimmt sind. Denn man multiplicire den Quotienten,

$$A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.}$$

durch $1 + n\cos\varphi$, so ist, weil

$\cos\varphi.\cos\lambda\varphi = \frac{1}{2}\cos(\lambda-1)\varphi + \frac{1}{2}\cos(\lambda+1)\varphi$ ist. (Goniometrie 27.),

$$1 = A - \tfrac{1}{2}nB$$
$$- \tfrac{1}{2}(2B - 2nA - nC)\cos\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2}(2C - nB - nD)\cos 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{2}(2D - nC - nE)\cos 3\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2}(2E - nD - nF)\cos 4\varphi$$
$$- \text{ etc.}$$

Dadurch ist, weil für jeden Werth von φ die Reihe $= 1$ seyn muß, jeder Coefficient eines Cosinus $= 0$, so daß

$$B = \frac{2}{n}(A - 1); \qquad E = \frac{2D - nC}{n};$$

$$C = \frac{2B - 2nA}{n}; \qquad F = \frac{2E - nD}{n};$$

$$D = \frac{2C - nB}{n}; \quad \text{u. s. f.}$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{1 + n\cos\varphi} = A\varphi - B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi - \text{etc.}$$

127. $\partial y = \partial\varphi(1 + n\cos\varphi)^\nu$.

Die Entwickelung des Differentialfactors nach dem binomischen Lehrsatze giebt

$$(1 + n\cos\varphi)^\nu = 1 + \mathfrak{A}n\cos\varphi + \mathfrak{B}n^2\cos\varphi^2$$
$$+ \mathfrak{C}n^3\cos\varphi^3 + \mathfrak{D}n^4\cos\varphi^4 + \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. die Binomialcoefficienten in der νten Potenz sind. Entwickelt man die Potenzen der Cosinus nach Goniometrie (141.), so wird

$$(1 + n\cos\varphi)^\nu = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi$$
$$+ D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{etc.}$$

Die Coefficienten machen auch hier eine rücklaufende Reihe, worin nur die beiden ersten aus der entwickelten ersten Reihe bestimmt zu werden brauchen. Man differentiire nämlich

die Potenz des Binomium, und ihren in der Reihe enthaltenen Werth, so ist, nach Absonderung des Differentials $\partial\varphi$,

$$\frac{\nu n(1+n\cos\varphi)^{\nu}\sin\varphi}{1+n\cos\varphi} = B\sin\varphi + 2C\sin 2\varphi + 3D\sin 3\varphi + 4E\sin 4\varphi + 5F\sin 5\varphi + \text{etc.}$$

Diese Reihe multiplicire man mit $1+n\cos\varphi$, und die erstere, woraus sie entstanden ist, mit $\nu n\sin\varphi$, so werden zwey sich gleiche Reihen erhalten. Nun zerlege man noch die Producte der Sinus und Cosinus. Es ist $\sin\lambda\varphi.\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi + \frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$, und $\cos\lambda\varphi.\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$. (Goniometrie, 27.) Man ordne die Glieder nach den Sinus der Vielfachen von φ, und fasse sie in eine Reihe zusammen. Diese ist

$$0 = (B + \tfrac{2}{2}Cn - \nu An + \frac{\nu}{2}Cn)\sin\varphi$$
$$+ (2C + \tfrac{1}{2}Bn + \tfrac{3}{2}Dn - \frac{\nu}{2}Bn + \frac{\nu}{2}Dn)\sin 2\varphi$$
$$+ (3D + \tfrac{2}{2}Cn + \tfrac{4}{2}En - \frac{\nu}{2}Cn + \frac{\nu}{2}En)\sin 3\varphi$$
$$+ (4E + \tfrac{3}{2}Dn + \tfrac{5}{2}Fn - \frac{\nu}{2}Dn + \frac{\nu}{2}Fn)\sin 4\varphi$$
$$+ \text{etc.}$$

Hieraus ist

$$C = \frac{2\nu An - 2B}{(\nu+2)n}; \quad E = \frac{(\nu-2)Cn - 6D}{(\nu+4)n};$$
$$D = \frac{(\nu-1)Bn - 4C}{(\nu+3)n}; \quad F = \frac{(\nu-3)Dn - 8E}{(\nu+5)n};$$

u. s. f.

Die Coefficienten A und B werden auf dieselbe Art gefunden, wie in (126.). Man hat nur nöthig, statt

$-n; +n^2; -n^3; +n^4; -n^5; +n^6;$ etc.

daſelbſt hier zu ſetzen

$+\mathfrak{A}n; +\mathfrak{B}n^2; +\mathfrak{C}n^3; +\mathfrak{D}n^4; \mathfrak{E}n^5; +\mathfrak{F}n^6;$ etc.

und $-\mathfrak{B}$ mit $+\mathfrak{B}$ zu vertauſchen, ſo wird aus den Reihen für A und B in (126.) hier

$$\mathfrak{A} = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}n^2 + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{D}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{F}n^6 + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{B} = 2n\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{C}n^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{E}n^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathfrak{G}n^6 + \text{etc.}\right).$$

Durch dieſelben Vertauſchungen laſſen ſich auch die Werthe von den folgenden Coefficienten aus den gleichnamigen in (126.) finden, nur muß man bemerken, daß die in den geraden Stellen daſelbſt das Vorzeichen $-$, hier aber $+$ haben.

Es iſt

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{B}n^2 + \frac{3.4}{2.6}\mathfrak{D}n^4 + \frac{3.4.5.6}{2.6.4.8}\mathfrak{F}n^6 + \text{etc.}\right)$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{4}\left(\mathfrak{C}n^3 + \frac{4.5}{2.8}\mathfrak{E}n^5 + \frac{4.5.6.7}{2.8.4.10}\mathfrak{G}n^7 + \text{etc.}\right)$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{8}\left(\mathfrak{D}n^4 + \frac{5.6}{2.10}\mathfrak{F}n^6 + \frac{5.6.7.8}{2.10.4.12}\mathfrak{H}n^8 + \text{etc.}\right)$$

u. ſ. f.

Dieſe Werthe dienen, wenn der Exponent ν des Binomium eine ganze negative Zahl iſt. In dieſem Falle wird in einem der Glieder der rücklaufenden Reihe ſowohl Zähler als Nenner $= 0$, daher deſſen Werth unbeſtimmt

bleibt, oder hier auf eine mühsame Art gesucht werden müßte. Für positive ν mag man sich dieser Reihen-Ausdrücke, oder der rücklaufenden Reihe bedienen.

Nach der Bestimmung der Coefficienten A, B, C, etc. wird

$$\int \partial\varphi (1+n\cos\varphi)^{\nu} = A\varphi + B\sin\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}D\sin 3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

128. Exempel. Für $\nu = 2$ ist

$\mathfrak{A}=2$; $\mathfrak{B}=1$; $\mathfrak{C}=0$, u. s. f. Also ist

$A = 1+\tfrac{1}{2}n^2$; $B = 2n$; $C = \tfrac{1}{2}n^2$,

und

$$\int \partial\varphi (1+n\cos\varphi)^2 = (1+\tfrac{1}{2}n^2)\varphi + 2n\sin\varphi + \tfrac{1}{4}n^2\sin 2\varphi.$$

Auf gleiche Art ist

$$\int \partial\varphi (1+n\cos\varphi)^3 = (1+\tfrac{3}{2}n^2)\varphi + (3n+\tfrac{3}{4}n^3)\sin\varphi + \tfrac{3}{4}n^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{12}n^3\sin 3\varphi.$$

129. Exempel. $\partial y = \dfrac{\partial\varphi}{(1+n\cos\varphi)^2}$.

Hier ist $\nu = -2$, also $\mathfrak{A}=-2$; $\mathfrak{B}=+3$; $\mathfrak{C}=-4$; $\mathfrak{D}=+5$; $\mathfrak{E}=-6$; u. s. f. Dadurch ist

$$A = 1+\tfrac{1}{2}\cdot 3n^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}5n^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7n^6 + \text{etc.}$$

$$B = -2\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2n + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 4n^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 6n^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 8n^7 + \text{etc.}\right).$$

$$C = +\tfrac{1}{2}\left(1\cdot 3n^2 + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 6}\cdot 5n^4 + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 6\cdot 4\cdot 8}\cdot 7n^6 + \text{etc.}\right).$$

$$D = -\tfrac{1}{4}\left(1\cdot 4n^3 + \frac{4\cdot 5}{2\cdot 8}\cdot 6n^5 + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 4\cdot 10}\cdot 8n^7 + \text{etc.}\right).$$

$$E = +\tfrac{1}{8}(1.5n^4 + \frac{5.6}{2.10}.7n^6 + \text{etc.}).$$

$$F = -\tfrac{1}{16}(1.6n^5 + \frac{6.7}{2.12}.8n^7 + \text{etc.}).$$

$$G = +\tfrac{1}{32}(1.7n^6 + \text{etc.})$$

Die mittlere Anomalie in der Bahn eines Planeten ist $= (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \int \frac{\partial\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2}$, wo e und φ die in (126.) schon angeführten Bedeutungen haben.

130. Euler hat noch einige merkwürdige Relationen für diese Coefficienten entdeckt. I. Es ist, wenn n als eine veränderliche Größe behandelt wird,

$$B = \frac{2(\nu+2)}{n} \int An\partial n - 2An,$$

wo das Integral so zu nehmen ist, daß es verschwinde, wenn $n = 0$ gesetzt wird.

II. Es sey ν negativ und $= -\mu$, so daß

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)_\mu} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

Ferner sey

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu+1}} = A' + B'\cos\varphi + C'\cos 2\varphi + D'\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

so verhalten sich die gleichnamigen Coefficienten in beiden Reihen folgendergestalt:

$$A' = A + \frac{n\partial A}{\mu\partial n}.$$

$$B' = B + \frac{n\partial B}{\mu\partial n}.$$

$$C' = C + \frac{n\partial C}{\mu\partial n}, \text{ u. s. f.}$$

Zugleich ist

$$B' = \frac{2(A-A')}{n}; C' = \frac{2(B-B')-2A'n}{n};$$

$$D' = \frac{2(C-C')-B'n}{n}; E' = \frac{2(D-D')-C'n}{n};$$

u. s. f.

III. Es sey, wie vorher, $(1+n\cos\varphi)^\nu = A + B\cos\varphi + C\cos n\varphi + \text{etc.}$ und $(1+n\cos\varphi)^{-\nu-1} = {}'A + {}'B\cos\varphi + {}'C\cos 2\varphi + \text{etc.}$ so ist $A = {}'A(1-nn)^{\nu+\frac{1}{2}}$. Dadurch kann man den Coefficienten A auf zweyerley Art finden, entweder durch die Formel

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\nu.\nu-1.}{1.2}n^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\nu..\nu-3.}{1..4}n^4 + \text{etc.}$$

oder durch diese,

$$A = (1-nn)^{\nu+\frac{1}{2}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\nu+1.\nu+2.}{1.2}n^2 + \frac{1.3.}{2.4}\cdot\frac{\nu+1..\nu+4.}{1..4}n^4 + \text{etc.}\right),$$

durch jene für kleine n, durch diese für n, die nahe $= 1$ sind.

IV. Euler zeigt noch (§. 292.) auf eine sinnreiche Art, wie man für solche n, die wenig von der Einheit verschieden sind, die Reihe convergent machen könne, durch Herausstoßung mehrerer Coefficienten. Lacroix hat diese Methode in seiner Integralrechnung, nr. 465. 466. vorgetragen mit einigen Erläuterungen, die aber aus nähern Quellen sich hätten schöpfen lassen.

Fuß hat in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. p. 390. sqq. eine sehr feine Entwickelung des Binomium $(1-n\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ gewiesen, und für die Coefficienten B, C, D, etc. sehr bequeme genäherte Werthe zum Gebrauch in der Astronomie gegeben.

Arbogaſt hat in ſeinem Calcul des dérivations, §. 413 gezeigt, wie eine Function der Reihe, $\alpha + \beta \cos\varphi + \gamma \cos\varphi^2 + \delta \cos\varphi^3 +$ etc. in die Reihe $A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi +$ etc. umgewandelt wird, und leitet daraus für den beſondern Fall, $(1 - \beta\cos\varphi)^{-n}$, die Entwicklung her. Er gebraucht dazu den Satz, daß $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}})$ iſt (Differentialformeln, 48.). Daher werden die Potenzen von $\cos\varphi$ aus Theilen von der Form, $\frac{1}{2}(e^{r\varphi\sqrt{-1}} + e^{-r\varphi\sqrt{-1}})$, zuſammengeſetzt, wozu bey geraden Potenzen eine gegebene mögliche Zahl kommt. Für jeden ſolchen binomiſchen Theil iſt der Werth $= \cos r\varphi$.

131. $\partial y = e^{\alpha\varphi}\partial\varphi$.

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}.$$

Aus Differentialformeln, 14. Es iſt e die Baſis der natürlichen Logarithmen.

132. $\partial y = e^{\alpha\varphi}\partial\varphi \sin\varphi$.

$$y = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha \sin\varphi - \cos\varphi)}{1 + \alpha\alpha} + C.$$

Wenn y mit φ zugleich $= 0$ ſeyn ſoll, ſo iſt

$$\text{Conſt.} = + \frac{1}{1 + \alpha\alpha}.$$

Nach der Formel in der Einleitung iſt

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi}\, \partial\varphi \cos\varphi,$$

und wiederum

$$\int e^{\alpha\varphi}\partial\varphi \cos\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \cos\varphi + \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} \sin\varphi\, \partial\varphi.$$

Also $y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin\varphi - \frac{1}{\alpha\alpha} e^{\alpha\varphi} \cos\varphi - \frac{1}{\alpha\alpha} y$.

Daraus wird sogleich der angegebene Werth von y erhalten.

133. Auf gleiche Art ist

$$\int e^{\alpha\varphi} \partial\varphi \cos\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\varphi + \sin\varphi)}{1+\alpha\alpha};$$

134. Aus diesen Elementarformeln werden die Integrale von $e^{\alpha\varphi}\partial\varphi\sin\varphi^n$, und $e^{\alpha\varphi}\partial\varphi\cos\varphi^n$, durch ein ähnliches Verfahren wie in (132.), gefunden, indem die Exponenten von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ bey jeder successiven Integration um 2 erniedrigt werden. Euleri Calc. integr. T. I. §. 266. 270.

Man kann auch die Potenzen der Sinus und Cosinus in Sinus und Cosinus der Vielfachen von φ auflösen, wodurch die Integration auf die Formeln in (131. 132.) gebracht wird. Durch diese Entwicklung wird auch das Integral von $e^{\alpha\varphi}\sin\varphi^m\cos\varphi^n$ gefunden.

134*. Aus Eulers handschriftlichen Nachlasse sind noch in der neuen Ausgabe seiner Integralrechnung vier Abhandlungen über die Integration sehr schwieriger Differentialformeln mit Winkelfunctionen eingerückt. Drey derselben betreffen das $\int \frac{\partial\varphi.\cos\lambda\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^n}$, welches Euler zuerst nur durch Induction finden konnte.

V. Allgemeine Methoden, Integrale durch Annäherung zu finden.

135. Es sey X eine Function von x. Man nehme eine nicht stetige Reihe der Werthe von X für die Werthe, a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, $a+3\alpha$, ... $a+(m-1)\alpha$, $a+m\alpha$, von x, und bezeichne dieselben durch (o), (1), (2), (3) ..... (m−1), (m); die Reihe selbst durch (A). Die in den Klammern eingeschlossenen Zah-

len ſind die Stellenzahlen für die Glieder der Reihe (A). Die Reihe der X ſey eine durchgehends entweder zunehmende oder abnehmende. In der Reihe (A) ſchalte man mehrere Glieder, in jedem Intervall gleich viele, nach dem Geſetz der Function ein, und ſetze für dieſe den Abſtand der Glieder oder den Unterſchied der zugehörigen $x = \Delta x$. Dieſe zweyte Reihe bezeichne man durch (B). In der Reihe (A) multiplicire man jedes Glied, außer dem letzten (m), mit dem Abſtande zweyer nächſten Glieder, und bezeichne die Summe der Producte durch Σ; in der interpolirten Reihe mit Δx, das letzte Glied gleichfalls ausgeſchloſſen, und bezeichne die Summe der Producte durch S. Die Reihe der X ſey zuerſt eine zunehmende, ſo iſt Σ kleiner als S, weil die eingeſchalteten Glieder in der Reihe (B) größer ſind, als das ihnen zunächſt vorhergehende Glied in der Reihe (A). Multiplicirt man aber die Glieder der Reihe (A) von dem Gliede (1) an bis zu dem Gliede (m) mit α, ſo iſt die Summe der Producte, oder $\Sigma - \alpha(0) + \alpha(m)$, größer als S, ſo daß S zwiſchen die Summen,

$$\alpha(0) + \alpha(1) + \alpha(2) \ldots\ldots + \alpha(m-1),$$
$$\text{und } \alpha(1) + \alpha(2) \ldots\ldots + \alpha(m)$$

fällt. Die Reihe (B) wird eine ſtetige, wenn Δx unendlich klein genommen wird, und die endliche Differenz der Reihe S, nehmlich $X\Delta x$, wo X das letzte Glied (m) bedeutet, verwandelt ſich in $X\partial x$. Alſo iſt $\partial S = X\partial x$, folglich die Summe der ſtetigen Reihe $S = \int X\partial x$. Demnach liegt der Werth von $\int X\partial x$ zwiſchen den vorher angegebenen Gränzen. Je kleiner der Abſtand x zweyer Glieder der nicht ſtetigen Reihe genommen wird, deſto näher kommen ſich beide Gränzen einander und dem Werthe von $\int X\partial x$.

Iſt die Reihe der X eine abnehmende, ſo iſt die Reihe, $\alpha(0) + \alpha(1) + \alpha(2) \ldots + \alpha(m-1)$ die größere Gränze, und $\alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(3) \ldots + \alpha(m)$ die kleinere.

136. Diese Methode, ein Integral zu finden, ist die schon von Archimedes und in den neueren Zeiten von Cavaleri, und besonders von Wallis, gebrauchte Summations-Methode. Kann man die beiden Summen, und die zwischen ihnen liegende gemeinschaftliche Gränze, in endlichen Ausdrücken angeben, so erhält man eben das Resultat, welches die Integralrechnung giebt. Daher ist die Benennung, Integralrechnung und Integriren, wofür man auch Summiren gebraucht hat, und die Bezeichnung der Operation durch $\int$ entstanden. Es ist aber dieser Begriff zu eingeschränkt, nur auf Differentialformeln anwendbar. Allein auch bey diesen beruht die ganze Theorie der Integration nicht auf dem Begriffe vom Summiren, sondern auf dem Rückgange von den Differentialverhältnissen zwischen einer veränderlichen Größe und ihrer Function zu der Relation zwischen ihnen selbst.

137. Exempel. Die Gränzen für $\int x^3 \partial x$ zu finden. Hier ist $X = x^3$, und $\Sigma = (0 + \alpha^3 + (2\alpha)^3 + (3\alpha)^3 \ldots + (m-1)^3\alpha^3)\alpha = \frac{1}{4}m^2(m-1)^2\alpha^4$. α. (Differenzenrechnung, 72. oder Arithmetische Reihen höherer Ordn. 15.). Setzt man x für $m\alpha$, so ist $\Sigma = \frac{1}{4}x^2(x-\alpha)^2$. Dieses ist die kleinere Gränze für $\int x^3 \partial x$. Die andere ist $= \Sigma + (ma)^3\alpha = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2\alpha^4 = \frac{1}{4}x^2(x+\alpha)^2$. Die gemeinschaftliche Grenze für beide ist $\frac{1}{4}x^4 = \int x^3 \partial x$.

138. Exempel. Es sey $y = \int \frac{\partial x}{x^n}$; es soll der Werth durch eine Reihe näherungsweise von $x = a$ bis $x = a + b$ ausgedruckt werden.

Der Werth von y fällt zwischen

$$\alpha\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{(a+\alpha)^n} + \frac{1}{(a+2\alpha)^n} \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots + \frac{1}{(a+(m-1)\alpha)^n}\right),$$

und

$$\alpha\left(\frac{1}{(a+\alpha)^n}+\frac{1}{(a+2\alpha)^n}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right).$$

Das Mittel beider ist =

$$\alpha\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{(a+\alpha)^n}+\frac{1}{(a+2\alpha)^n}\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right)-\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{(a+m\alpha)^n}\right),$$

wo der subtractive Theil beygefügt ist, weil in dem ersten Theile anstatt der Hälfte des ersten und letzten Gliedes die ganzen genommen sind. Dieses ist ein genäherter Werth von $\int\frac{\partial x}{x^n}$. Setzt man für α dessen Werth $\alpha=\frac{b}{m}$, so ist nach der Division durch m^n und durch α oder dessen Werth, auch Versetzung des subtractiven Theils,

$$\frac{1}{(ma)^n}+\frac{1}{(ma+b)^n}+\frac{1}{(ma+2b)^n}\cdots\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(ma+mb)^n}=\frac{m}{m^nb}\int\frac{\partial x}{x^n}+\frac{1}{2(ma)^n}$$

$$+\frac{1}{2(ma+mb)^n},$$

desto genauer, je größer m genommen wird.

Die Integralrechnung giebt $\int\frac{\partial x}{x^n}=$

$$\text{Conſt.}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

wenn es $=0$ ist, für $x=a$. Für $x=a+b$, ist

$$\int\frac{\partial x}{x^n}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{(a+b)^{n-1}}\right).$$

Nimmt man $n=1$, so ist $\int\frac{\partial x}{x}=\log\frac{a+b}{a}$, und

dadurch $\frac{1}{ma} + \frac{1}{ma+b} + \frac{1}{ma+2b} + \frac{1}{ma+3b}$
$\ldots + \frac{1}{ma+mb} = \frac{m}{b} \log. \frac{a+b}{a} + \frac{2a+b}{2ma(a+b)}$,
deſto genauer je größer m genommen wird.

139. Man wird das erklärte Verfahren eher gebrauchen können, um Reihen durch Annäherung zu ſummiren, als Integrale durch Reihen auszudrucken, weil, wo man nicht integriren kann, (die circularen und logarithmiſchen Functionen den algebraiſchen als gleichgültig gerechnet,) man auch nicht wird ſummiren können. Der Taylorſche Lehrſatz aber giebt ein bequemes Mittel Integrale durch Annäherung zu finden. In dem Artikel Differenzen-Rechnung (38. vergl. 17. daſ.) iſt gefunden, daß

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo f ein Functionszeichen iſt.

Setzt man u negativ, ſo iſt

$$f(x-u) = fx - \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \frac{u^2}{1.2} - \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

140. Es ſey $\partial y = X \partial x$ und X die Function von x, welche in jenen Formeln durch $\frac{\partial fx}{\partial x}$ bezeichnet iſt, ſo daß $y = fx$ iſt. Man finde, oder nehme an, daß für $x = a$ die Function fx den Werth A habe, ob man gleich nicht angeben kann, wie A aus a zuſammen geſetzt wird, weil dieſes vorausſetzt, daß man die Formel $X \partial x$ integriren könne. Man ſetze $\partial X = P \partial x$; $\partial P = Q \partial x$;

$\partial Q = R\partial x$, u. s. f. so sind P, Q, R, etc. unbestimmte Werthe von Functionen, deren Formen gegeben werden, und es ist

$$f(x+u) = fx + Xu + \tfrac{1}{2}Pu^2 + \tfrac{1}{3}Qu^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}Ru^4 + \text{etc.}$$

$$f(x-u) = fx - Xu + \tfrac{1}{2}Pu^2 - \tfrac{1}{3}Qu^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}Ru^4 - \text{etc.}$$

141. Man lasse x unbestimmt, setze aber $x-u=a$, also $u=x-a$, so ist, da $fa=A$ gesetzt worden, aus der zweyten Formel,

$$fx = A + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \tfrac{1}{3}Q(x-a)^3 - \tfrac{1}{2\cdot 4}R(x-a)^4 + \text{etc.}$$

Hieraus wird, mittelst des als bekannt gesetzten Werthes A der Function fa der Werth der mit ihr gleichartigen Function fx gefunden, ohne die Form derselben zu kennen.

142. Man setze in der ersten Formel $x+u=z$, so daß $u=z-x$ sey. Für $x=a$ verwandelen sich die Functionen X, P, Q, R, etc. in B, C, D, E, etc. Nun ist die erstere Formel

$$fz = A + B(z-a) + \tfrac{1}{2}C(z-a)^2 + \tfrac{1}{3}D(z-a)^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}E(z-a)^4 + \text{etc.}$$

Hier wird ebenfalls vermittelst des für die Function fa gesetzten Werthes der Werth der mit ihr gleichartigen Function fz gefunden, ohne die Beschaffenheit derselben zu kennen. Da die Bezeichnung der veränderlichen Functionalgröße willkührlich ist, so setze man x statt z, oder das z in der letztern Formel dem x in der erstern gleich, und es ist

$$fx = A + B(x-a) + \tfrac{1}{2}C(x-a)^2 + \tfrac{1}{3}D(x-a)^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}E(x-a)^4 + \text{etc.}$$

143. Nimmt man das Mittel von beiden Bestimmungen der Function fx, so wird man einen mehr genäherten Werth erhalten, als durch eine einzelne dieser Formeln. Wäre das Intervall $x-a$ beträchtlich, oder wären die Differentialquotienten ansehnlich groß, so müßte man jenes

Intervall in einige Theile theilen, und den Werth von fx durch eben so viele Paare von Formeln successiv suchen. Nämlich wenn $x - a = m\alpha$ ist, so suche man zuerst den Werth von $f(a+\alpha)$, daraus den von $f(a+2\alpha)$, aus diesem den von $f(a+3\alpha)$, u. s. f. bis zu dem $f(a+m\alpha)$.

144. Es werde z. B. das Intervall $x-a$ in drey gleiche Theile α getheilt, so daß $x = a+3\alpha$ sey. In der Formel (140.) ist nun successiv für a zu setzen: a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, und für x ist mit diesen zustimmend zu setzen: $a+\alpha$, $a+2\alpha$, $a+3\alpha$. Die Function fx und die Differentialquotienten X, P, Q, R, etc. seyn für diese Werthe von x folgende:

x	fx	X	P	Q	R	etc.
a	A	B	C	D	E	⁊
$a+\alpha$	A′	B′	C′	D′	E′	⁊
$a+2\alpha$	A″	B″	C″	D″	E″	⁊
$a+3\alpha$	A‴	B‴	C‴	D‴	E‴	⁊

Nach diesen Bezeichnungen wird die Formel in (141.) für jeden der drey letztern Werthe von x:

$$A' = A + B'\alpha - \tfrac{1}{2}C'\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D'\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E'\alpha^4 + \text{etc.}$$

$$A'' = A' + B''\alpha - \tfrac{1}{2}C''\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D''\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E''\alpha^4 + \text{etc.}$$

$$A''' = A'' + B'''\alpha - \tfrac{1}{2}C'''\alpha^2 + \tfrac{1}{6}D'''\alpha^3 - \tfrac{1}{24}E'''\alpha^4 + \text{etc.}$$

Aus allen drey Formeln zusammen genommen entsteht

$$A''' = A + \alpha(B' + B'' + B''') - \tfrac{1}{2}\alpha^2(C' + C'' + C''') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D' + D'' + D''') - \tfrac{1}{24}\alpha^4(E' + E'' + E''') + \text{etc.}$$

In der Formel (142.) setze man ebenfalls für a successiv a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, und für x mit diesen zustimmend $a+\alpha$, $a+2\alpha$, $a+3\alpha$, so entstehen daraus drey Formeln, welche nach der Reihe die Coefficienten B, B′, B″;

C, C′, C″, etc. für die Werthe a, a + α, a + 2α von a enthalten. Durch die Addition dieser Formeln entsteht folgende:

$$A''' = A + \alpha(B + B' + B'') + \tfrac{1}{2}\alpha^2(C + C' + C'') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D + D' + D'') + \tfrac{1}{24}\alpha^4(E + E' + E'') + \text{etc.}$$

Das Mittel von beiden Formeln ist

$$A''' = A + \alpha(B + B' + B'' + B''') - \tfrac{1}{2}\alpha(B + B''') + \tfrac{1}{4}\alpha^2(C - C''') + \tfrac{1}{6}\alpha^3(D + D' + D'' + D''') - \tfrac{1}{12}\alpha^3(D + D''') + \tfrac{1}{48}\alpha^4(E - E''') + \text{etc.}$$

Hier ist A‴ der Werth des Integrals, $\int X \partial x$ für $x = a + 3\alpha$.

145. Exempel. Es sey $\partial y = \frac{\partial x}{x}$, also $y = \log \frac{x}{a}$, wo die Constante a genommen ist, daß $y = 0$ ist, wenn $x = a$ gesetzt wird. Hier ist $A = 0$; $X = \frac{1}{x}$; also $B = \frac{1}{a}$; $B' = \frac{1}{a+\alpha}$, u. s. f. $P = -\frac{1}{x^2}$, also $C = -\frac{1}{a^2}$, $C' = -\frac{1}{(a+\alpha)^2}$, u. s. f. $Q = +\frac{2}{x^3}$, und $D = \frac{2}{a^3}$, $D' = \frac{2}{(a+\alpha)^3}$ u. s. f. $R = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$; daher $E = -\frac{2 \cdot 3}{a^4}$, u. s. f.

Es sey $x = a + m\alpha$, so ist

$$\log x = \alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+\alpha} \cdots + \frac{1}{a+ma}\right) - \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{4}\alpha^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right).$$

$$+\tfrac{1}{3}\alpha^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(a+\alpha)^3}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^3}\right)$$
$$-\tfrac{1}{6}\alpha^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{x^3}\right)-\tfrac{1}{8}\alpha^4\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{x^4}\right)$$
$$+\tfrac{1}{5}\alpha^6\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{(a+\alpha)^5}\cdots+\frac{1}{(a+m\alpha)^5}\right)$$
$$-\tfrac{1}{10}\alpha^5\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{x^5}\right)-\tfrac{1}{12}\alpha^6\left(\frac{1}{a^6}-\frac{1}{x^6}\right)$$
$$+\text{ etc.}$$

145. Die Methode, welche Joh. Bernoulli angegeben hat, das $\int X\partial x$ zu finden, beruht auf der in der Einleitung gewiesenen. Es ist $\int X\partial x = Xx - \int x\partial X$. Der zweyte Theil werde so ausgedruckt: $\int \frac{\partial X}{\partial x} x\partial x$, so ist davon das Integral $= \frac{1}{2}x^2.\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{1}{2}\int x^2.\frac{\partial^2 X}{\partial x}$, wenn ∂x unveränderlich genommen wird, d. i. wenn x gleichförmig wächst oder abnimmt. Eben so ist

$$\int x^2.\frac{\partial^2 X}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.x^2\partial x = \tfrac{1}{3}x^3.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \tfrac{1}{3}\int x^3.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}.$$

Ferner ist $\int x^3.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \int \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}.x^3\partial x = \frac{1}{4}x^3.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$
$-\frac{1}{4}\int x^4.\frac{\partial^4 X}{\partial x^3}$, u. s. f.

Aus diesen successiven Integrationen entsteht

$$\int X\partial x = \text{Const.} + X.\frac{x}{1} - \frac{\partial X}{\partial x}.\frac{x^2}{1.2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.\frac{x3}{1.2.3} - \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}.\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Die Formel ist in der allgemeinen (141.) enthalten, und entsteht daraus, wenn $a = o$ genommen wird, so daß A der Werth des Integrals für $x = o$ ist, und die Constante giebt.

Eine andere Form gab Bernoulli seiner Reihe dadurch, daß er sie nach den Potenzen der Function von x ordnete, und das Differential derselben constant setzte. Es sey u eine Function von x, so ist, wenn ∂u unveränderlich genommen wird,

$$\int u\partial x = \int u\partial u.\frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2}u^2.\frac{\partial x}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\int u^2.\frac{\partial^2 x}{\partial u}.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\int u^2.\frac{\partial^2 x}{\partial u} = \int u^2\partial u.\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \tfrac{1}{3}u^3.\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \tfrac{1}{3}\int u^3.\frac{\partial^3 x}{\partial u^2}.$$

Ferner

$$\int u^3.\frac{\partial^3 x}{\partial u^2} = \int u^3\partial u.\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} = \tfrac{1}{4}u^4.\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} - \tfrac{1}{4}\int u^4.\frac{\partial^4 x}{\partial u^3},$$

u. s. f. Daher ist

$$\int u\partial x = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}.\frac{\partial x}{\partial u}u^2 - \frac{1.1}{2.3}.\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u^3 + \frac{1.1.1}{2.3.4}.\frac{\partial^3 x}{\partial u^3}u^4 - \frac{1.1.1.1}{2.3.4.5}.\frac{\partial^4 x}{\partial u^4}u^5 + \text{etc.}$$

Man sehe Leibn. et Bern. Commerc. epist. T. I. p. 16. 22. 28. 75. und Io. Bernoulli Opp. T. I. p. 125. T. III. p. 488.

147. Taylor hat in seiner Methodus incrementorum p. 38, ein Verfahren angegeben, welches zur Abkürzung der Berechnung nach der Bernoullischen Formel sehr dienlich ist. Es ist erstlich

$$\int X\partial x = Xx - \int x\partial X.$$

Man bezeichne eine noch unbestimmte willkürliche Function von x durch w, setze ihr Differential constant, und führe dieses in jene Formel ein, so daß

$$\int X\partial x = Xx - \int \frac{\partial X}{\partial w}.x\partial w.$$

Es sey $\int x\partial w = p$, so ist

$$\int \frac{\partial X}{\partial w}\cdot\partial p = p\cdot\frac{\partial X}{\partial w} - \int p\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial w}= p\cdot\frac{\partial X}{\partial w} - \int \frac{\partial^2 X}{\partial w^2}\cdot p\partial w.$$

Man setze $\int p\partial w = q$, so ist

$$\int \frac{\partial^2 X}{\partial w^2}\cdot\partial q = q\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - \int q\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial w^2}$$

$$= q\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - \int \frac{\partial^3 X}{\partial w^3}\cdot q\,\partial w.$$

Auf gleiche Weise sey $\int q\partial w = r$; $\int r\partial w = s$; $\int s\partial w = t$, u. s. f.
und es ergiebt sich

$$\int X\partial x = Xx - p\cdot\frac{\partial X}{\partial w} + q\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial w^2} - r\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial w^3}$$

$$+ s\cdot\frac{\partial^4 X}{\partial w^4} - t\cdot\frac{\partial^5 X}{\partial w^5} + \text{etc.}$$

Die Function w ist so zu wählen, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial X}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial w^2}$, etc. leicht zu finden seyn.

148. Exempel. Es sey $X = V(aa - xx)$, so ist $\partial X = -\frac{x\partial x}{X}$. Setzt man $\partial w = +x\partial x$, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{1}{X};\quad \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} = +\frac{1}{X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{1}{X^3};$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial w^3} = +\frac{3}{X^4}\cdot\frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{3}{X^5};\quad \frac{\partial^4 X}{\partial w^4}$$

$$= +\frac{3\cdot 5}{X^6}\cdot\frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{3\cdot 5}{X^7},\ \text{u. s. w.}$$

Ferner ist $p = \int x^2 \partial x = \frac{1}{3} x^3$; $q = \frac{1}{3}\int x^4 \partial x = \frac{1}{3 \cdot 5} x^5$; $r = \frac{1}{3 \cdot 5}\int x^6 \partial x = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7$, u. s. f.

Also ist, wenn die Bezeichnung X beybehalten wird,

$$\int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = Xx + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{X} - \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{X^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^7}{X^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{x^9}{X^7} + \text{etc.}$$

Dieselbe Reihe wird nach der Formel I. in (59.) gefunden. Nach der Bernoullischen Formel ist die Rechnung beschwerlich.

149. Taylor giebt noch eine Formel, worin statt der successiven Differentiale von X die von x gebraucht werden. Nämlich es sey nun $X \partial w = \partial p$; $p \partial w = \partial q$; $q \partial w = \partial r$; $r \partial w = \partial s$; u. s. f.; so ist

$$\int X \partial x = \int \frac{\partial x}{\partial w} . X \partial w = p . \frac{\partial x}{\partial w} - \int p . \frac{\partial^2 x}{\partial w}.$$

Ferner $\int p . \frac{\partial^2 x}{\partial w} = \int \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} . p . \partial w =$

$q . \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} - \int q . \frac{\partial^3 x}{\partial w^2}$. Fährt man mit diesen Reductionen fort, so ist

$$\int X \partial x = \text{Const.} + p . \frac{\partial x}{\partial w} - q . \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + r . \frac{\partial^3 x}{\partial w^2} - s . \frac{\partial^4 x}{\partial w^4} + \text{etc.}$$

150. Exempel. Es sey wiederum $X = \sqrt{(aa - xx)}$. Man setze $\partial w = x\partial x$, oder $\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{x}$, so ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = -\frac{1}{x^3}; \quad \frac{\partial^3 x}{\partial w^3} = +\frac{3}{x^5}, \text{ u. s. f.}$$

Da $\partial X = -\frac{x\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}$ ist, so ist $\partial w = -X\partial X$, also $X\partial w = -X^2\partial X$, und $p = -\frac{1}{3}X^3$. Ferner $p\partial w = +\frac{1}{3}X^4\partial X$, also $q = +\frac{1.1}{3.5}X^5$. Weiter ist $q\partial w = -\frac{1.1}{3.5}X^6\partial X$, dadurch $r = -\frac{1.1.1}{3.5.7}X^7$, u. s. f. Also ist, mit Beybehaltung der Bezeichnung X,

$$\int \partial x \sqrt{(aa-xx)} = \text{Const.} - \frac{1.1}{1.3}\cdot\frac{X^3}{x} + \frac{1.1}{3.5}\cdot\frac{X^5}{x^3} - \frac{1.1}{5.7}\cdot\frac{X^7}{x^5} + \frac{1.1}{7.9}\cdot\frac{X^9}{x^7} - \frac{1.1}{9.11}\cdot\frac{X^{11}}{x^9} + \text{etc.}$$

151. Newtons allgemeine Methode zu integriren, oder wie er es ausdruckt, jede Curve zu quadriren, beruht auf der Interpolation einer gegebenen Reihe von Größen, wozu er in der Methodus differentialis eine Anweisung giebt, (Einschalten S. 51.). Man betrachte in der Differentialformel, $X\partial x$ den Factor X als die Ordinate einer Curve, so ist $\int X\partial x$ die Area derselben für die Abscisse x. Man nehme die Curve für eine paraboliſche, deren Ordinaten y sind, mit denen einige X übereinkommen. Die Ordinate für $x = o$ sey $= A$, die Anfangsglieder der Unterschieds-

reihen seyn a, b, c, d, etc, und die Abstände der Glieder gleich groß, so ist (Arithm. Reihen höherer Ordnungen, 7.)

$$y = A + ax + \tfrac{1}{2}b(x^2 - x) + \tfrac{1}{6}c(x^3 - 3x^2 + 2x) + \tfrac{1}{24}d(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) + \text{etc.}$$

Daraus ist

$$\int y\,\partial x = Ax + \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{12}b(2x^3 - 3x^2) + \tfrac{1}{24}c(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + \tfrac{1}{720}d(6x^5 - 45x^4 + 110x^3 - 90x^2) + \text{etc.}$$

Die Ordinaten der Curve, oder die Glieder der Reihe, für $x = 0; 1; 2; 3; 4;$ etc. seyn A, B, C, D, E, etc. so ist

$$a = B - A; \quad b = C - 2B + A;$$

$$c = D - 3C + 3B - A;$$

$$d = E - 4D + 6C - 4B + A;$$

u. s. f. (a. a. O. 2.)

Nimmt man drey, vier, fünf, u. m. Glieder, und setzt $x = 2; 3; 4;$ etc. dem Abstande der äussersten Glieder, wenn der Abstand zweyer nächsten zur Einheit genommen wird, so ist, nach der zur Seite bemerkten Anzahl von Gliedern, das Integral $\int y\,\partial x =$,

3). $\frac{1}{3}(6A + 6a + b)$.

4). $\frac{1}{8}(24A + 36a + 18b + 3c)$.

5). $\frac{1}{45}(180A + 360a + 300b + 120c + 14d)$.

Setzt man für die Anfangsglieder der Differenzreihen, a, b, c, d, ihre Werthe, so ist das Integral

3). $\frac{1}{3}(A + C + 4B)$.

4). $\frac{3}{8}(A + D + 3(B + C))$.

5). $\frac{1}{45}(14(A + E) + 64(B + D) + 24C)$.

Newton giebt als Beyspiel nur die Formel für vier Ordinaten. Montucla führt in seiner Geschichte der Mathematik Th. III. S. 201. fünf Formeln an, für drey bis

sieben Ordinaten, ohne anzugeben, wer sie berechnet hat. Ich setze die beiden letzten zu den hier berechneten, mit den von mir gebrauchten Bezeichnungen,

6). $\frac{1}{288}(19(A+F)+75(B+E)+50(C+D))$

7). $\frac{6}{840}(41(A+G)+216(B+F)$
$+27(C+E)+272D)$

152. Exempel. Es werden an einer gleichseitigen Hyperbel die Abscissen auf der einen Asymptote genommen, und die Ordinaten der andern parallel gezogen, wie in Fig. 58. Tab. IV. Th. I. Die erste der Ordinaten gehe durch den Scheitelpunct A, so ist (wegen ACB = 45°) die Ordinate AB = der Abscisse CB. Eine andere Abscisse CD sey = 2 CB, so ist die Ordinate DE = $\frac{1}{2}$ AB. Man setze CB = 1, also BD = 1; AB = 1; DE = $\frac{1}{2}$. Zwischen AB und ED schalte man fünf Ordinaten ein in gleichen Abständen, so sind diese $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{11}$, da sich die Ordinaten umgekehrt wie ihre Abscissen verhalten; die beiden äussersten sind 1 und $\frac{1}{2}$. Berechnet man die hyperbolische Area ABDM nach der letzten Formel, so ist ihr Werth = 0,693147... welcher bis auf die letzte Ziffer richtig ist. Die Integralrechnung giebt

$$\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x} = l\,\frac{x}{\text{const.}} = lx,$$

wenn die Area bey AB, für x = 1, anfängt. Für x = 2 ist sie = log 2. Der natürliche Logarithme von 2 ist = 0,69314718...

Integralgleichung ist die endliche Gleichung zwischen zwey oder mehreren veränderlichen Größen, die durch die Integrirung einer Differentialgleichung entstanden ist. Wenn die Differentialgleichung vom zweyten oder einem höhern Grade ist, so mag man auch die niedrigern Differentialgleichungen, die aus der höhern hergeleitet sind, relativ Integralgleichungen nennen. Absolut genommen ist Integralgleichung die endliche Gleichung, welche durch die successiven Integrationen hervorgeht.

Daß zur Integration der Differentialgleichungen keine allgemeine Methoden für jede Gattung derselben vorhanden sind, ist in dem Artikel, Integralrechnung, schon bemerkt. In dem gegenwärtigen Artikel insbesondere werden zu den höhern Gleichungen nur einzelne Beyspiele von den nöthigsten Fällen angegeben werden können.

1. Sonderung der veränderlichen Größen in den Differentialgleichungen des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen.

1. Wenn eine Differentialgleichung die Form $Y\partial y = X\partial x$ hat oder erhält, worin X eine Function von x allein, und eben so Y von y allein ist, so sind die veränderlichen Größen gesondert.

Alsdann wird nach den in dem Artikel, Integralformel, gelehrten Methoden, jede der beiden Differentialformeln integrirt, und man erhält bey Zufügung der Constante, eine endliche Gleichung zwischen x und y. Denn zwey Functionen, deren Differentiale sich gleich sind, sind sich gleich, oder um eine Constante verschieden.

2. Es sey $P\partial x = Q\partial y$, und P so wie Q, sey eine Function von x und y zugleich, so aber, daß jede ein Product von zwey Functionen, einer von x, und einer von y allein sey, so ist die Sonderung sogleich bewerkstelligt, wenn man durch die Division die Function von y aus P, und die von x aus Q wegschafft.

3. Es seyn in der Gleichung, $P\partial x = Q\partial y$, die Functionen P und Q gleichartige, nämlich solche, worin beide veränderliche Größen auf denselben Grad steigen. Man setze $y = ux$, so wird dadurch $\frac{P}{Q} = U$, einer Function von u, und dadurch $\partial y = U\partial x$. Nun ist auch $\partial y = u\partial x + x\partial u$, also ist $u\partial x + x\partial u = U\partial x$, und daher

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{U-u}, \text{ also}$$

$$\log x = \int \frac{\partial u}{U-u}.$$

Nachdem das Integral, $\int \frac{\partial u}{U-u}$, gefunden iſt, ſetzt man darin für u ſeinen Werth, $\frac{y}{x}$, wodurch die Integralgleichung zwiſchen x und y erhalten wird. Iſt die Function U der veränderlichen u ſo beſchaffen, daß das Integral, $\int \frac{\partial u}{U-u}$, der Logarithmus einer algebraiſchen Function von u iſt, ſo iſt x dieſer Function gleich, und die Gleichung zwiſchen x und u iſt algebraiſch, daher auch die zwiſchen x und y.

4. Exempel. Es ſey

$$(\alpha x + \beta y)\partial x = (\gamma x + \delta y)\partial y.$$

Die Subſtitution $y = ux$ giebt hier

$$U = \frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}; \quad U - u = \frac{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}{\gamma + \delta u},$$

und $\frac{\partial x}{x} = \frac{(\gamma + \delta u)\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}$, oder

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(\delta u + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\beta)\partial u + (\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta)\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}.$$

Daher

$$\log x = C - \log \sqrt{(\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu)} + \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\int \frac{\partial u}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta uu}.$$

Das Integral in dem zweyten Gliede des zweyten Theils wird aus Integralformel (25-28.) gefunden. Es ſind hier

drey Fälle zu unterscheiden, wenn der Nenner zwey ungleiche reale, zwey gleiche oder zwey unmögliche Factoren hat. In dem ersten ist das Integral logarithmisch, daher die Gleichung zwischen x und u, so wie die zwischen x und y, algebraisch. In dem zweyten ist das Integral des zweyten Gliedes algebraisch; in dem dritten hängt es von Winkeln ab; in beiden Fällen ist die Gleichung zwischen x und y transscendent.

Wenn $\gamma = \beta$ ist, so ist die Gleichung zwischen x und u, also zwischen x und y, algebraisch.

5. Die Differentialgleichung sey

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)\partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y)\partial y.$$

Man setze $\alpha + \beta x + \gamma y = t$,

$$\delta + \varepsilon x + \zeta y = u,$$

so ist

$$(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)x = \zeta t - \gamma u - \alpha\zeta + \gamma\delta,$$

$$(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)y = \beta u - \varepsilon t + \alpha\varepsilon - \beta\delta.$$

Daher $\partial x : \partial y = \zeta\partial t - \gamma\partial u : \beta\partial u - \varepsilon\partial t$. Zugleich ist $\partial x : \partial y = u : t$. Hieraus ergiebt sich die homogene Gleichung,

$$(\zeta t + \varepsilon u)\partial t = (\beta u + \gamma t)\partial u,$$

deren Integration in (4) gewiesen ist.

6. Wenn $\beta\zeta = \gamma\varepsilon$ ist, so würde die in (5.) gebrauchte Substitution unendlich große Werthe für x und y geben. Man setze $\zeta = n\gamma$, (d. i. $n\beta = \varepsilon$) so wird die vorgegebene Gleichung diese,

$$\alpha\partial x + (\beta x + \gamma y)\partial x = \delta\partial y + n(\beta x + \gamma y)\partial y.$$

In dieser setze man $\beta x + \gamma y = z$, so ist

$$(\alpha + z)\partial x = (\delta + nz)\partial y.$$

Aus der angenommenen Gleichung ist $\gamma\partial y = \partial z - \beta\partial x$, also verwandelt sich jene Gleichung in diese,

$$(\alpha\gamma + \beta\delta + \gamma z + n\beta z)\partial x = (\delta + nz)\partial z,$$

oder

$$(\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+\varepsilon)z)\partial x=(\delta+nz)\partial z.$$

Dadurch ist

$$\partial x=\frac{(\delta+nz)\partial z}{\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+\varepsilon)z}.$$

Da der Zähler hier von demselben Grade mit dem Nenner ist, so sondere man durch die Division den unveränderlichen Theil ab. Zur Abkürzung setze man

$$\partial x=\frac{(\delta+nz)\partial z}{fz+g},\text{ so ist}$$

$$\partial x=\frac{n\partial z}{f}+\frac{(\delta f-ng)\partial z}{f(fz+g)},$$

und x ist zum Theil eine logarithmische Größe.

7. Ist $\varepsilon=-\gamma$, so daß

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\partial x=(\delta-\gamma x+\zeta y)\partial y$$

ist, so ist die Integralgleichung,

$$\tfrac{1}{2}\beta x^2-\tfrac{1}{2}\zeta y^2+\gamma xy+\alpha x-\delta y+\text{Const.}=0,$$

eine Gleichung für einen Kegelschnitt, die in besondern Fällen auch für ein System zweyer geraden Linien seyn, das ist, das Product zweyer Factoren, $a+bx+cy$ und $A+Bx+Cy$, seyn kann.

Der Fall, da hier $\varepsilon=-\gamma$ ist, ist derselbe, da in (4.) $\gamma=-\beta$ ist, wodurch die Integralgleichung algebraisch ist.

8. Es seyn ε und $\zeta=0$, und die Gleichung

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\partial x=\partial y.$$

Man setze $\beta x+\gamma y=z$, so wird erhalten,

$$(\alpha\gamma+\beta+\gamma z)\partial x=\partial z,$$

und daraus

$$\gamma x=\log\frac{\alpha\gamma+\beta+\gamma z}{C}.$$

Für z seinen Werth gesetzt, ist

$$\gamma x = \log \frac{\alpha\gamma + \beta + \beta\gamma x + \gamma\gamma y}{C},$$

oder

$$\beta + \gamma(\alpha + \beta x + \gamma y) = C e^{\gamma x},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

9. Joh. Bernoulli, der zuerst die Integration der homogenen Gleichungen durch die Substitution, $y = ux$, gelehrt hat, gab in den Petersburger Commentarien T. I. (Opp. T. III. p. 108.) noch eine andere Methode an, solche Gleichungen ohne Sonderung der veränderlichen Größen zu integriren. Zu der Differentialgleichung vom ersten Grade,

$$(ax + by)\partial x + (cx + ey)\partial y = o,$$

gehöre die Integralgleichung,

$$(x + \alpha y)^{\tau} \times (x + \beta y)^{\tau} = C,$$

so sind die vier Größen, α, β, π, τ, zu bestimmen. Man nehme das Differential derselben, mittelst der Logarithmen,

$$\frac{\pi\partial x + \alpha\pi\partial y}{x + \alpha y} + \frac{\tau\partial x + \beta\tau\partial y}{x + \beta y} = o.$$

Schafft man die Nenner weg durch die Multiplication mit denselben, und vergleicht die Coefficienten von $x\partial x$, $y\partial x$, $x\partial y$, $y\partial y$ mit denen in der vorgegebenen Gleichung, so bestimmen sich die gesuchten Werthe. Bernoulli findet, wenn zur Abkürzung gesetzt wird,

$$\sqrt{(bb + 2bc + cc - 4ac)} = m,$$

daß die gesuchte Integralgleichung ist,

$$(2ax + (b + c - m)y)^{b-c+m} \times (2ax + (b + c + m)y)^{c-b+m} = \text{Const.}$$

Den Fall, da $m = o$ ist, erklärt Bernoulli nicht richtig oder zu unvollständig. Er sagt, die endliche Gleichung, welche der Differentialgleichung Genüge leiste, sey

$2ax+(b+c)y=$ Conſt. Vielmehr ſind in dieſem Falle zwey ſolche, eigentlich das Product beider, welche die Gleichung auflöſen.

Bernoulli bemerkt, daß jede homogene Gleichung durch eine einfache, die für eine gerade Linie, aufgelöſet werde. Man ſetze $y=nx$, alſo $\partial y=n\partial x$, wo n eine beſtimmte Größe iſt, die inzwiſchen mehrerer Werthe fähig iſt. Durch dieſe Subſtitutionen gehen die veränderlichen Größen aus der Gleichung heraus, und es bleibt eine zwiſchen den gegebenen Coefficienten und der unbekannten n.

10. In der Gleichung, $\partial y+Py\partial x=Q\partial x$, ſind P und Q Functionen von x allein; es ſollen die veränderlichen Größen geſondert werden.

Man ſetze $y=Xu$, wo X eine noch zu beſtimmende Function von x iſt. Dadurch iſt

$$X\partial u+u\partial X=Q\partial x.$$
$$+PXu\partial x$$

Iſt die Function X eine ſolche Function, daß $\partial X+PX\partial x=0$ iſt, ſo bleibt $X\partial u=Q\partial x$; alſo iſt $\partial u=\frac{Q\partial x}{X}$, wo der zweyte Theil der Gleichung eine Differentialformel iſt, deren Integral ſich, wo nicht vollſtändig, doch durch Annäherung angeben läßt.

Da $\frac{\partial X}{X}=-P\partial x$ iſt, ſo iſt $\log X=-\int P\partial x$, und $X=e^{-\int P\partial x}$. Dadurch iſt $\partial u=e^{\int P\partial x}.Q\partial x$, und $u=\int e^{\int P\partial x}.Q\partial x$, folglich $y=e^{-\int P\partial x}\int e^{\int P\partial x}.Q\partial x$. Eine Conſtante braucht in dem Integral, $\int P\partial x$, nicht beygefügt zu werden, nur in dem $\int e^{\int P\partial x}Q\partial x$.

Dieſe Gleichung gehört zu der Gattung derjenigen, die man lineariſche genannt hat, ſolcher, worin die eine der veränderlichen Größen, y, und ihre Diffe-

rentiale nur in der ersten Potenz vorkommen. Der Ausdruck ist aber nicht schicklich gewählt. s. Linearisch.

11. Exempel. $\partial y + \frac{ny\partial x}{\sqrt{(1+xx)}} = a\partial x.$

Hier ist $P = \frac{n}{\sqrt{(1+xx)}}$; $Q = a$;

$\int P\partial x = n\log(\sqrt{(1+xx)}+x)$;

$e^{\int P\partial x} = (\sqrt{(1+xx)}+x)^n$;

$e^{-\int P\partial x} = (\sqrt{(1+xx)}-x)^n$, weil

überhaupt $\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{aa-bb}$ ist. Folglich ist

$y = (\sqrt{(1+xx)}-x)^n \int a\partial x(\sqrt{(1+xx)}+x)^n$.

Den summatorischen Factor zu entwickeln setze man $\sqrt{(1+xx)}+x = u$, so ist

$x = \frac{uu-1}{2u}$; $\partial x = \frac{(1+uu)\partial u}{2uu}$; also

$\int u^n \partial x = \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + C.$

Da $(\sqrt{(1+xx)}-x)^n = u^{-n}$, so ist

$y = Cu^{-n} + \frac{au^{-1}}{2(n-1)} + \frac{au}{2(n+1)}$.

Für u sein Werth gesetzt, wird

$y = C(\sqrt{(1+xx)}-x)^n + \frac{na}{nn-1}\sqrt{(1+xx)} - \frac{ax}{nn-1}$.

12. Die Differentialgleichung sey

$\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x$,

wo P und Q Functionen von x allein sind.

Man setze $\frac{1}{y^n} = z$, so ist $\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial z}{nz}$, und die Gleichung verwandelt sich in diese:

$$-\frac{\partial z}{nz} + P\partial x = \frac{Q\partial x}{z}, \text{ oder}$$

$$\partial z - nPz\partial x = -nQ\partial x.$$

Diese hat dieselbe Form, wie die in (9.) behandelte.

Mit dieser Gleichung haben sich beide Bernoulli und Leibnitz beschäftigt. S. Acta erudit. 1695. 1696. 1697.

13. Die Differentialgleichung sey

$$\alpha y\partial x + \beta x\partial y + x^m y^n(\gamma y\partial x + \delta x\partial y) = 0.$$

Man dividire die ganze Gleichung durch xy, so erhält sie die Gestalt:

$$\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} + x^m y^n\left(\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y}\right) = 0.$$

Da $\frac{\alpha\partial x}{x} = \alpha\partial\log. x = \partial\log. x^\alpha$ ist, und so auch die übrigen hier vorkommenden Differentiale, so setze man $x^\alpha y^\beta = t$, und $x^\gamma y^\delta = u$. Es ist $\alpha lx + \beta ly = lt$, also $\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} = \frac{\partial t}{t}$. Eben so $\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y} = \frac{\partial u}{u}$. Dadurch ist

$$\frac{\partial t}{t} + x^m y^n \cdot \frac{\partial u}{u} = 0.$$

Nun hat man noch für x und y ihre Werthe durch t und u zu setzen. Wenn man zur Abkürzung setzt $\alpha\delta - \beta\gamma = \lambda$, $\delta m - \gamma n = \mu$; $\alpha n - \beta m = \nu$, so ist

$$\frac{\partial t}{t} + t^{\frac{\mu}{\lambda}} \cdot u^{\frac{\nu}{\lambda}} \cdot \frac{\partial u}{u} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial t}{t^{\mu:\lambda+1}} + u^{\nu:\lambda-1}\partial u = 0.$$

Hierzu ist die Integralgleichung:

$$-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{t^{\mu:\lambda}} + \frac{1}{\nu}u^{\nu:\lambda} = C.$$

14. Die Differentialgleichung sey

$$(y-x)\partial y = \frac{n(1+yy)^{\frac{3}{2}}\partial x}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Durch die Substitution $y = \frac{x-u}{1+xu}$ wird die zweyfach irrationale Größe $\sqrt{\frac{1+yy}{1+xx}}$ in die einfach irrationale, $\frac{\sqrt{(1+uu)}}{1+xu}$, verwandelt. Man gebrauche also diese Substitution, um y und ∂y wegzuschaffen, so erhält man die gesonderte Gleichung:

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \frac{u\partial u}{(1+uu)(n\sqrt{(1+uu)}+u)}.$$

Die Gleichung einfacher zu machen, setze man

$$\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+zz}{2z}, \text{ so ist}$$

$$u = \frac{1-zz}{2z}; \quad \partial u = -\frac{(1+zz)\partial z}{2z^2}.$$

Durch diese Substitutionen wird

$$\frac{\partial x}{1+xx} = -\frac{2(1-zz)\partial z}{(1+zz)(n+1+(n-1)zz)},$$

oder

$$\frac{\partial x}{1+xx} = \frac{2n\partial z}{n+1+(n-1)zz} - \frac{2\partial z}{1+zz}.$$

Die Integration der Formeln, woraus diese Gleichung besteht, ergiebt sich aus Integralformel (15. 12.)

15. Die Differentialgleichung sey:

$$\partial y + b y y \partial x = a x^m \partial x.$$

Dieses ist die von Riccati herrührende, womit die Analysten sich viel beschäftiget haben, s. oben S. 770.

I. Man suche, für welchen Werth von m die Gleichung homogen gemacht werden kann. Zu dem Ende setze man $y = z^n$, so verwandelt sich die Gleichung in diese:

$$n z^{y-1} \partial z + b z^{2n} \partial x = a x^m \partial x.$$

Damit die Exponenten von z und x gleich groß seyn, muß $n = -1$ und $m = -2$ gesetzt werden. Die verwandelte Gleichung ist nun

$$(a z^2 - b x^2) \partial x = x^2 \partial z.$$

Setzt man $z = u x$, so wird nach (3.) erhalten:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{a u u - u - b},$$

wo beide Theile integrirbar sind.

II. Behält man einen unbestimmten Werth für m, setzt aber $n = -1$, oder $y = \frac{1}{z}$, so ist

$$-\frac{\partial z}{zz} + \frac{b \partial x}{zz} = a x^m \partial x, \text{ oder}$$

$$-\partial z + b \partial x = a z^2 x^m \partial x.$$

Man setze $x^m \partial x = f \partial t$, um die Gleichung der vorgegebenen ähnlich zu machen, und dadurch die Integration der einen auf die der andern zu gründen. So ist $\frac{1}{m+1} x^{m+1} = \int f$.

Nimmt man $f = \frac{1}{m+1}$, so ist $x^{m+1} = t$; also

$$\partial x = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{\partial t}{x^m} = \frac{1}{m+1} \cdot t^{-m:(m+1)} \partial t,$$

und die verwandelte Gleichung ist

$$\partial z + \frac{a}{m+1} \cdot z^s \partial t = \frac{b}{m+1} t^{-m:(m+1)} \partial t.$$

Diese Gleichung ist der vorgegebenen ähnlich. Kann in einer von beiden die Sonderung der veränderlichen Größen bewerkstelligt werden, so wird die andere mittelst jener aufgelöset. Hat m in jener (der zwischen x und y) den bestimmten Werth m', in dieser den Werth m'', so ist

$$m'' = \frac{-m'}{m'+1}.$$

III. Man setze allgemeiner $y = Ax^p + x^q z$, und bestimme p, q, A so, daß die verwandelte Gleichung drey Glieder wie die vorgegebene enthalte. Man wird finden, daß zu dem Ende gesetzt werden muß

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{xx}.$$ Dadurch ist

$$\partial y = -\frac{\partial x}{bxx} + \frac{\partial z}{xx} - \frac{2z\partial x}{x^3}, \text{ und}$$

$$yy = \frac{1}{b^2x^2} + \frac{2z}{bx^3} + \frac{z^2}{x^4}.$$ Die vorgegebene Gleichung ist daher diese:

$$\partial z + \frac{bzz\partial x}{xx} = ax^{m+s}\partial x.$$

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, daher $\partial x = -\frac{\partial t}{tt}$, so ist

$$\partial z - bz^s \partial t = -at^{-m-4}\partial t,$$

oder, wenn z mit $-z$ vertauscht wird,

$$\partial z + bz^s \partial t = at^{-m-4}\partial t,$$

eine Gleichung, welche der vorgegebenen ganz ähnlich ist. Ist die eine von beiden integrirbar, so ist es die andere mittelst der hier angewandten Substitutionen auch. Nun ist, für $m = o$, die Gleichung,

$\partial y + byy\partial x = a\partial x$, integrirbar, da aus derselben ist $\frac{\partial y}{a - byy} = \partial x$. Also ist auch die Gleichung, $\partial z + bz^2\partial t = at^{-4}\partial t$, integrirbar durch die Substitutionen, $t = \frac{1}{x}$, und $z = \frac{1}{bt} - \frac{y}{tt}$, welche dieselbe Form haben, wie diejenigen, durch welche die verwandelte Gleichung aus der erstern entstanden ist. Dadurch wird sie in die erstere verwandelt.

IV. Die Werthe von m, für welche die vorgegebene Gleichung integrirbar ist, sind also 1) $m^{I} = 0$. 2) $m^{II} = -4$. 3) $m^{III} = \frac{+4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$. 4) $m^{IV} = +\frac{3}{4} - 4 = -\frac{8}{4}$. 5) $m^{V} = \frac{+8:3}{-8:3+1} = -\frac{8}{5}$. 6) $m^{VI} = +\frac{8}{5} - 4 = -\frac{12}{5}$. 7) $m^{VII} = \frac{+12:5}{-12:5+1} = -\frac{12}{7}$. u. s. f.

Alle diese Exponenten sind unter den beiden Formen $-\frac{4i}{2i-1}$ und $-\frac{4i}{2i+1}$ begriffen. Durch wiederholte Substitutionen, wie die in II und III. angegebenen sind, welche wechselsweise angewandt werden, kommt man zuletzt auf die Differentialgleichung von der Form $\partial y + by^n\partial x = a\partial x$. Z. B. für $m = -\frac{4}{3}$ sind vier solche Operationen erforderlich.

16. Die Methode der Substitutionen, um in einer Differentialgleichung die veränderlichen Grösen zu sondern, ist von eingeschränkten Nutzen, weil sie nur selten angewandt werden kann, besonders bey Gleichungen mit mehr als drey Gliedern, man müßte denn zufälliger Weise eine schickliche Substitution errathen. Bey höhern Differentialgleichungen ist sie nicht brauchbar. Hingegen ist die

Methode, durch Hinzufügung eines Factors, der eine gewisse Function der veränderlichen Größen ist, eine Differentialgleichung integrirbar zu machen, der geradeste und natürlichste Weg zur Integration, und auch bey höheren Gleichungen anwendbar.

Es ist freylich auch noch keine allgemeine Methode zur Entdeckung des integrirenden Factors gefunden.

II. Integration der Differentialgleichung durch Multiplication mit einer Function der veränderlichen Größen.

17. In dem Artikel, Differentialgleichung (12—14.), ist bewiesen, daß aus der Gleichung, $\partial V = P\partial x + Q\partial y$, welche aus einer Function V von x und y unmittelbar hergeleitet ist, folget $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Diese letztere Gleichung ist das Kennzeichen derjenigen Differentialgleichungen, welche sich unmittelbar, ohne Umwandlungen, integriren lassen. Um es dazu anzuwenden, müssen P und Q endliche Functionen von x und y seyn.

18. Eine Differentialgleichung kann aber auf verschiedene Art in der Form verändert werden, wodurch die Gleichheit der partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, aufgehoben wird. Es sey $M + aN = b$, eine ursprüngliche Gleichung zwischen x und y, so daß M und N irgend welche Functionen von x und y seyn. Die Differentialgleichung ist $\partial M + a\partial N = o$. Man schaffe die Constante a durch Verbindung mit der endlichen Gleichung heraus, so wird erhalten: $\partial M + \frac{b - M}{N}\partial N = o$, oder auch $N\partial M + (b - M)\partial N = o$. Bey dieser Gleichung kann der Charakter der unmittelbar integrirbaren Gleichungen nicht mehr Statt haben, weil darin der

Differential-Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ von der Constante b abhängig gemacht wird, von welcher er nicht abhängen darf, da b bey der Differentiation herausgeht. Die Form der Verhältnißglieder wird dadurch geändert, so aber, daß das Verhältniß $\partial x : \partial y$ für dieselben x und y dasselbe bleibt, wie in der unmittelbaren Differentialgleichung. Wird $b = o$ genommen, so ist durch Wegschaffung von a, die Differentialgleichung, $N\partial M - M\partial N = o$, worin ebenfalls die Form des Verhältnisses verändert wird.

Zu der unmittelbaren Differentialgleichung kann auch das Product der endlichen ursprünglichen Gleichung in eine willkührliche Differentialformel, $p\partial x + q\partial y$, additiv oder subtractiv gesetzt werden, wo p und q Functionen von x und y sind. Man sehe von den Umwandlungen der Differentialgleichungen Eulers Differentialrechnung, Th. I. Kap. IX.

19. Die Differentialgleichung, welche unmittelbar aus einer endlichen Gleichung $U = Const.$ entsteht, sey $M\partial x + N\partial y = o$. Sie werden multiplicirt mit einer Function L von x und y, so ist $LM\partial x + LN\partial y = o$. Man setze $LM = P$; $LN = Q$, so daß $P\partial x + Q\partial y = o$ ist. Nun sind die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = M\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Hieraus folgt, weil $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ist,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = M\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) - N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right).$$

Sollte $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ seyn, so wäre

$M : N = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)$. Dieſes letztere kann nicht Statt finden, wenn nicht L die Function ſelbſt iſt, woraus die Differentialgleichung, $M\partial x + N\partial y = 0$, entſteht.

Da L eine jede Function von x und y, oder einer von ihnen ſeyn kann, ſo giebt es für jede endliche Gleichung unzählig viele Differentialgleichungen, die alle in der Form verſchieden ſind, aber in dem Differential-Quotienten übereinkommen.

20. Eine gegebene Differentialgleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, erfülle die Bedingung der Integrabilität nicht, weil ein Factor (oder Diviſor), der eine Function von x und y, oder einer von ihnen iſt, weggefallen iſt. Dieſer Factor (einen Diviſor unter dieſer Benennung mit begriffen), ſey $= R$, ſo daß die Gleichung, $LP\partial x + LQ\partial y = 0$, der Bedingung der Integrabilität gemäß ſey. (Daß L hier das umgekehrte von L in 19. iſt, wird keine Irrung machen). Dadurch iſt $\left(\frac{\partial . LP}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . LQ}{\partial x}\right)$, das iſt,

$$P\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

alſo

$$L\left(\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right) = Q\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) - P\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right).$$

Dieſe Gleichung für L wird gewöhnlich nicht leichter aufzulöſen ſeyn, als die vorgegebene ſelbſt, weil die Function L nicht allein von zwey veränderlichen Größen, ſondern auch von zwey partiellen Differentialquotienten abhängt.

Wenn in (19.) für M geſetzt wird $\frac{P}{L}$, und für N deſſen Werth $\frac{Q}{L}$, ſo wird eben eine ſolche Gleichung, wie

die hier gefundene erhalten, nur daß der zweyte Theil entgegengesetzt ist.

21. Man pflegt vorauszusetzen, daß zu jeder Differentialgleichung zwischen zwey veränderlichen Größen eine endliche Gleichung gehöre, woraus sie unmittelbar oder mittelbar hergeleitet sey. Euler sagt zwar am Ende des dritten Bandes der Integralrechnung, in dem Supplement, §. 2. er habe sonst schon gezeigt, daß für jede Differentialgleichung, es sey vom ersten oder von einem höheren Grade, ein Factor möglich sey, durch welchen sie integrirbar werde, allein ich habe nicht finden können, wo er dieses ausgeführt hat. D'Alembert sagt in den Opuscules T. IV. p. 255. (1768) ihm sey nicht bekannt, daß jemand bewiesen habe, daß für jede Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y es eine Function derselben gebe, durch welche die Gleichung multiplicirt ein vollständiges Differential werde. Er giebt hierauf einen Beweis, mit Zuziehung geometrischer Vorstellungen, der aber zu dunkel ist. Durch die Gleichung $P\partial x + Q\partial y = o$, ist das Differentialverhältniß $\partial x : \partial y$ für jedes x durch das zugehörige, hier freylich noch unbekannte y, bestimmt. Setzt man für $x = a$, die zugehörige $y = b$, welches wegen der noch willkührlichen Constante geschehen darf, so ist dadurch in einer stetigen Reihe das unmittelbar folgende y bestimmt. Daraus ergiebt sich wegen des bestimmten Differentialverhältnisses das auf jenes unmittelbar folgende y, und so immer fortgehend. Eine Curve in derselben Ebene wird durch die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abscissen oder für irgend eine gegebene Abscisse, und durch die Richtungen in jedem folgenden Puncte (das Verhältniß $\partial x : \partial y$) bestimmt. Auch folgen die Halbmesser der Krümmung successiv aus dem in dem Anfangspuncte angenommenen.

22. Ist ein integrirender Factor für eine Differentialgleichung gefunden, so kann man unzählig viele andere finden. Die Gleichung sey $P\partial x + Q\partial y = o$, der in-

tegrirende Factor $= L$, ſo daß $LP\partial x + LQ\partial y = \partial Z$, und die Function Z ſich durch Integration finden laſſe. Es ſey φZ irgend eine Function von Z, ſo iſt $(LP\partial x + LQ\partial y)\,\varphi Z = \varphi Z.\,\partial Z$. Der zweyte Theil iſt als eine Differentialformel mit einer einzigen veränderlichen Größe auf eine oder andere Art integrirbar. Folglich iſt die Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = o$, durch den Factor φZ integrirbar, wenn ſie es durch den Factor Z wird.

23. Durch $\int P\partial x$ wird immer ein Integral bezeichnet, das bloß in Abſicht auf diejenige veränderliche Größe, deren Differentialzeichen beygefügt iſt, genommen wird, wenn gleich P eine Function von zwey oder mehrern veränderlichen Größen iſt. Man nenne es kurz ein relatives Integral. Z. B. $\int x^m y^n \partial x = \frac{1}{m+1} x^{m+1} y^n$.

24. Eine Differentialgleichung, $P\partial x + Q\partial y = o$, ſey entweder für ſich integrirbar, oder durch einen integrirenden Factor es geworden: es ſoll die Integralgleichung zu derſelben gefunden werden.

Es ſey Z die endliche Function, deren Differential $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$. Die Gleichung werde bloß in Abſicht auf x integrirt, ſo iſt $Z = \int P\partial x + Y$, wo Y eine Function von y allein, mit einer willkührlichen Conſtante iſt, da y bey dieſer Integration als eine unveränderliche Größe behandelt wird. Es enthält alſo Y alle Glieder der Gleichung, welche von der veränderlichen x frey ſind. Nun differentiire man Z in Abſicht auf x und y zugleich, ſo iſt

$$\partial Z = P\partial x + V\partial y + \partial Y,$$

wo $V\partial y$ der Theil des Differentials von $\int P\partial x$ iſt, der durch die Veränderlichkeit von y entſteht, ſo wie $P\partial x$ durch die Veränderlichkeit von x erhalten wird. Vergleicht man dieſe Gleichung mit der gegebenen, ſo iſt

$V\partial y + \partial Y = Q\partial y$, also $\partial Y = (Q - V)\partial y$, und $Y = \int (Q - V)\partial y$.

Folglich ist

$$Z = \int P\partial x + \int (Q - V)\partial y,$$

wo $Q - V$ eine Function von y allein ist, weil Y eine solche ist.

24. Integrirt man zuerst in Absicht auf y allein, und bezeichnet das partielle Differential von $\int Q\partial y$ in Absicht auf x durch $U\partial x$, so ist

$$Z = \int Q\partial y + \int (P - U)\partial x,$$

wo $P - U$ eine Function von x allein ist.

25. Es ist der partielle Differentialquotient

$$\left(\frac{\partial . \int P\partial x}{\partial y}\right) = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Denn es sey Z eine solche Function von x und y, daß $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Nun ist $Z = \int P\partial x + Y$, und

$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . \int P\partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y}$, oder $Q = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$,

wo V zur Abkürzung für das erste Glied des zweyten Theils gesetzt ist. Hieraus ist $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, also

$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, und integrirt $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Nämlich so wie in dem Differential ∂V bloß x als veränlich betrachtet wird, so auch in der Größe unter dem Integralzeichen.

Oder: es ist $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = P$, und $\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

tegrirende Factor $= L$, so daß $LP\partial x + LQ\partial y = \partial Z$, und die Function Z sich durch Integration finden lasse. Es sey φZ irgend eine Function von Z, so ist $(LP\partial x + LQ\partial y)\,\varphi Z = \varphi Z.\,\partial Z$. Der zweyte Theil ist als eine Differentialformel mit einer einzigen veränderlichen Größe auf eine oder andere Art integrirbar. Folglich ist die Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = o$, durch den Factor φZ integrirbar, wenn sie es durch den Factor Z wird.

23. Durch $\int P\partial x$ wird immer ein Integral bezeichnet, das bloß in Absicht auf diejenige veränderliche Größe, deren Differentialzeichen beygefügt ist, genommen wird, wenn gleich P eine Function von zwey oder mehrern veränderlichen Größen ist. Man nenne es kurz ein relatives Integral. Z. B. $\int x^m y^n \partial x = \frac{1}{m+1} x^{m+1} y^n$.

24. Eine Differentialgleichung, $P\partial x + Q\partial y = o$, sey entweder für sich integrirbar, oder durch einen integrirenden Factor es geworden: es soll die Integralgleichung zu derselben gefunden werden.

Es sey Z die endliche Function, deren Differential $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$. Die Gleichung werde bloß in Absicht auf x integrirt, so ist $Z = \int P\partial x + Y$, wo Y eine Function von y allein, mit einer willkührlichen Constante ist, da y bey dieser Integration als eine unveränderliche Größe behandelt wird. Es enthält also Y alle Glieder der Gleichung, welche von der veränderlichen x frey sind. Nun differentüre man Z in Absicht auf x und y zugleich, so ist

$$\partial Z = P\partial x + V\partial y + \partial Y,$$

wo $V\partial y$ der Theil des Differentials von $\int P\partial x$ ist, der durch die Veränderlichkeit von y entsteht, so wie $P\partial x$ durch die Veränderlichkeit von x erhalten wird. Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen, so ist

$V\partial y + \partial Y = Q\partial y$, also $\partial Y = (Q - V)\,\partial y$, und $Y = \int (Q - V)\,\partial y$.

Folglich ist

$$Z = \int P\partial x + \int (Q - V)\,\partial y,$$

wo $Q - V$ eine Function von y allein ist, weil Y eine solche ist.

24. Integrirt man zuerst in Absicht auf y allein, und bezeichnet das partielle Differential von $\int Q\partial y$ in Absicht auf x durch $U\partial x$, so ist

$$Z = \int Q\partial y + \int (P - U)\,\partial x,$$

wo $P - U$ eine Function von x allein ist.

25. Es ist der partielle Differentialquotient

$$\left(\frac{\partial . \int P\partial x}{\partial y}\right) = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Denn es sey Z eine solche Function von x und y, daß $\partial Z = P\partial x + Q\partial y$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Nun ist $Z = \int P\partial x + Y$, und

$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . \int P\partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y}$, oder $Q = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$,

wo V zur Abkürzung für das erste Glied des zweyten Theils gesetzt ist. Hieraus ist $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, also

$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, und integrirt $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Nämlich so wie in dem Differential ∂V bloß x als veränlich betrachtet wird, so auch in der Größe unter dem Integralzeichen.

Oder: es ist $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = P$, und $\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Aus der Gleichung $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = V + \frac{\partial Y}{\partial y}$ folgt auch

$\left(\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$; daher ist $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$,

und $V = \int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wie vorher.

Die Constante zu dem durch V bezeichneten Integral kann eine Function von y seyn, eben so wie die Constante zu $\int P \partial x$.

26. Exempel. Es sey $Z = x^m y^n + x^\mu + y^\nu + a$, welche Function alle Arten von Gliedern enthält, die in einer rationalen ganzen algebraischen vorkommen können. Hieraus ist $P = m x^{m-1} y^n + \mu x^{\mu-1}$;
$Q = n x^m y^{n-1} + \nu y^{\nu-1}$; ferner $V = n x^m y^{n-1}$, also $Q - V = \nu y^{\nu-1}$, und nun rückwärts $Z = \int P \partial x + \int (Q - V) \partial y = x^m y^n + x^\mu + y^\nu$, wie es angenommen worden.

Auch ist hier $\left(\frac{\partial . \int P \partial x}{dy}\right) = n x^m y^{n-1}$, und

$\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int m n x^{m-1} y^{n-1} \partial x = n x^m y^{n-1}$.

27. Exempel. Es sey $Z = \log\left(x + \sqrt{(xx+yy)}\right)$, so ist (Differentialformel, 14.)

$$\partial Z = \frac{1 + x : \sqrt{(xx+yy)}}{x + \sqrt{(xx+yy)}} \partial x + \frac{y : \sqrt{(xx+yy)}}{x + \sqrt{(xx+yy)}} dy.$$

Multiplicirt man in dem ersten Bruche Zähler und Nenner durch $\sqrt{(xx+yy)}$, in dem zweyten durch dasselbe und durch $\sqrt{(xx+yy)} - x$, so wird

$$\partial Z = \frac{\partial x}{V(xx+yy)} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{yV(xx+yy)}\right)dy.$$

Hier ist $\int P\partial x = \int \frac{\partial x}{V(xx+yy)} =$

$l(x+V(xx+yy))$, und $V = \frac{y:V(xx+yy)}{x+V(xx+yy)}$.

Daher $V = Q$, und $Q - V = o$, so daß

$Z = \log(x+V(xx+yy)) + \text{Conſt.}$

Auch iſt hier $\left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) = \frac{y:V(xx+yy)}{x+V(xx+yy)}$

$= \frac{1}{y} - \frac{x}{yV(xx+yy)}$; und $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$= \int \frac{-y\partial x}{(xx+yy)^{3:2}} = \text{Conſt} - \frac{x}{yV(xx+yy)}$,

wo die Conſtante eine Function von y ſeyn kann, in dieſem Falle $= \frac{1}{y}$ iſt.

28. Exempel. Die Differentialgleichung, $(aa+2xy+xx)\partial x + (xx+yy-aa)\partial y = o$, zu integriren.

Hier iſt $P = aa+2xy+xx$; und

$Q = xx+yy-aa$, alſo $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2x$; und

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2x$, daher die Gleichung an ſich integrirbar iſt. Nun iſt $\int P\partial x = aax + xxy + \frac{1}{3}x^3$; und $V\partial y = xx\partial y$, alſo $(Q-V)\partial y = (yy-aa)\partial y$, und $\int (Q-V)\partial y = \frac{1}{3}y^3 - aay$, folglich iſt die Integralgleichung:

$aax + xxy + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - aay = \text{Conſt.}$

In dieſem Beyſpiele iſt es leicht zu bemerken, daß die beyden Glieder, $2xy\partial x + xx\partial y$, aus xxy entſtehen. Die übrigen ſind alle Differentiale von einer einzigen veränderlichen Größe, daher die Integration ohne eine künſtliche Methode ſich ergiebt.

29. Zur Erläuterung des angewieſenen Verfahrens bemerke man, daß darum, weil bey der Integrirung von $P\partial x$ die veränderliche Größe y als unveränderlich angeſehen wird, das Differential, welches aus derſelben entſteht, durch ein gleiches entgegengeſetztes gehoben werden muß. Dieſes iſt das durch $V\partial y$ bezeichnete. Da $Q - V$ eine Function von y allein iſt, ſo iſt das Integral, $\int (Q - V)\partial y$ entweder in einer endlichen Geſtalt, oder durch eine Reihe zu finden möglich.

30. Wenn das Integral $\int P\partial x$ den Factor $x - f$, oder eine Potenz von $x - f$ als Factor enthält, ſo iſt derſelbe Factor auch in $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ enthalten.

Denn es ſey $\int P\partial x = U$, einer Function von x und y, und $U = (x-f)^n T$, wo T eine Function von x und y iſt. Nun iſt $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (x-f)^n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, alſo $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (x-f)^n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, nach (25.). Beide Integrale, $\int P\partial x$ und $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, ſind alſo für $x = f$ zugleich Null, und die Beſtimmung der Conſtante in dem einen bringt zugleich die Beſtimmung der Conſtante in dem andern mit ſich.

Euler macht dieſe Bemerkung allgemeiner. Wenn $\int P\partial x$ für $x = f$ Null iſt, ſo iſt, ihm zufolge, für denſelben Werth von x auch $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ Null. Calc. In-

[illegible]r. T. I. §. 457. Man wird die Bestimmung, $\int P \partial x = 0$, darauf einschränken müssen, daß sie durch einen gegebenen Werth von x, nicht durch einen von y abhangenden erfüllt werde. Denn in dem Exempel (27.) ist $\int P \partial x = 0$, wenn $x + \sqrt{(xx + yy)} = 1$ ist, aber das Integral $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wird gar nicht Null.

31. Aufg. Für eine gleichartige Gleichung, $P \partial x + Q \partial y = 0$, den integrirenden Factor zu finden.

Es seyn P und Q jede Functionen von n Dimensionen, in Beziehung auf x und y, da die unveränderlichen Größen hier nur bloße Zahlgrößen sind. Durch die Substitution $y = ux$, wird $P = x^n U$, und $Q = x^n V$, wo U und V Functionen von u allein sind. Da $\partial y = u \partial x + x \partial u$ ist, so ist

$$P \partial x + Q \partial y = x^n (U + Vu) \partial x + x^{n+1} V \partial u.$$

Hier ist nach den gemachten Substitutionen, $x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy$. Dividirt man die Gleichung auf der einen Seite durch $Px + Qy$, auf der andern durch $x^{n-1}(U + Vu)$, so ist

$$\frac{P \partial x + Q \partial y}{Px + Qy} = \frac{\partial x}{x} + \frac{V \partial u}{U + Vu}.$$

Der Theil rechter Hand ist an sich integrirbar, daher auch der Theil linker Hand und der gesuchte integrirende Factor ist $\frac{1}{Px + Qy}$.

32. Es muß also, wenn der Kürze wegen $\frac{P}{Px + Qy} = R$, und $\frac{Q}{Px + Qy} = S$ gesetzt wird, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$ seyn. Es verlohnt sich der Mühe, dieses aus der Natur der homogenen Gleichungen herzuleiten.

In dieſem Beyſpiele iſt es leicht zu bemerken, daß die beiden Glieder, $2xy\partial x + xx\partial y$, aus xxy entſtehen. Die übrigen ſind alle Differentiale von einer einzigen veränderlichen Größe, daher die Integration ohne eine künſtliche Methode ſich ergiebt.

29. Zur Erläuterung des angewieſenen Verfahrens bemerke man, daß darum, weil bey der Integrirung von $P\partial x$ die veränderliche Größe y als unveränderlich angeſehen wird, das Differential, welches aus derſelben entſteht, durch ein gleiches entgegengeſetztes gehoben werden muß. Dieſes iſt das durch $V\partial y$ bezeichnete. Da $Q - V$ eine Function von y allein iſt, ſo iſt das Integral, $\int (Q - V)\partial y$ entweder in einer endlichen Geſtalt, oder durch eine Reihe zu finden möglich.

30. Wenn das Integral $\int P\partial x$ den Factor $x - f$, oder eine Potenz von $x - f$ als Factor enthält, ſo iſt derſelbe Factor auch in $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ enthalten.

Denn es ſey $\int P\partial x = U$, einer Function von x und y, und $U = (x - f)^n T$, wo T eine Function von x und y iſt. Nun iſt $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (x - f)^n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, alſo $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (x - f)^n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$, nach (25.). Beide Integrale, $\int P\partial x$ und $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, ſind alſo für $x = f$ zugleich Null, und die Beſtimmung der Conſtante in dem einen bringt zugleich die Beſtimmung der Conſtante in dem andern mit ſich.

Euler macht dieſe Bemerkung allgemeiner. Wenn $\int P\partial x$ für $x = f$ Null iſt, ſo iſt, ihm zufolge, für denſelben Werth von x auch $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ Null. Calc. In-

[illegible]r. T. 1. §. 457. Man wird die Bestimmung, $\int P\partial x = 0$, darauf einschränken müssen, daß sie durch einen gegebenen Werth von x, nicht durch einen von y abhangenden erfüllt werde. Denn in dem Exempel (27.) ist $\int P\partial x = 0$, wenn $x + \sqrt{(xx + yy)} = 1$ ist, aber das Integral $\int \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ wird gar nicht Null.

31. Aufg. Für eine gleichartige Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = 0$, den integrirenden Factor zu finden.

Es seyn P und Q jede Functionen von n Dimensionen, in Beziehung auf x und y, da die unveränderlichen Größen hier nur bloße Zahlgrößen sind. Durch die Substitution $y = ux$, wird $P = x^n U$, und $Q = x^n V$, wo U und V Functionen von u allein sind. Da $\partial y = u\partial x + x\partial u$ ist, so ist

$$P\partial x + Q\partial y = x^n (U + Vu)\,\partial x + x^{n+1} V\partial u.$$

Hier ist nach den gemachten Substitutionen, $x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy$. Dividirt man die Gleichung auf der einen Seite durch $Px + Qy$, auf der andern durch $x^{n+1}(U + Vu)$, so ist

$$\frac{P\partial x + Q\partial y}{Px + Qy} = \frac{\partial x}{x} + \frac{V\partial u}{U + Vu}.$$

Der Theil rechter Hand ist an sich integrirbar, daher auch der Theil linker Hand und der gesuchte integrirende Factor ist $\frac{1}{Px + Qy}$.

32. Es muß also, wenn der Kürze wegen $\frac{P}{Px + Qy} = R$, und $\frac{Q}{Px + Qy} = S$ gesetzt wird, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$ seyn. Es verlohnt sich der Mühe, dieses aus der Natur der homogenen Gleichungen herzuleiten.

In dem Artikel, Differentialgleichung, (10.), ist gezeigt, daß, wenn V eine gleichartige Function von n Dimensionen, und $\partial V = P\partial x + Q\partial y$ ist, daraus $Px+Qy = nV$ folget. Nun läßt sich das Differential der unbestimmten Functionen P, Q, folgendergestalt durch die partiellen Differentiale derselben ausdrücken:

$$\partial P = \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$\partial Q = \partial x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Daraus ist, nach dem angeführten Satze,

$$nP = x\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$nQ = x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[(Px+Qy)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Px\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)\right] : [Px+Qy]^2,$$

das ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\right] : [Px+Qy]^2.$$

Eben so ist, wenn P und Q, x und y gegenseitig vertauscht werden,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \left[Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - PQ\right] : [Px+Qy]^2.$$

Die Werthe von n P und n Q multiplicire man, jenen mit Q, dieſen mit P, ſo geben die beiden gleichen Werthe von n P Q die Gleichung,

$$Q y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - P y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = P x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Q x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right);$$

Daher ſind die partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$, einander gleich.

33. Mit der verwandelten Gleichung, $R\partial x + S\partial y = o$, verfährt man nun ſo, wie in (24.) angewieſen iſt. Es wird meiſtens bequemer ſeyn, ſich der Methode durch Scheidung der veränderlichen Größen in (3.) zu bedienen, als dieſer durch einen integrirenden Factor. Die Gleichung,

$$(\alpha x + \beta y)\,\partial x + (\gamma x + \delta y)\,\partial y = o,$$

welche in (4.) durch Sonderung integrirt iſt, würde mittelſt eines integrirenden Factors ſehr viele Mühe machen. In einzelnen Fällen aber kann es bequem ſeyn, ſich eines ſolchen zu bedienen.

34. Ex. Die Gleichung $\alpha y\,\partial x + \beta x\,\partial y = o$, zu integriren. Hier iſt der integrirende Factor $= \frac{1}{(\alpha+\beta)xy}$, oder mit Weglaſſung des unveränderlichen Factors $= \frac{1}{xy}$, wodurch die verwandelte Gleichung iſt, $\frac{\alpha\partial x}{x} + \frac{\beta\partial y}{y} = o$.

Die Integrale iſt $\alpha lx + \beta ly = C$, oder $lx^{\alpha}y^{\beta} = C$, oder $x^{\alpha}y^{\beta} = C$.

35. Für die Gleichung,

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)\,\partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y)\,\partial y,$$

den integrirenden Factor zu finden, ſetze man, wie in (5.) geſchehen iſt, $\alpha + \beta x + \gamma y = t$, und $\delta + \varepsilon x + \zeta y = u$, ſo iſt $(\zeta t + \varepsilon u)\,\partial t = (\beta u + \gamma t)\,du$.

Im dem Artikel, Differentialgleichung, (10.), ist gezeigt, daß, wenn V eine gleichartige Function von n Dimensionen, und $\partial V = P\partial x + Q\partial y$ ist, daraus $Px + Qy = nV$ folget. Nun läßt sich das Differential der unbestimmten Functionen P, Q, folgendergestalt durch die partiellen Differentiale derselben ausdrücken:

$$\partial P = \partial x \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$\partial Q = \partial x \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Daraus ist, nach dem angeführten Satze,

$$nP = x\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$nQ = x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left[(Px+Qy)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Px\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)\right] : [Px+Qy]^2,$$

das ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = [Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - PQ] :$$

$$[Px+Qy]^2.$$

Eben so ist, wenn P und Q, x und y gegenseitig vertauscht werden,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = [Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - PQ] :$$

$$[Px+Qy]^2.$$

Die Werthe von nP und nQ multiplicire man, jenen mit Q, dieſen mit P, ſo geben die beiden gleichen Werthe von nPQ die Gleichung,

$$Qy\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-Py\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=Px\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-Qx\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right);$$

Daher ſind die partiellen Differentialquotienten,

$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$, einander gleich.

33. Mit der verwandelten Gleichung, $R\partial x+S\partial y=0$, verfährt man nun ſo, wie in (24.) angewieſen iſt. Es wird meiſtens bequemer ſeyn, ſich der Methode durch Scheidung der veränderlichen Größen in (3.) zu bedienen, als dieſer durch einen integrirenden Factor. Die Gleichung,

$$(\alpha x+\beta y)\,\partial x+(\gamma x+\delta y\,\partial y=0,$$

welche in (4.) durch Sonderung integrirt iſt, würde mittelſt eines integrirenden Factors ſehr viele Mühe machen. In einzelnen Fällen aber kann es bequem ſeyn, ſich eines ſolchen zu bedienen.

34. Ex. Die Gleichung $\alpha y\,\partial x+\beta x\,\partial y=0$, zu integriren. Hier iſt der integrirende Factor $=\frac{1}{(\alpha+\beta)xy}$, oder mit Weglaſſung des unveränderlichen Factors $=\frac{1}{xy}$, wodurch die verwandelte Gleichung iſt, $\frac{\alpha\partial x}{x}+\frac{\beta\partial y}{y}=0$.

Die Integrale iſt $\alpha lx+\beta ly=C$, oder $lx^{\alpha}y^{\beta}=C$, oder $x^{\alpha}y^{\beta}=C$.

35. Für die Gleichung,

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)\,\partial x=(\delta+\varepsilon x+\zeta y)\,\partial y,$$

den integrirenden Factor zu finden, ſetze man, wie in (5.) geſchehen iſt, $\alpha+\beta x+\gamma y=t$, und $\delta+\varepsilon x+\zeta y=u$, ſo iſt $(\zeta t+\varepsilon u)\,\partial t=(\beta u+\gamma t)\,du$.

Dieſes iſt eine gleichartige Gleichung, und daher durch Zufügung eines Factors integrirbar, da ſie es im Allgemeinen nicht iſt. Setzt man in (31.) t und u für x und y; ferner $P = \zeta t + \varepsilon u$; $Q = -\beta u - \gamma t$, ſo iſt der integrirende Diviſor $= \zeta tt + (\varepsilon - \gamma) tu - \beta uu$, in welchem nun wieder für t und u ihre Werthe zu ſetzen ſind.

36. Zuweilen bietet ſich der integrirende Factor oder Diviſor gleich dar, wie bey der Gleichung, $Xy\partial x + \partial y = o$, wo dieſer Diviſor iſt y, wenn nämlich X eine Function von x allein iſt. Es iſt dadurch

$$X\partial x + \frac{\partial y}{y} = o,$$ und die Integrale iſt

$\int X\partial x + ly = C$. Da $\log. e^z = z$, ſo iſt die Gleichung auch $\log. e^{\int X\partial x} + \log. y = C$, oder $\log. e^{\int X\partial x} y = C$. Daher iſt auch $e^{\int X\partial x} y = C$, und $e^{\int X\partial x}$ iſt ein Multiplicator, der die Differentialgleichung integrirbar macht.

Es entſteht nämlich aus der endlichen Gleichung, $e^u y = C$, die Differentialgleichung $e^u y\partial u + e^u \partial y = o$, das iſt, $y\partial u + \partial y = o$. Hier iſt $u = \int X\partial x$; $\partial u = X\partial x$.

37. Aufg. Zu der Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, worin P und Q Functionen von x allein ſind, den integrirenden Factor zu finden.

Da der zweyte Theil bloß x enthält, und der erſte die Formel in (36.) iſt, welche durch die Multiplication mit $e^{\int P\partial x}$ integrirbar wird, ſo wird die ganze Gleichung durch dieſen Factor integrirbar.

Die Integralgleichung iſt nun

$$e^{\int P\partial x} y = \int e^{\int P\partial x} Q\partial x,$$

wie in (9.) ſchon gefunden iſt.

38. Exempel. In Joh. Bernoulli Hydraulik, Opp. T. IV. p. 408. kommt folgende Gleichung vor:

$$\alpha z\partial x + (\beta + \gamma x)\partial z = (\varepsilon + \delta x)\partial x.$$

Man gebe dieſer die Geſtalt,

$$\partial z + \frac{\alpha z \partial x}{\beta + \gamma x} = \frac{\varepsilon + \theta x}{\beta + \gamma x} \partial x,$$

so ist hier $P = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x}$; $Q = \frac{\varepsilon + \theta x}{\beta + \gamma x}$,

und $\int P \partial x = \frac{\alpha}{\gamma} \log(\beta + \gamma x)$. Zur Abkürzung sey

$\beta + \gamma x = u^{\gamma : \alpha}$, so ist $\int P \partial x = \log u$, und $e^{\int P \partial x} = e^{\log u} = u$. (Es ist nämlich $\log u$ der Logarithme dieser Exponentialgröße). Also ist der integrirende Factor u oder $(\beta + \gamma x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Es sey $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, so ist

$$\beta + \gamma x = u^m; \quad x = \frac{u^m - \beta}{\gamma}; \quad \partial x = \frac{1}{\alpha} u^{m-1} \partial u;$$

und die Gleichung ist

$$\partial z + \frac{z \partial u}{u} = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{\partial u}{u} + \frac{\theta}{\alpha \gamma} (u^m - \beta) \frac{\partial u}{u},$$

und durch die Multiplication mit u,

$$u \partial z + z \partial u = \frac{\varepsilon}{\alpha} \partial u + \frac{\theta}{\alpha \gamma} (u^m - \beta) \partial u.$$

Die Integralgleichung ist

$$uz = \frac{\gamma\varepsilon - \beta\theta}{\alpha\gamma} u + \frac{\theta}{(\alpha+\gamma)\gamma} u^{m+1} + C.$$

Wird x wieder eingeführt, so ist, nach gehöriger Reduction,

$$z = \frac{\varepsilon(\alpha+\gamma) - \beta\theta}{\alpha(\alpha+\gamma)} + \frac{\theta x}{\alpha+\gamma} + C.$$

Man sieht, daß eine sehr einfache endliche Gleichung eine ziemlich zusammengesetzte Differentialgleichung geben kann. Es sind in jener eigentlich nur zwey gegebene Größen. Diese sind aus mehrern zusammengesetzt, und

darauf vertheilt worden. Dann ist vor der Differentiation eine Potenzialgröße als Factor zugesetzt.

39. Die Gleichung, $\partial y + Py\partial x = Qy^{n+1}\partial x$, wird durch die Substitution $\frac{1}{y^n} = z$ in diese:

$$\partial z - nPz\partial x = -nQ\partial x,$$

verwandelt, und wird also durch einen Factor von derselben Form, wie der in (37.) gefundene integrirt.

40. Auch die Gleichung, $\partial Y + PY\partial x = Q\partial x$, wird durch den Factor $e^{\int P\partial x}$ integrirbar.

41. Aufg. Zu der Differentialgleichung,

$$\alpha y\partial x + \beta x\partial y = x^m y^n(\gamma y\partial x + \delta x\partial y),$$

den integrirenden Factor zu finden.

Man suche zuerst für jeden der beiden Theile den einfachsten Factor, und nehme dann den allgemeinen unbestimmten nach (22.) so, daß für beide Theile der Factor derselbe werde. Für den ersten Theil ist nach (34.) ein integrirender Factor $\frac{1}{xy}$, und das Integral $= x^\alpha y^\beta$; daher ein unbestimmter allgemeiner Factor $= \frac{1}{xy}\varphi x^\alpha y^\beta$. Für den zweyten Theil ist der einfachste Factor $= \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$, als wodurch derselbe wird $\frac{\gamma\partial x}{x} + \frac{\delta\partial y}{y}$, wovon das Integral ist $\log x^\gamma y^\delta$, oder auch $x^\gamma y^\delta$, weil beides einer unbestimmten Constante gleich seyn muß. Der allgemeine integrirende Factor ist nun hier $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\varphi x^\gamma y^\delta$. Die Functionen seyn die eine die μte Potenz, die andere die νte der Functionalgröße, so muß seyn

$x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}=x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}$.

Daraus folgt $\mu\alpha=\nu\gamma-m$, und $\mu\beta=\nu\delta-n$, so daß $\mu=\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$; $\nu=\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}$. Werden nun die beiden Theile der Gleichung, der erste mit $x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}$, der andere mit $x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}$ multiplicirt, so ist die Gleichung integrirbar und, die Integrale ist

$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+\text{Conſt.}$ wo für μ und ν ihre obigen Werthe zu ſetzen ſind.

42. Wenn $\mu=0$, ſo iſt $\log. x^{\alpha}y^{\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+C$. Und auf gleiche Art iſt, wenn $\nu=0$ iſt,

$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\log. x^{\gamma}y^{\delta}+C$.

Iſt $\alpha\delta=\beta\gamma$, ſo verwandelt ſich die allgemeine Gleichung in dieſe:

$(\alpha y\partial x+\beta x\partial y)(1-\frac{\gamma}{\alpha}x^{m}y^{n})=0$.

Dadurch iſt theils $\alpha y\partial x+\beta x\partial y=0$, theils $1-\frac{\gamma}{\alpha}x^{m}y^{n}=0$, alſo ſowohl $x^{\alpha}y^{\beta}=$ Conſt. als $x^{m}y^{n}=\frac{\alpha}{\gamma}$. Beide Gleichungen geben $x^{\alpha-m}y^{\beta-n}=\frac{C\gamma}{\alpha}$. Dieſer Fall entſteht, wenn in der allgemeinen Integralgleichung (40.) die Conſtante $=0$ geſetzt wird.

43. Wenn für eine Differential-Gleichung ſich kein integrirender Factor finden läßt, ſo verſuche man eine Subſtitution für die veränderlichen Größen, durch welche

die Sonderung möglich wird. Die vorgegebene Gleichung sey $P\partial x + Q\partial y = o$. Durch die Einführung zweyer andern veränderlichen Größen, t und u, die Functionen von x und y sind, werde eine Gleichung, $R\partial t + S\partial u = o$, erhalten, welche durch die Division mit einer Function V von t und u eine gesonderte werde, so daß $\frac{R}{V}$ eine Function von t allein, und $\frac{S}{V}$ eine Function von u allein sey. Da nun die Formel, $\frac{R\partial t + S\partial u}{V}$, an sich integrirbar ist, so ist auch die Formel, $\frac{P\partial x + Q\partial y}{V}$, integrirbar, nachdem in der Function V für t und u ihre Werthe durch x und y zurückgesetzt sind.

44. Wenn also eine Differentialgleichung sich in eine gesonderte verwandeln läßt, so ist für sie ein integrirender Factor zu finden möglich. Im Gegentheil wird aber nicht immer eine Sonderung möglich seyn, wo ein integrirender Factor sich angeben läßt. Die Methode, durch Factoren zu integriren erstreckt sich also weiter als die der Sonderung.

45. Da sich keine bestimmte Vorschriften geben lassen, den integrirenden Factor für jeden Fall zu finden, so ist es sehr nützlich, umgekehrt aus einer angenommenen Form des integrirenden Factors die Functionen von x und y zu bestimmen, welche eine durch jenen Factor integrirbare Gleichung, $P\partial x + Q\partial y = o$, geben. Euler hat die Methode in der Integralrechnung, T. I. Sect. II. Cap. III. abgehandelt, womit man nach Lacroix Integralrechnung §. 561—565. vergleichen mag. Die Methode hiezu ist im allgemeinen folgende. Die Gleichung sey $P\partial x + Q\partial y = o$; der angenommene Factor $= V$, so ist $\left(\frac{\partial . PV}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . QV}{\partial x}\right)$, also $V\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$

$-V\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-Q\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0$. In P, Q, V ſey die Zuſammenſetzung aus y und x beſtimmt, ſo aber, daß die darin befindlichen Functionen von x, die durch X, X^1, X^{11} etc. bezeichnet werden, unbeſtimmt gelaſſen werden. Z. B. $P=Xy$ oder $Xy+X^1$, oder $X+y$, oder $X+y^2$. Auf gleiche Art verhalte es ſich mit Q, und eben ſo mit V, als $V=y^5+Xy^2+X^1y$, oder $\frac{y^m}{(1+Xy)^n}$, oder $(yy+Xy+X^1)^n$. Ordnet man in der Gleichung für die partiellen Differentialquotienten die Glieder nach den Potenzen von y, und ſetzt das Aggregat der zu derſelben Potenz gehörigen $=0$, ſo erhält man Bedingungsgleichungen für die Formen der unbeſtimmt gelaſſenen Functionen von X, deren alſo gerade ſo viele ſeyn müſſen, als man Bedingungsgleichungen erhalten hat.

46. Läßt man in der Gleichung, $P\partial x+Q\partial y=0$, die Functionen P und Q beide auf eine unbeſtimmte Art ſowohl x als y enthalten, und nimmt zum integrirenden Factor die Formel $Px+Qy$, ſo werden die Functionen P und Q auf folgende Art beſtimmt.

In der Formel $\frac{P\partial x+Q\partial y}{Px+Qy}$ ſetze man $Q=PR$, ſo wird ſie dieſe: $\frac{\partial x+R\partial y}{x+Ry}$. Um die partiellen Differentiale dieſer Function bezeichnen zu können, ſetze man $\partial R=M\partial x+N\partial y$, wo die Relation zwiſchen M und N noch zu beſtimmen iſt. Da die Function $\frac{\partial x+R\partial y}{x+Ry}$ an ſich integrirbar ſeyn ſoll, ſo iſt zufolge der Bedingungsgleichung für dieſe Beſchaffenheit,

$\frac{1}{\partial y}\partial.\frac{1}{x+Ry}=\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{R}{x+Ry}$, weil nun anſtatt

P und Q die Functionen $\frac{1}{x+Ry}$ und $\frac{R}{x+Ry}$ gesetzt sind. Folglich ist $\frac{-R-Ny}{(x+Ry)^2} = \frac{Mx-R}{(x+Ry)^2}$. Es ist nämlich $\left(\frac{\partial.Ry}{\partial y}\right) = N+R$; $\left(\frac{\partial.Ry}{\partial x}\right) = Mx$; $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = M$. Die gefundene Gleichung giebt $Mx = -Ny$. Daher ist $\partial R = M\partial x - \frac{Mx\partial y}{y} = My.\frac{y\partial x - x\partial y}{yy} = My.d\frac{x}{y}$.

Damit diese Formel integrirbar sey, muß My eine Function von $\frac{x}{y}$, seyn. Daher ist auch R, eine Function von $\frac{x}{y}$, das ist, R ist eine gebrochne Function von x und y, in welcher die Dimensionen des Zählers und Nenners sich gleich sind. Also ist $\frac{Q}{P}$, als der Werth von R, auch eine solche Function von x und y, und die Functionen P und Q sind gleichartige von derselben Dimension, übereinstimmig mit dem, was in (31.) gefunden ist.

47. Wenn man eine endliche Gleichung zwischen x und y so annimmt, daß sie in zwey Theile zerfällt, in welchen x und y ganz auf einerley Art enthalten sind, so kommt man durch Differentiation auf zwey Differentialformeln für x und y, die völlig ähnlich und sich gleich sind.

48. Eine solche Gleichung ist

M) $\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0$.

Diese differentiirt wird

$2\beta(\partial x + \partial y) + 2\gamma(x\partial x + y\partial y) + 2\delta y\partial x + 2\delta x\partial y = 0$,

oder

$$\frac{\partial x}{\beta+\gamma y+\delta x}+\frac{\partial y}{\beta+\gamma x+\delta y}=0.$$

Die Nenner suche man nun so zu bestimmen, daß der erstere bloß von x, der andere bloß von y eine Function sey, und zwar von der Form

$\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}$ und $\sqrt{(A+2By+Cyy)}$.

Es sey $\beta+\gamma x+\delta y=p$; und $\beta+\gamma y+\delta x=q$, so ist erstlich

$$pp=\beta\beta+2\beta(\gamma x+\delta y)+\gamma\gamma xx+\delta\delta yy+2\gamma\delta xy.$$

Von dem Theile rechter Hand ziehe man die mit γ multiplicirte Gleichung M) ab, so ist

$$pp=\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta\delta-\gamma\gamma)yy.$$

Eben so ist

$$qq=\beta\beta-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta\delta-\gamma\gamma)xx.$$

Es haben also die Nenner p, q die verlangte Form, und es ist nur nöthig, die Größen α, β, γ, δ, durch A, B, C zu bestimmen. Eine von jenen ist willkührlich, und giebt die unbestimmte Constante, wodurch die Integralgleichung eine vollständige wird. Es ist

$$\beta\beta-\alpha\gamma=A;\ \beta(\delta-\gamma)=B;\ \delta\delta-\gamma\gamma=C.$$

Hieraus ist $\frac{\partial+\gamma}{\beta}=\frac{C}{B}$, oder $\partial+\gamma=\frac{C\beta}{B}$, und $\partial-\gamma=\frac{B}{\beta}$, also

$$\gamma=\frac{C\beta}{2B}-\frac{B}{2\beta};\quad \delta=\frac{C\beta}{2B}+\frac{B}{2\beta};$$

$$\alpha=\frac{\beta\beta-A}{\gamma}=\frac{2(\beta\beta-A)B\beta}{C\beta\beta-BB}.$$

Setzt man diese Werthe in die angenommene Gleichung, so erhält man die vollständige Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}+\frac{\partial y}{\sqrt{(A+2By+Cyy)}}=0.$$

Euler ſetzt (Calc. integr. T. I. §. 580.)

$$\alpha=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta A}{\gamma B}(\delta-\gamma)=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta\beta AC}{\gamma BB}+\frac{2\beta A}{B},$$ und findet die Integralgleichung,

$$\beta\beta(BB-AC)+2\beta\gamma AB+2\beta\gamma BB(x+y)+\gamma\gamma BB(xx+yy)+2\gamma B(\beta C-\gamma B)xy=0.$$

Hier iſt der Quotient $\frac{\beta}{\gamma}$ die Conſtante. Dieſer ſey $=\alpha$, ſo iſt

$$\alpha(BB-AC)+2AB+2BB(x+y)+\frac{BB}{\alpha}(xx+yy)+2B(C-\frac{1}{\alpha}B)xy=0.$$

49. Hier ſieht man, daß die Integrale einer Differentialgleichung algebraiſch ſeyn kann, wenn gleich beide Theile derſelben kein ſolches Integral geben. Auch bleibt die Form der algebraiſchen Gleichung dieſelbe, die Integrale der beiden Theile der Differentialgleichung mögen von den Winkeln oder von Logarithmen abhangen.

50. Euler hat dieſe Methode Integrale zu finden vorzüglich bearbeitet, zuerſt in dem VI. und VII. Bande der neuen Petersburger Commentarien, dann in dem erſten Theile ſeiner Integralrechnung, Sect. II. Cap. V. VI und in dem Supplement am Ende des dritten Theils. La Grange hat eine Methode zur Integrirung der Gleichung, $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}=\frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, gelehrt, worüber Euler Erläuterungen mitgetheilt hat, in den Actis Acad. Petr. T. II. P. I. 1778. Man ſehe noch Cousin Calc. diff. et int. T. II. §. 423—434. Es iſt merkwürdig, daß die For-

mel $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}}$ weder vermittelst Logarithmen noch Winkel integrirt werden kann, und daß doch eine aus zwey solchen Formeln zusammengesetzte Gleichung eine algebraische Gleichung zwischen x und y giebt. Euler zeigt dieses auch von einer Differential-Gleichung, wo die Wurzelgrößen in den beiden Theilen alle Potenzen bis zur vierten enthalten. Die Untersuchung hat ihre, freylich bloß speculative, Anwendung in der Geometrie der Curven, mehrere Bogen derselben Curve zu finden, deren Unterschied eine algebraische Größe ist, oder welche ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben.

III. Methoden durch Annäherung eine Differentialgleichung aufzulösen.

51. Man setze $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta$ + etc. wo die Exponenten entweder eine zunehmende, oder eine abnehmende Reihe ausmachen. Hieraus ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \text{etc.}$$

Jene Reihe setze man in der Differentialgleichung zwischen x und y für y, diese in eben derselben, nachdem sie durch ∂x dividirt ist, in den Gliedern, welche den Differential-Quotienten enthalten für denselben. Hierauf verfahre man zur Bestimmung der Exponenten und Coefficienten so, wie es in dem Artikel, Function, gewiesen ist, wenn die Exponenten eine arithmetische Reihe ausmachen sollen. Dieses ist inzwischen nicht nothwendig. Die Glieder der Particular-Reihen, welche zu einer und derselben Potenz von x gehören sollen, heben sich einander auf. Auf diesem Umstande beruhen die Bestimmungen der Coefficienten und Exponenten, worin kein Widerspruch entstehen darf. Es muß ein Coefficient unbestimmt bleiben, damit das Integral ein vollständiges werde. Sonst giebt die Reihe nur eine particulare Auflösung.

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(A+2Bx+Cxx)}}+\frac{\partial y}{\sqrt{(A+2By+Cyy)}}=0.$$

Euler setzt (Calc. integr. T. I. §. 580.)

$$\alpha=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta A}{\gamma B}(\delta-\gamma)=\frac{\beta\beta}{\gamma}-\frac{\beta\beta AC}{\gamma BB}+\frac{2\beta A}{B},$$ und findet die Integralgleichung,

$$\beta\beta(BB-AC)+2\beta\gamma AB+2\beta\gamma BB(x+y)+\gamma\gamma BB(xx+yy)+2\gamma B(\beta C-\gamma B)xy=0.$$

Hier ist der Quotient $\frac{\beta}{\gamma}$ die Constante. Dieser sey $=a$, so ist

$$a(BB-AC)+2AB+2BB(x+y)+\frac{BB}{a}(xx+yy)+2B(C-\frac{1}{a}B)xy=0.$$

49. Hier sieht man, daß die Integrale einer Differentialgleichung algebraisch seyn kann, wenn gleich beide Theile derselben kein solches Integral geben. Auch bleibt die Form der algebraischen Gleichung dieselbe, die Integrale der beiden Theile der Differentialgleichung mögen von den Winkeln oder von Logarithmen abhangen.

50. Euler hat diese Methode Integrale zu finden vorzüglich bearbeitet, zuerst in dem VI. und VII. Bande der neuen Petersburger Commentarien, dann in dem ersten Theile seiner Integralrechnung, Sect. II. Cap. V. VI und in dem Supplement am Ende des dritten Theils. La Grange hat eine Methode zur Integrirung der Gleichung, $\frac{\partial x}{\sqrt{X}}=\frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, gelehrt, worüber Euler Erläuterungen mitgetheilt hat, in den Actis Acad. Petr. T. II. P. I. 1778. Man sehe noch Cousin Calc. diff. et int. T. II. §. 423—434. Es ist merkwürdig, daß die For-

mel $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}}$ weder vermittelst Logarithmen noch Winkel integrirt werden kann, und daß doch eine aus zwey solchen Formeln zusammengesetzte Gleichung eine algebraische Gleichung zwischen x und y giebt. Euler zeigt dieses auch von einer Differential-Gleichung, wo die Wurzelgrößen in den beiden Theilen alle Potenzen bis zur vierten enthalten. Die Untersuchung hat ihre, freylich bloß speculative, Anwendung in der Geometrie der Curven, mehrere Bogen derselben Curve zu finden, deren Unterschied eine algebraische Größe ist, oder welche ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben.

III. Methoden durch Annäherung eine Differentialgleichung aufzulösen.

51. Man setze $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta$ + etc. wo die Exponenten entweder eine zunehmende, oder eine abnehmende Reihe ausmachen. Hieraus ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \text{etc.}$$

Jene Reihe setze man in der Differentialgleichung zwischen x und y für y, diese in eben derselben, nachdem sie durch ∂x dividirt ist, in den Gliedern, welche den Differential-Quotienten enthalten für denselben. Hierauf verfahre man zur Bestimmung der Exponenten und Coefficienten so, wie es in dem Artikel, Function, gewiesen ist, wenn die Exponenten eine arithmetische Reihe ausmachen sollen. Dieses ist inzwischen nicht nothwendig. Die Glieder der Particular-Reihen, welche zu einer und derselben Potenz von x gehören sollen, heben sich einander auf. Auf diesem Umstande beruhen die Bestimmungen der Coefficienten und Exponenten, worin kein Widerspruch entstehen darf. Es muß ein Coefficient unbestimmt bleiben, damit das Integral ein vollständiges werde. Sonst giebt die Reihe nur eine particulare Auflösung.

52. Exempel. Die gegebene Gleichung sey $\partial y + y\partial x = ax^n \partial x$. Es ist daraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y - ax^n = 0.$$

Die Substitution der beiden Reihen in (51.) giebt die Particularreihen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \delta D x^{\delta-1} + \text{etc.}$$

$$+ y = + Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.}$$
$$- ax^n = - ax^n.$$

Man sieht hier leicht, daß die Reihe der Exponenten zum Unterschiede die Einheit haben muß. Stellt man die Particularreihen so wie es hier geschehen ist, so ist $\alpha = n+1$; $\beta = \alpha + 1 = n+2$; $\gamma = \beta + 1 = n+3$, u. s. f.

Dadurch ist $A = \frac{a}{n+1}$; $B = -\frac{a}{(n+1)(n+2)}$;

$C = +\frac{a}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; u. s. f.

und $y = Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + \text{etc.}$

Stellt man die Reihen folgendergestalt unter einander;

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \text{etc.}$$

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.}$$
$$-ax^n = -ax^n,$$

so ist $\alpha = n$; $\beta = n-1$; $\gamma = n-2$, u. s. f.

$A = a$; $B = -na$; $C = +n(n-1)a$;

$D = -n(n-1)(n-2)a$, u. s. f. und

$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.}$

Die Constante muß in beiden Fällen noch zugefügt werden.

53. Dieses Beyspiel gehört unter die allgemeine Gleichung in (9.), wo für den gegenwärtigen Fall ist $P = 1$; $Q = ax^n$; $\int P\partial x = x$. Dadurch ist $y = e^x \int e^x . ax^n \partial x$. Aus Integralformel, 100. ist, weil das dortige a hier e, die Basis der natürlichen Logarithmen ist, also $la = le = 1$,

$$\int e^x x^n \partial x = e^x(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-} \\ - n(n-1)(n-2)x^{n-2} + \text{etc.}),$$

und $y = ae^{-x} \int e^x x^n \partial x = a(x^n - nx^{n-1} + \text{etc.})$ welches mit der zweyten Reihe ganz übereinstimmt. Sie bricht für ein ganzes n ab. Die erste Reihe kann nur für kleine x gebraucht werden.

54. Bequemer und sicherer wird der Taylorsche Lehrsatz, der schon zu der Annäherung bey Differentialformeln angewandt ist, auch bey Differentialgleichungen gebraucht: bequemer, weil die Coefficienten durch die Differentiation einer Function von x und y gefunden werden; sicherer, weil man das Intervall zwischen zwey Werthen von x in mehrere Theile α theilen, und aus dem Werthe von y, der zu einem Werthe von x gehört, den zu $x + \alpha$ gehörigen, und so successiv aus dem zu $x = a$ gehörigen den für $x = a + n\alpha$ herleiten kann.

55. Es sey nun $y = fx$, wo man zwar die Beschaffenheit der Function, die durch f bezeichnet wird, nicht kennt, aber den Werth derselben für $x = a$ als bekannt annimmt. Es ist.

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

(Differenzenrechnung, 38.). Hier wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ als eine Function von x und y gegeben. Daher sind die höhern Differentialquotienten auch solche Functionen. Setzt man

$x = a$, so ist in diesen Functionen auch für x zu setzen a, und für y der zu diesem Werthe von x gehörige, der b sey, und gegeben werden muß. Die Differential-Quotienten für diese Werthe von x und y seyn

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = B; \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C, \text{ u. s. f.}$$

Es ist nun für $x = a + u$,

$$y = b + Au + \tfrac{1}{2}Bu^2 + \tfrac{1}{6}Cu^3 + \tfrac{1}{24}Du^4 + \text{etc.}$$

56. Exempel. Die Differentialgleichung sey $dy = (xx + yy)\partial x$. Hier ist $\frac{\partial y}{\partial x} = xx + yy$, also, wenn ∂x constant ist,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y} = 2x + \frac{2y\partial y}{\partial x} = 2x + 2x^2 y + 2y^3.$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 + 4xy + \frac{2x^2\partial y}{\partial x} + \frac{6y^2\partial y}{\partial x}$$

$$= 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4$$

$$\frac{\partial^4 y^4}{\partial x^4} = 4y + 8x^3 + 16xy^2$$

$$+ (4x + 16x^2y + 24y^3)\frac{\partial y}{dx}$$

$$= 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4 y$$
$$+ 40x^2y^3 + 24y^5$$

Setzt man in diesen Werthen $x = a$, und $y = b$, so ergeben sich die Coefficienten der für y angesetzten Reihe.

57. Damit man im allgemeinen einsehe, wie die Differentialquotienten durch die unmittelbare Abhängigkeit von y modificirt werden, folgt hier die Entwicklung des zweyten und dritten.

Es sey $\frac{\partial y}{\partial x} = V$. und $\partial V = M\partial x + N\partial y$,

wo $N\partial y$ das partielle Differential in Beziehung auf y ist. Es ist nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x} = M + \frac{N\partial y}{\partial x} = M + NV.$$

Man setze $\partial M = m\partial x + n\partial y$; und $\partial N = \mu\partial x + \nu\partial y$, so ist

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m + nV + \frac{V(\mu\partial x + \nu\partial y)}{\partial x} + \frac{N(M\partial x + N\partial y)}{\partial x}$$

$$= m + nV + \mu V + \nu V^2 + MN + NNV.$$

Hier ist $n = \mu$ (Differentialgleichung, 12.). In den Symbolen für partielle Differentiale ist

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + 2V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) + V^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + V\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

58. Von der ältern Methode handelt ausführlich Kästner in der Anal. d. Ll. S. 496—548. Die neuere lehrt Euler in der Integralrechnung T. 1. Sect. II. Cap. VII. Man sehe auch La Grange in dem Mém. de l'Acad. de Berlin 1776: La Croix Integralrechn. p. 284—296.

IV. Integration der Gleichungen mit Potenzen und Producten der Differentialien ersten Grades.

59. In geometrischen Untersuchungen, worin Bogen von krummen Linien vorkommen, finden sich Quadrate der Elemente der rechtwinklichten Coordinaten in die Gleichungen eingemischt. Schon um dieser Ursache allein ist es nöthig, von der Integration der angezeigten Gleichungen Beyspiele zu geben.

60. Man bezeichne den Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch p,

so daß $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Es sey eine Gleichung zwischen x und p gegeben, worin p auf einen höhern Grad als den ersten steigt. Nun drücke man, wenn die Gleichung auflösbar ist, p durch x aus, so ist p eine Function von x, oder es ist $p = X$. Daher ist $\partial y = X \partial x$, und $y = \int X \partial x$.

61. Oder, wenn es bequemer ist, drücke man x durch p aus, so ist x eine Function von p, oder $x = P$, wo P diese Function bedeutet. Da $\partial x = \partial P$, so ist $\partial y = p \partial P$, und $y = pP - \int P \partial p$. In diesem Falle werden x und y jede durch p bestimmt. Werden die beiden Gleichungen vollständig gegeben, so läßt sich p herausschaffen, und es wird eine Gleichung zwischen x und y erhalten.

62. Läßt sich weder p durch x, noch x durch p bequem ausdrücken, so suche man eine neue Größe einzuführen, durch welche beide sich besser bestimmen lassen.

63. Der Fall ist schwerer, wenn beide veränderliche Größen nebst p in der Gleichung vorhanden sind. Ist sie eine gleichartige, so setze man $y = ux$. Dadurch geht x nebst y heraus, und es bleibt eine Gleichung zwischen u und p, aus welcher die eine durch die andere bestimmt wird. Es ist $\partial y = u \partial x + x \partial u$, das ist $p \partial x = u \partial x + x \partial u$, oder $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Da p durch u gegeben ist, so wird durch Integration eine Gleichung zwischen x und u erhalten, so daß beide, x und y, durch dieselbe u bestimmt werden.

64. Die Differentialgleichung sey $\partial y^2 - \partial x^2 = 0$, das ist, $pp - 1 = 0$. Also ist $p + 1$. Daher $y = x + a$, und $y = -x + b$, wo a und b die Constante in jeder der beyden Gleichungen sind. Beide Gleichungen vereinigt geben

$(y-x-a)(y+x-b)=0$,

oder $yy-xx-(a+b)y-(a-b)x+ab=0$.

Die Gleichung gehört für ein System zweyer parallelen geraden Linien.

65. Die Differentialgleichung sey

$y\partial x-x\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}=0$, das ist

$y-x\sqrt{(1+pp)}=0$. Da diese gleichartig ist, so setze man $y=ux$, und es ist $u=\sqrt{(1+pp)}$,

daher $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial u}{p-u}$ (63.); oder $\frac{dx}{x}=-\frac{du}{u-p}$.

Nun ist $\partial.\log.(u-p)=\frac{\partial u-\partial p}{u-p}$,

also ist $\int\frac{\partial u}{u-p}=\log(u-p)+\int\frac{\partial p}{u-p}$.

Für u dessen Werth gesetzt, ist

$$\frac{\partial p}{u-p}=\frac{\partial p}{\sqrt{(1+pp)-p}}=(\sqrt{(1+pp)}+p)\partial p.$$

Daher $\int\frac{\partial p}{u-p}=\frac{1}{2}pp+\int\partial p\sqrt{(1+pp)}$

$=\frac{1}{2}pp+\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}+\frac{1}{2}\log.(\sqrt{(1+pp)}+p)$,

(Integralformel 69. 50.). Ferner ist $\log.(u-p)$

$=\log.(\sqrt{(1+pp)}-p)=-\log.(\sqrt{1+pp})+p)$.

Folglich ist $\log x=C+\frac{1}{2}\log.(\sqrt{(1+pp)}+p)$

$-\frac{1}{2}pp-\frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)}$.

Ist x durch p gefunden, so ist $y=x\sqrt{(1+pp)}$, da $y=ux$ ist.

66. Die Differentialgleichung sey

$y\partial x-x\partial y=a\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$, das ist $y-px$

$=a\sqrt{(1+pp)}$. Diese differentiirt giebt die Glei-

chung, $-x\partial p = \frac{ap\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, da $\partial y = p\partial x$ ist.

Hier ist entweder $\partial p = o$, oder $-x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Das erste giebt $p = \alpha$, einer Constante; das andere giebt ohne Integration x durch p. Da $\partial y = p\partial x$, so ist $\partial y = -\frac{ap\partial p}{(1+pp)^{3:2}}$, und $y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Dadurch ist $xx + yy = aa$. Diese Auflösung ist nur eine particulare, da keine unbestimmte Constante hinzugefügt werden kann. Der Werth $p = \alpha$ giebt $\partial y = \alpha\partial x$, also $y = \alpha x + \text{const.}$ Für diesen Werth von p ist die gegebene Gleichung, $y - \alpha x = a\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$, so daß die Constante $= a\sqrt{(1+\alpha\alpha)}$ ist.

67. Die Gleichung, $y\partial x - x\partial y = a\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, entsteht aus der, $y = ax + e$, durch einige Veränderungen. Es ist daraus erstlich, $\partial y = a\partial x$. Schafft man die gegebene a weg, um c hineinzubringen, so entsteht daraus die Gleichung $y\partial x - x\partial y = c\partial x$. Ferner ist $\partial y^2 + \partial x^2 = (1+a^2)\partial x^2$. Setzt man hieraus den Werth von ∂x in jene Gleichung, so ist

$$y\partial x - x\partial y = \frac{c\partial x}{\sqrt{(1+aa)}}\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Nimmt man $c = a\sqrt{(1+aa)}$, so erhält man die in (66.) aufgegebene Gleichung.

68. Die Differentialgleichung sey $y\partial y^5\partial x = a(\partial x^2 + \partial y^2)^2$, welche die Gestalt des Körpers bestimmt, der in einem flüssigen Mittel den geringsten Widerstand leidet. Die Coordinaten x und y sind rechtwinklichte. Die Axe der x ist die Richtung der Bewegung.

Durch die Substitution $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ verwandelt sie sich in diese: $p^5 y = a(1+pp)^3$, daher

$$y = \frac{a(1+pp)^3}{p^5}.$$ Hieraus ist

$$\partial y = -\frac{3a\partial p}{p^4} - \frac{2a\partial p}{p^2} + a\partial p.$$

$$\partial x = -\frac{3a\partial p}{p^5} - \frac{2a\partial p}{p^3} + \frac{a\partial p}{p}.$$

$$x = +\frac{3a}{4p^4} + \frac{a}{p^2} + a\log p.$$

Die Gleichung zwischen x und y ist transcendent. Doch können für jede angenommene Werthe von p die zusammengehörigen Werthe von x und y gefunden werden.

V. Integration der Differentialgleichungen vom zweyten Grade.

69. In dem Artikel, Differentio-Differentialgleichung, ist bemerkt, daß die Differentialgleichungen jedes Grades auf zweyerley Art dargestellt werden können, theils so, daß die Symbole der Differentiale selbst in Verbindung mit den veränderlichen Größen gebraucht werden, theils daß die Differentialquotienten statt jener eingeführt werden, wodurch eine Differentialgleichung die Form einer endlichen Gleichung erhält. Hier füge ich noch die Bemerkung hinzu, daß bey der zweyten Form kein Differential constant genommen zu werden braucht, daher bey dieser Form für dieselbe Relation der veränderlichen Größen auch nur eine und dieselbe Relation zwischen den veränderlichen Größen und den Differentialquotienten statt findet. Bey dem Gebrauche der Differentiale selbst entstehen verschiedene Ausdrücke, nachdem das eine oder das andere der Differentiale constant genommen wird. Ein

Beyspiel geben die Werthe des Halbmessers der Krümmung an derselben Curve. Bey der Integration einer Differentialgleichung vom zweyten oder höheren Grade muß immer eines der Differentiale unveränderlich gesetzt werden, weil sonst die Glieder der Differentialverhältnisse keine bestimmte Relation durch die gegebenen und veränderlichen Größen erhalten, s. Differentio-Differentialgleichung; 12. 15.

70. Euler gebraucht durchgehends die Bezeichnungen, $\partial y = p\partial x$ und $\partial p = q\partial x$, bey einer Differentialgleichung vom zweyten Grade. Wenn aber mehrere veränderliche Größen, die von einander abhangen, in Rechnung kommen, z. B. Coordinaten einer Curve und der zugehörige Bogen, so wird es dienlich seyn, ein Differential, das veränderlich ist, durch dasjenige, das unveränderlich gesetzt wird, mittelst eines Factors, wie ∂y durch $p\partial x$, auszudrucken. Die Relation der Differentiale zu einander muß ergeben, wie die übrigen Differentiale durch das unveränderliche mittelst einer Function von p auszudrucken sind.

71. Z. B. Es seyn x und y die rechtwinklichten Coordinaten einer Curve, s der Bogen, so ist $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$. Nimmt man ∂s zu dem constanten Differential, so setze man $\partial x = p\partial s$, oder $\frac{\partial x}{\partial s} = p$, und es ist dann $\partial y = \partial s\sqrt{(1-pp)}$, oder $\frac{\partial y}{\partial s} = \sqrt{(1-pp)}$.

72. Wenn ∂x unveränderlich, und $\partial y = p\partial x$ gesetzt wird, so ist $\partial^2 y = \partial p\partial x$. Setzt man diese Ausdrücke in eine Gleichung, worin y fehlt, so läßt sie sich durch ∂x dividiren, und es wird eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen p und x erhalten. Die Auflösung derselben giebt p durch x. Setzt man diesen Werth in die Formel $\partial y = p\partial x$, so erhält man eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y.

Oder wenn sich p nicht füglich durch x ausdrucken läßt, wohl aber x durch p, so setze man für ∂x den Werth durch ∂p und eine Function von p, so wird eine Gleichung für ∂y durch p erhalten. Kann man sowohl x als y durch p darstellen, so läßt sich aus beiden Gleichungen p herausschaffen, so daß eine endliche Gleichung zwischen x und y hervorgeht.

73. Ist y bloß in der ersten Potenz in der Gleichung vorhanden, so ist es eine brauchbare Substitution, $y = uv$ zu setzen. Dadurch ist $\partial y = u\partial v + v\partial u$, und $\partial^2 y = u\partial^2 v + 2\partial u\partial v + v\partial^2 u$. Da v und u von einander unabhängig sind, so kann man irgend eine Relation für sie annehmen, und zwar so, daß die transformirte Gleichung in zwey einzelne Gleichungen zertheilt werde, die sich besser behandeln lassen.

74. Man setze $y = e^{\int u\partial x}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so ist $\partial y = u\partial x . e^{\int u\partial x}$; $\partial^2 y = (\partial u\partial x + uu\partial x^2)e^{\int u\partial x}$. Enthält die Gleichung nur drey Glieder, in einem y, in dem andern ∂y, in dem dritten $\partial^2 y$, sie mögen übrigens aus mehrern Theilen nach x zusammengesetzt seyn, so wird sie durch diese Substitution auf eine vom ersten Grade zwischen u und x gebracht.

75. Auch die Substitution $x = e^{\int u\partial y}$ kann brauchbar seyn. Es ist $\partial x = u\partial y . e^{\int u\partial y}$. Wenn ∂x unveränderlich ist, so ist $\partial^2 x = 0$, und $0 = u\partial^2 y + \partial u\partial y + u^2\partial y^2$, also $-\partial^2 y = \frac{u^2\partial y^2 + \partial u\partial y}{u}$. Läßt sich durch diese Substitutionen für x und ∂x beides herausschaffen, so erhält man eine Gleichung vom ersten Grade zwischen u und y.

76. Die Auflösung der Differentialgleichungen ist bis jetzt noch auf gewisse Formen derselben eingeschränkt. Die

leichteste ist, wenn der Differentialquotient $\frac{\partial p}{\partial x}$ (da $p = -\frac{\partial y}{\partial x}$ ist) eine Function von x, oder von y, oder von p allein ist. Diese Differentialgleichungen nennt Euler einfache. Dann folgen die Formen, worin eine der veränderlichen Größen fehlt, wiewohl ihre Differentiale vorhanden sind. Ferner die gleichartigen Gleichungen, solche, worin die veränderlichen Größen zugleich mit ihren ersten und zweyten Differentialen in allen Gliedern gleich große Dimensionen geben. Die Gleichungen, worin eine der veränderlichen Größen nicht über die erste Dimension steigt, können schwierig seyn, mögen aber doch auf Gleichungen vom ersten Grade gebracht werden können. Die Multiplication durch einen schicklichen Factor wird besonders in schweren Fällen angewandt, wiewohl es nicht leicht ist, denselben zu finden. Umgekehrt werden auch hier die Formen der integrirbaren Gleichungen zu einem gegebenen Multiplicator gesucht. Die Auflösung durch einen Reihenausdruck kann kaum anders angewandt werden, als wo die veränderliche y, deren Werth durch x zu finden ist, bloß einfach, nicht als Potenz vorhanden ist.

Die Methoden werden durch Beyspiele am deutlichsten erhellen.

77. Es sey $a\partial y^2 = \partial^2 y$. Diese Gleichung bezieht sich auf ein ausgelassenes constantes Differential ∂x, so daß sie durch Hinzufügung desselben wird $\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$. Setzt man $\partial y = p\partial x$, und $\partial p = q\partial x$, also $\partial^2 y = q\partial x^2$, so ist $aq = p^2$. Zur Integration setzt man für q seinen Werth, so ist $a\partial p = p^2\partial x$, oder $\partial x = \frac{a\partial p}{p^2}$; folglich $x = b - \frac{a}{p}$. Nunmehr ist $\partial y = p\partial x = \frac{a\partial x}{b-x}$, also $y = a \log \frac{c}{b-x}$. Die

beiden Conſtanten, welche durch die doppelte Integration eingeführt werden, ſind b und c.

78. Behandelt man die Gleichung als eine vom erſten Grade, nachdem ſie dieſe Form, $\frac{a\partial^2 y}{\partial y} = \partial y$, erhalten hat, ſo iſt $a \log \frac{\partial y}{c\partial x} = y$, wo die Conſtante ein unveränderliches Differential $c\partial x$ iſt. Dadurch iſt $\frac{\partial y}{c\partial x} = e^{y:a}$, und $e^{-y:a}\partial y = c\partial x$. Daraus wird (Differentialformeln 15.) $-ae^{-y:a} = cx - b$, oder $e^{y:a} = \frac{a}{b-cx}$, und $\frac{y}{a} = \log \frac{a}{b-cx}$, wo die Conſtanten nur eine andere Form haben, als nach der erſten Auflöſung.

79. Es ſey $\partial y = \frac{a\partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$, wo ∂y conſtant iſt. Die Gleichung gehört für die Kettenlinie. Da $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, ſo iſt $q = -\frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$. Die Gleichung verwandelt ſich in, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -\frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$, oder $pp = -\frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$. Folglich $\partial x = -\frac{a\partial p}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, und $\partial y = -\frac{a\partial p}{p\sqrt{(1+pp)}}$. Dieſes giebt (Integralformel, 65, 53.) $x = b + \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$, und

$y = -a\log\frac{\sqrt{(1+pp)}-1}{cp}$, oder $y =$

$+a\log\frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}-1} = +a\log\frac{c[\sqrt{(1+pp)}+1]}{p}$.

Für $x=0$ sey $y=0$, und $\frac{1}{p}=0$, so ist $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$ –

oder $\sqrt{(\frac{1}{p}+1)}=1$, also $b+a=0$, und $b=-a$,

Dadurch wird $c=1$. Es ist nun $\frac{x+a}{a} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{p}$,

Daraus ist $p^2 = \frac{aa}{x^2+2ax}$; $p^2+1 = \frac{(a+x)^2}{x^2+2ax}$;

$p\partial p = -\frac{aa(x+a)\partial x}{(xx+2ax)^2}$; $\frac{\partial p}{p} = -\frac{(x+a)\partial x}{xx+2ax}$;

folglich $\frac{\partial p}{p\sqrt{(1+pp)}} = -\frac{\partial x}{\sqrt{(xx+2ax)}}$, also

$\partial y = \frac{a\partial x}{\sqrt{(xx+2ax)}}$.

80. Es sey $\partial y^2 = a\partial s\partial^2 x$, wo $\partial s = \sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$, und dieses Differential constant ist. Es bleibe $\partial y = p\partial x$, so ist $\partial s = \partial x\sqrt{(1+pp)}$. Da ∂s constant seyn soll, so ist $0 = \partial^2 x\sqrt{(1+pp)} + \frac{p\partial x\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, also ist $\partial^2 x = -\frac{q\partial x\partial y}{1+pp}$. Unsere Gleichung wird nun diese, $\partial y^2 = -\frac{aq\partial s\partial x}{1+pp}$, das ist, $pp = -\frac{aq}{\sqrt{(1+pp)}}$, welches dieselbe Gleichung zwischen den Differentialquotienten wie in (79.) ist. Die

Gleichungen für die Differentiale sind nur in der Annahme des constanten Differentials verschieden.

81. Für die zweyte Form, wo ∂s constant ist, setze man $\frac{\partial x}{\partial s} = p$, so ist $\partial y = \partial s \sqrt{(1-pp)}$. Dann sey auch $q = \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$, und unsere Gleichung ist, $(1-pp)^{\frac{3}{2}} = aq$. Setzt man für q seinen Werth durch ∂p, so ist $(1-pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{a\partial p}{\partial s} = \frac{ap\partial p}{\partial x}$, also $\partial x = \frac{ap\partial p}{(1-pp)^{3:2}}$, und $\partial y = \partial s \sqrt{(1-pp)} = \frac{\partial x \sqrt{(1-pp)}}{p} = \frac{a\partial p}{1-pp}$. Daraus ist $x = \frac{a}{\sqrt{(1-pp)}} + b$; und $y = \frac{1}{2} a \, l \frac{1+p}{1-p} + C$.

82. Es sey $y\partial^2 y = \partial y^2$, so ist mit den vorherigen Bezeichnungen, $qy = pp$. Daraus wird $y\partial p = pp\partial x$, ferner $\frac{\partial p}{p} = \frac{p\partial x}{y} = \frac{\partial y}{y}$, also durch Integration $\log. p = \log. \frac{y}{a}$, und $p = \frac{y}{a}$. Nun ist $\partial x = \frac{\partial y}{p} = \frac{a\partial y}{y}$, und daher $x = a \log. \frac{y}{b}$. Die beiden Constanten sind a und b.

83. Es sey $a^2\partial^2 y = (a-y)\partial x^2$, wo ∂x constant ist. Hier ist $a^2 q = a-y$; also $a^2 \partial p = (a-y)\partial x$, und $a^2 p \partial p = (a-y)\partial y$. Die Integration giebt $a^2 p^2 = b^2 - (a-y)^2$. Ferner $\partial x = \frac{\partial y}{p}$.

$= \frac{a\partial y}{\sqrt{(b^2-(a-y)^2)}}$. Zur Abkürzung sey $a-y=z$, so ist $\partial x=-\frac{a\partial z}{\sqrt{(bb-zz)}}$, und daraus (Integralformel, 49.) $x=c-a\,\text{Ang. sin}\,\frac{z}{b}$, oder $x=c-a\,\text{Ang. sin}\,\frac{a-y}{b}$.

84. Es sey $(a-y)^n\,\partial^n y=c\partial x^n$, und ∂x constant. Hier ist $(a-y)^n q=c$; das ist, $\partial p=\frac{c\partial x}{(a-y)^n}$. Daher $p\partial p=\frac{c\partial y}{(a-y)^n}$, und durch Integration, $p^2=b+\frac{2c}{a-y}$. Da $\partial x=\frac{\partial y}{p}$, so ist $\partial x=\frac{\partial y\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{(b(a-y)+2c)}}$. Setzt man zur Abkürzung $a-y=u$, so ist $\partial x=-\frac{u\partial u}{\sqrt{(bu^2+2cu)}}$, wovon das Integral aus Integralformel 71. gefunden wird.

Für $y=o$, sey $\frac{\partial y}{\partial x}=o$, so ist $b=-\frac{2c}{a}$, und $\partial x=\frac{(a-y)\partial y}{\sqrt{(ay-yy)}}\sqrt{\frac{a}{2c}}$. Dieser Fall kommt bey der geradlinichten Bewegung eines Körpers vor, der nach einem Mittelpuncte der Kräfte, die sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes verhalten, getrieben wird.

85. An der elastischen Linie ist der Halbmesser der Krümmung umgekehrt proportional der Abscissenlinie, dem Abstande eines Punctes der Curve von der Richtung des

krümmenden Gewichts. Der Halbmesser der Krümmung ist allgemein $= -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ wo die Negation anzeigt, daß die Concavität nach der Abscissenlinie hin gekehrt ist. Es ist $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$. Die Gleichung für die Elastica ist nun $x = -\frac{aaq}{(1+pp)^{3:2}}$, wo der Factor aa dient, der Abscisse x einen absoluten Werth zu geben. Um bey der Integration Brüche zu vermeiden, setze man $\frac{1}{2}aa$ statt aa, so ist $2x = -\frac{aaq}{(1+pp)^{3:2}}$. Für q dessen Werth gesetzt, wird $-2x\partial x = \frac{aa\partial p}{(1+pp)^{3:2}}$. Daraus ist $cc - xx = \frac{aap}{\sqrt{(1+pp)}}$, und hieraus $p^2 = \frac{(cc-xx)^2}{a^4-(cc-xx)^2}$. Da $\partial y = p\partial x$ ist, so ist $\partial y = \frac{(cc-xx)\partial x}{\sqrt{(a^4-(cc-xx)^2)}}$. Die Constante c ist die Abscisse für den Punct, wo $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, oder die berührende horizontal ist.

86. Man sieht aus diesen Beyspielen, wie man zu verfahren hat, wenn in einer Differentialgleichung vom zweyten Grade die eine der veränderlichen Größen fehlt. Nachdem eine Gleichung, worin y nicht vorhanden ist, auf eine zwischen den Differentialquotienten p und q nebst der veränderlichen x gebracht ist, setze man statt q dessen Werth $\frac{\partial p}{\partial x}$, so hat man eine Differentialgleichung vom ersten

Grade zwischen x und p. Aus dieser suche man den Werth von x durch p, oder den von p durch x. In dem erstern Falle sey $p = X$, einer Function von x, und es ist $y = \int X \partial x + C$. In dem andern Falle sey $x = P$, einer Function von p, so ist $\partial y = p \partial x = p \partial P$, und $y = Pp - \int P \partial p$. Kann weder x durch p, noch p durch x ausgedruckt werden, so muß man suchen, ob sich nicht beide durch eine neue veränderliche Größe u ausdrucken lassen, so daß $x = U$, und $p = U'$ sey. Dadurch wird $y = \int U' \partial U$.

87. Wenn in einer Differentialgleichung x fehlt, so setze man in der Gleichung zwischen y, p und q für q dessen Werth $\frac{p \partial p}{dy}$, der aus den beiden Werthen, $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, und $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, hergeleitet wird. Dadurch entsteht eine Gleichung zwischen y und p. Nun sey $y = P$, einer Function von p, so ist $\partial x = \frac{\partial P}{p}$, also $x = \int \frac{\partial P}{p} = \frac{P}{p} + \int \frac{P \partial p}{pp}$. Oder es sey $p = Y$, einer Function von y, so ist $x = \int \frac{\partial y}{Y}$. Läßt sich weder das eine noch das andere erhalten, so muß man eine neue veränderliche u suchen, wodurch p und y sich ausdrücken lassen.

89. Es sey $\partial s^2 \partial^2 y = X \partial x^4$, wo X eine Function von x ist. Das Differential ∂s sey constant. Es sey $\partial y = p \partial x$, so ist $\partial s = \frac{\partial y \sqrt{(1 + pp)}}{p}$. Da $\partial^2 s = 0$ ist, so ist $\partial^2 y = \frac{\partial p \partial y}{p(1 + pp)}$, und $\partial s^2 \partial^2 y = \frac{\partial p \partial y^2}{p^3}$. Folglich ist $\partial p = X \partial x$, und $p = \int X \partial x + A$.

Nun iſt $\partial y = p\partial x = \partial x \int X \partial x + A\partial x$, alſo

$$y = \int \partial x \int X \partial x + Ax + B.$$

Die Conſtanten ſind A und B.

90. Eine gleichartige (homogene) Diff rentialgleichung vom zweyten Grade heißt diejeni worin die veränderlichen Größen, x und y, mit den D ferentialen ∂x, ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ in allen Gliedern d ſelbe Anzahl von Dimenſionen geben, wie in der Gleichu $x^2\partial^2 y + x\partial x^2 + y\partial y^2 = o$. Es iſt eben eine ſolc Gattung, wie die homogenen Gleichungen vom erſten Gr de (3), wo man aber nicht nöthig hatte, auf die Dif rentiale ∂x, ∂y zu achten, um die Anzahl der Dimenſi nen in den Gliedern zu beſtimmen.

91. Es ſey wie bisher, $\partial y = p\partial x$, $\partial p = q\partial$ und ∂x conſtant, ſo iſt $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es iſt alſo p ei Größe von der Dimenſion Null, und q von der Dimenſi -1. Die Gleichung werde auf die endliche (M) zw ſchen x, y, p, q gebracht, ſo iſt dieſe in Beziehung a dieſe Größen, gleichartig, und durch die Subſtitution $y = ux$, und $q = \frac{v}{x}$, erhalten alle Glieder dieſelbe Pot von x, die alſo aus der Gleichung herausgeht, ſo daß eine G chung (N) zwiſchen den drey Größen u, v, p, hervorgeht. $\partial y = p\partial x$ iſt, ſo iſt $u\partial x + x\partial u = p\partial x$, und daher $= \frac{\partial u}{p-u}$. Da ferner $\partial p = q\partial x$ iſt, ſo iſt $\partial p = \frac{v\partial x}{x}$, $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial p}{v}$. Folglich iſt $\frac{\partial u}{p-u} = \frac{\partial p}{v}$, oder $v\partial u = p - u\partial p$, (O). Kann man nun aus der Gleichung (die Größe v durch p und u ausdrucken, ſo wird durch

Subſtitution dieſes Werthes von v in (O) eine Differentialgleichung des erſten Grades zwiſchen p und u erhalten. Kann aus dieſer p durch u dargeſtellt werden, ſo iſt die Gleichung, $\frac{\partial x}{x} = \frac{du}{p-u}$, eine geſonderte zwiſchen x und u, ſo daß daraus ſich x durch u ergiebt. Die Gleichung $y = ux$ liefert daher y durch u. Oder man ſetzt in dem Integral, $\int \frac{\partial u}{p-u}$, für u den Werth $\frac{y}{x}$, ſo entſteht eine Gleichung zwiſchen x und y.

92. Exempel. Es ſey $x^2 \partial^2 y = x \partial x \partial y + n y \partial x^2$. Durch die Subſtitutionen, $\partial y = p \partial x$, und $\partial p = q \partial x$, entſteht die Gleichung, $q x x = p x + n y$.

Durch die Subſtitutionen, $y = ux$; $q = \frac{v}{x}$, entſteht die Gleichung, $v = p + n u$,

Die Gleichung (O) in (91.) wird nun durch die Subſtitution des Werthes von v,

$$p \partial u + n u \partial u = p \partial p - u \partial p,$$

oder $$n u \partial u + p \partial u + u \partial p = p \partial p,$$

wovon die Integrale iſt,

$$C + n u u + 2 p u = p p.$$

Daraus iſt $p = u \pm \sqrt{(C + (n+1) u u)}$.

Nun iſt $$\frac{\partial x}{x} = \frac{\pm \partial u}{\sqrt{(C + (n+1) u u)}},$$

oder, wenn $n + 1 = m m$ geſetzt, und das Vorzeichen unbeſtimmt gelaſſen wird,

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{\sqrt{(C + m m u u)}},$$

Die Integration giebt (Integralformel. 50.)

$$\log. x = \frac{1}{m} \log. \frac{mu + \sqrt{(C + mmuu)}}{D},$$

das ist

$$Dx^m = mu + \sqrt{(C + mmuu)}.$$

Hieraus ist, da $y = ux$ ist,

$$Dy^m = mu^{m+1} + u^m \sqrt{(C + mmuu)}.$$

Wenn $n + 1$ eine negative Zahl, $-mm$, ist, so ist $\log x$ ein Winkel.

93. In der Differentialgleichung,

$$\partial\partial y + P\partial x\partial y + Qy\partial x^2 = 0,$$

sind P und Q Functionen von x, und das Differential ∂x ist constant, es soll diese auf eine Gleichung vom ersten Grade gebracht werden.

Man setze $y = e^{\int u \partial x}$, so ist (Differentialformel, 14.), $\partial y = u\partial x . e^{\int u\partial x}$, und $\partial^2 y = (\partial u \partial x + u^2 \partial x^2) e^{\int u \partial x}$, daher die reducirte Gleichung,

$$\partial u + uu\partial x + Pu\partial x + Q\partial x = 0.$$

Ist hieraus u durch x gefunden, so ist das Integral, $\int u \partial x$, zu suchen. Durch dieses ist $\log y = \int u \partial x$, als die Gleichung zwischen x und y.

94. Die Differentialgleichung,

$$\partial^2 y + P\partial y\partial x + Qy\partial x^2 = X\partial x^2,$$

worin P, Q, X Functionen von x sind, und ∂x constant genommen wird, auf eine Gleichung vom ersten Grade zu bringen.

Man setze $y = uv$, so wird die Gleichung diese:

$$u\partial^2 v + 2\partial u\partial v + v\partial^2 u + Pu\partial x\partial v + Pv\partial x\partial u + Quv\partial x^2 = X\partial x^2.$$

Hieraus mache man zwey Gleichungen,

I. $\partial^2 v + P\partial x\partial v + Qv\partial x^2 = 0.$

II. $2\partial u\partial v + v\partial^2 u + Pv\partial x\partial u = X\partial x^2.$

Die erstere wird nach (93) integrirt, und daraus v durch x gegeben. In der zweyten setze man $\partial u = s\partial x$, so ist

III. $v\partial s + 2s\partial v + Psv\partial x = X\partial x$.

Diese Gleichung wird durch die Multiplication mit $ve^{\int P\partial x}$ integrirbar, so daß die Integrale wird

IV. $vvse^{\int P\partial x} = \int e^{\int P\partial x} \int Xv\partial x$,

wo v eine aus I. gefundene Function von x ist. Hieraus wird nun s durch x gefunden, und daraus u auch durch x mittelst der Integration der Gleichung, $\partial u = s\partial x$. Da nun u und v durch x gegeben werden, so ist auch $y = uv$ durch x erfindbar.

Diese verwickelten Operationen können große Schwierigkeit machen, wenn die eingeführten Größen nicht anders als durch Reihen sich darstellen lassen.

Euler hat sich früh mit der Auflösung dieser Gleichung beschäftiget, in den ältern Petersburger Commentarien T. X. Ihre Auflösung durch Reihen hat er in der Integralrechnung gewiesen. T. II. Cap. VII. VIII. Einen besondern Fall hat er hernach in den neuen Petersburger Commentarien, T. XVII. 1773, betrachtet, und in einer handschriftlich nachgelassenen, (in der neuen Ausgabe der J. R. T. IV. p. 533) die Fälle zu finden gelehrt, in welchen die Gleichung, $(1 - axx)\,\partial^2 y - bx\partial x\partial y - cy\partial x^2 = 0$, integrirbar ist. Sehr ausführlich hat Pfaff die Gleichung, $x^\alpha(a + bx^n)\,d^2y + x^\beta(c + ex^n)\,\partial y\partial x + (f + gx^n)\,y\partial x^2 = X\partial x^2$, behandelt, und die Fälle der Integrabilität herausgesucht. Disquisitiones analyticae, p. 135 bis 224. In den Abhandlungen der Societät zu Verona, T. II. P. I. ist eine hieher gehörige Abhandlung von Lorgna enthalten.

95. Leichter ist der Fall, wenn

$$\partial^2 y + Qy\partial x^2 = X\partial x^2$$

ist. Hier ist, wenn wiederum $y = uv$ gesetzt wird,

I. $\partial^2 v + Qv\partial x^2 = 0$.

II. $2\partial u\partial v + v\partial^2 u = X\partial x^2$.

III. $v\partial s + 2s\partial v = X\partial x$.

Die letztere multiplicire man mit v, als einer Function von x, so ist die Integrale

IV. $vvs = \int Xv\partial x$.

Also ist

$$s = \frac{\int Xv\partial x}{vv}; \quad u = \int \frac{\partial x}{vv}\int Xv\partial x; \quad y = v\int \frac{\partial x}{vv}\int Xv\partial x.$$

96. Diese Gleichungen gehören zu den sogenannten linearischen. In besondern Fällen wird man die Auflösung leichter machen, wenn man einen integrirenden Factor sucht, wie in dem folgenden Beyspiele, welches in der Untersuchung über die Perturbationen des elliptischen Laufes der Planeten brauchbar ist.

97. Es sey $\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} + m^2 y = a + b \operatorname{cof} \varphi$,

wo ω und φ Winkel sind, die so von einander abhangen, daß $\partial\varphi = n\partial\omega$ ist, wobey $\partial\omega$ constant gesetzt wird.

Sie werde zuerst mit $\sin m\omega . \partial\omega$ multiplicirt, so wird durch die Integration,

$$\sin m\omega . \frac{\partial y}{\partial \omega} - my \operatorname{cof} m\omega =$$

$$-\frac{a}{m}\operatorname{cof} m\omega - \frac{b}{2(n+m)}\operatorname{cof}(\varphi + m\omega) + \frac{b}{2(n-m)}\operatorname{cof}(\varphi - m\omega) + A.$$

Ferner werde sie mit $\operatorname{cof} m\omega . \partial\omega$ multiplicirt, so wird durch die Integration,

$$\operatorname{cof} m\omega . \frac{\partial y}{\partial \omega} + my \sin m\omega =$$

$$+\frac{a}{m}\sin m\omega+\frac{b}{2(n+m)}\sin(\varphi+m\omega)$$
$$+\frac{b}{2(n-m)}\sin(\varphi-m\omega)+B.$$

Es ſind A und B die durch die Integration eingeführten Conſtanten.

Die erſtere Gleichung werde mit $\cos m\omega$, die andere mit $\sin m\omega$ multiplicirt, ſo entſteht durch Subtraction der erſtern von der zweyten

$$my=\frac{a}{m}+\frac{mb}{mm-nn}\cos\varphi-A\cos m\omega$$
$$+B\sin m\omega,$$

wo das zweyte Glied des zweyten Theils durch Zuſammenziehung der Glieder $+\frac{b\cos\varphi}{2(n+m)}-\frac{b\cos\varphi}{2(n-m)}$, entſtanden iſt. Die beiden Glieder, $A\cos m\omega-B\sin m\omega$, kann man bequem in ein einziges vereinigen, $D\cos(\eta+m\omega)$. Denn es iſt $D\cos(\eta+m\omega)=D\cos\eta\,.\cos m\omega-D\sin\eta\,.\sin m\omega$. Iſt nun $D\cos\eta=A$; $D\sin\eta=B$, ſo iſt

$$y=\frac{a}{mm}+\frac{b}{mm-nn}\cos\varphi-D\cos(\eta+m\omega),$$

wo ſtatt $\frac{D}{m}$ geſetzt iſt $\mathfrak{D}$, da eines ſo gut wie das andere eine Conſtante bedeutet. Das Integral iſt vollſtändig, weil zwey Conſtanten D und η hineingekommen ſind.

Wenn der zweyte Theil der vorgegebenen Gleichung mehrere Glieder wie $b\cos\varphi$ erhält, ſo wird für jedes derſelben in dem Werthe von y ein Theil, wie

$$\frac{b}{mm-nn}\cos\varphi-D\cos(\eta+m\omega),$$ erhalten, wo n

und die beiden Constanten die zu jedem der durch Φ allgemein bezeichneten Winkel gehörigen Größen sind.

98. Als Beyspiel, ein System von Differentialgleichungen des zweyten Grades zu integriren, diene folgendes, welches aus einem Aufsatze von Gauß über die Abweichung fallender Körper von der lothrechten, in Benzenbergs Versuchen über die Umdrehung der Erde, 1804. S. 369. genommen ist, wo aber nur bloß die Integralen ohne die Analysis beygefügt sind. Es ist

$$\text{I.}\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2na\frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2na.\frac{\partial x}{\partial t} + 2nb.\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2nb.\frac{\partial y}{\partial t} + g = 0.$$

Das Differential ∂t ist unveränderlich gesetzt. Es ist $a = \sin\alpha$; $b = \cos\alpha$, daher $aa + bb = 1$.

Aus I. ist

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial x}{\partial t} - 2nay + A = 0.$$

Aus III. ist

$$\text{V.}\quad \frac{\partial z}{\partial t} - 2nby + gt + B = 0.$$

Dadurch wird aus II. die Gleichung

$$\text{VI.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4nn(aa+bb)y - 2nbgt - 2n(Aa+Bb) = 0.$$

Da $aa + bb = 1$ ist, so ist

$$\text{VII.}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4nny - 2nbgt - 2n(Aa+Bb) = 0.$$

Dieſe Gleichung werde mit $\sin 2nt \cdot dt$ multiplicirt, ſo wird durch Integration wie in (97.) erhalten

VIII. $$\sin 2nt \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - 2ny\cos 2nt + bgt\cos 2nt - \frac{bg}{2n}\sin 2nt + (Aa+Bb)\cos 2nt + C = o.$$

Dieſelbe Gleichung werde mit $\cos 2nt \cdot \partial t$ multiplicirt, und dann integrirt, ſo iſt

IX. $$\cos 2nt \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + 2ny\sin 2nt - bgt\sin 2nt - \frac{bg}{2n}\cos 2nt - (Aa+Bb)\sin 2nt + D = o.$$

Dieſe Gleichungen wie in (97.) combinirt geben

X. $$2ny = bgt + C\cos 2nt - D\sin 2nt + Aa + Bb = o,$$

oder

XI. $$2ny = bgt - E\sin(2nt - \mathfrak{A}) + Aa + Bb.$$

Nun werden die beiden andern veränderlichen, x und z, leicht gefunden. Aus IV. iſt

XII. $$x = \tfrac{1}{2}abgt^2 - (Ab^2 - Bab)t + \frac{Ea}{2n}\cos(\mathfrak{A}2nt) + F;$$

und aus V.

XIII. $$z = G + \frac{Eb}{2n}\cos(2nt - \mathfrak{A}) - \tfrac{1}{2}a^2gt^2 + (Aab - Ba^2)t.$$

Die Conſtanten zu beſtimmen, müſſen die Werthe von

$\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, x, y, z für $t = o$ bekannt seyn, oder angenommen werden.

99. Man bemerke an dem Beyspiele (97.), daß durch die erste Integration zwey vollständige Differentialgleichungen vom ersten Grade gefunden sind, durch deren Verbindung, ohne nochmahlige Integration, die endliche Gleichung gefunden wird. Allgemein hat jede Differentialgleichung vom zweyten Grade zwey Differentialgleichungen des ersten Grades zu ihren Integralen. Man bezeichne eine endliche Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y durch $M = o$; ihre erste Differentialgleichung durch $P = o$, ihre zweyte durch $Q = o$. Sind in den beiden Differentialgleichungen noch die willkürlichen Constanten, A und B, enthalten, wie es in dem Beyspiele (97.) der Fall ist, so lassen sie sich durch Verbindung derselben mit der Gleichung $M = o$ herausschaffen. Es entsteht nun eine Differentialgleichung vom zweyten Grade, $V = o$, die von den willkührlichen Größen unabhängig ist, wie sie es seyn muß. Ferner leite man aus den beiden Gleichungen, $M = o$, und $P = o$, durch Elimination der einen und der andern Constante zwey Differentialgleichungen ersten Grades, $R = o$, $S = o$, her, in deren erstezer bloß A, in der andern bloß B enthalten sey. Durch die Differentiation beider erhält man eine und dieselbe Differentialgleichung des zweyten Grades, weil in dieser die Constanten fehlen, das ist, diejenigen Größen, welche auf die Differentialquotienten vom zweyten Grade keinen Einfluß haben. Sie ist also mit der $V = o$ einerley. Diese hat folglich zwey Differentialgleichungen vom ersten Grade zu Integralen.

Ueberhaupt hat eine Differentialgleichung vom nten Grade n vollständige Differentialgleichungen vom $(n-1)$ten Grade zu Integralen, vermittelst deren es bisweilen möglich seyn wird, die endliche vollständige In-

tegralgleichung zu finden. Fontana hat zuerſt dieſe Bemerkung gemacht. Cousin traité de calcul diff. et int. T. I. nr. 262.

100. Die Unterſuchung, wie Differentialgleichungen vom zweyten Grade durch Zufügung eines Factors integrirbar werden, und die Beſtimmung der Relationen zwiſchen den Functionen der veränderlichen Größen in einer Differentialgleichung und einem Factor von gewiſſer Form, damit jene durch dieſen integrirbar werde, ſind ſo verwickelt, daß ſie ſich nicht mehr für das gegenwärtige Werk eignen. Man ſehe Eulers Integralrechnung, T. II. Sect. I. Cap. V. VI. Wegen der Integrationen durch Reihen muß ich ebenfalls auf dieſes Werk verweiſen. In der neuen Ausgabe ſind noch zwey handſchriftlich hinterlaſſene Abhandlungen über die Differentialgleichungen vom zweyten Grade hinzugekommen.

101. Die Integration der Differentialgleichungen, die noch über den zweyten Grad hinausgehen, ſind begreiflich noch viel ſchwieriger, daher ich ſie hier ganz übergehe. Diejenigen, welche ſie anzuwenden haben, werden wiſſen, ſich darüber Belehrungen zu verſchaffen. Die Quellen hat la Croix in dem Verzeichniſſe vor dem zweyten Theile ſeines Werks angezeigt. D'Alembert in den Mém. de l'Acad. de Berlin 1748; de l'Acad. de Paris, 1767 u. 1769; Miſcell. Taurinenſia, T. III. la Grange in Mém. de l'Acad. de Berlin, 1775; Miſc. Taurin. T. III. la Place in den Miſc. Taur. T. IV. Lexell in den Act. Ac. Petr 1777 u. 1779. Lorgna in den Mem. della Soc. Italiana, T. II. In Eulers Integralrechnung iſt der zweyte Abſchnitt des zweyten Theils dieſer Unterſuchung gewidmet. Dazu kommen noch in der neuen Ausgabe zwey handſchriftlich hinterlaſſene Aufſätze.

102. Die Integration der Differentialgleichungen mit drey veränderlichen Größen, verſpare ich zu dem Artikel, Partielle Differentiale, wo ſich mehr Raum zu An

wendungen dieſer Rechnung finden wird. Die Variationsrechnung an ihrem Orte.

Interpolation, ſ. Einſchalten.

Interſcendens, ein Kunſtwort, wodurch Potenzen mit irrationalen Exponenten von Einigen bezeichnet ſind, z. B. $z^{\sqrt{2}}$. Leibniz nannte auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten interſcendentia. Opp. T. III. p. 167. Die Curven, in deren Gleichungen Potenzen der veränderlichen Größen mit irrationalen Exponenten vorkommen, nannte Leibniz interſcendentes, weil ſie gleichſam zwiſchen den algebraiſchen und transſcendenten in der Mitte ſind.

Inverſa methodus tangentium, umgekehrte Methode der Berührenden, iſt das Verfahren aus gegebenen Eigenſchaften der Berührenden an einer Curve oder der Normalen die Gleichung für die Curve zu finden. Die directe Methode beſtimmt aus der Gleichung für jeden Punct der Curve die Lage der Berührenden.

Z. B. die Curve zu finden, an welcher die Subtangente $= \frac{yy}{a+x}$ iſt. Da der allgemeine Ausdruck für die Subtangente iſt $\frac{y\partial x}{\partial y}$ (Berührende Linie, 13), ſo iſt $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{yy}{a+x}$; alſo $(a+x)\partial x = y\partial y$. Daher $ax + \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, oder $2ax + xx = yy$, wenn die Conſtante $= o$ geſetzt wird. Dieſes iſt die Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel, wenn die Abſciſſen auf der Hauptaxe vom Scheitel an genommen werden.

Da die Gleichung durch Integration gefunden wird, ſo hat man auch bisweilen die Integralrechnung ſelbſt die

umgekehrte Methode der Berührenden genannt. Doch iſt es beſſer, die Benennung auf das erklärte Verfahren einzuſchränken. Die Beauniſche Aufgabe war die erſte dieſer Art.

Inverſe bezeichnet bey Proportionen, daß die zuſammengehörigen Größen in ungleichnamigen Gliedern zu ſtehen kommen. Z. B. bey gleichen Kreisbogen verhalten ſich die zugehörigen Winkel inverſe wie die Halbmeſſer. Sind die Halbmeſſer R, r, die Winkel W, w, ſo iſt R : r = w : W. Bey der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe kommen die Glieder derjenigen einzelnen Verhältniſſe, in welchen dieſe entgegengeſetzte Stellung Statt hat, entweder als Factoren in einer ſolchen Stellung, oder als Diviſoren in dasjenige Glied, welches demjenigen gleichnamig iſt, worin ſich die zugehörige Größe befindet. Z. B. der räumliche Inhalt zweyer Körper verhält ſich directe wie das Gewicht und inverſe wie die Dichtigkeit. Sind die Räume R, r, die Gewichte G, g, die Dichtigkeiten D, d, ſo iſt

$$R : r = G \cdot d : g \cdot D, \text{ oder } R : r = \frac{G}{D} : \frac{g}{d}.$$

Inverſio eines Verhältniſſes iſt nach Einigen der lateiniſche Ausdruck für das was Euklides ἀναστροφὴ λογου nennt, die Vergleichung des Vordergliedes mit dem Ueberſchuſſe deſſelben über das Hinterglied. Andere nennen es converſio. Lorenz nennt dieſes Verhältniß ein zurückkehrendes.

Involute nennen einige die Curve, welche durch die Abwickelung einer andern erzeugt wird. Der Ausdruck iſt nicht ſchicklich. Beſſer wird man ſie die evolvirende nennen.

Involution heißt zuweilen die Erhebung auf eine Potenz. Man könnte auch die Verwandlung eines

Aggregats in ein Product aus zwey oder mehr Factoren eine Involution nennen, so wie man die entgegengesetzte Operation eine Evolution nennt. Eine neue merkwürdige Art von Involution ist die von Hindenburg angegebene combinatorische, s. Combination, 39.

Irrational ist ein Verhältnißbegriff, für Größen, deren eine nicht aus gleichen Theilen der andern zusammengesetzt werden kann, wie die Diagonale eines Quadrats oder Würfels in Beziehung auf die Seite jenes oder dieses. Wenn eine Größe schlechtweg irrational heißt, so ist dieses in Beziehung auf die Einheit zu verstehen. So sind die Quadratwurzeln aller ganzen Zahlen, die sich nicht unter den ganzen Zahlen finden, irrationale Zahlen. Ein irrationales Verhältniß ist zwischen Größen, für welche kein gemeinschaftliches Maaß Statt hat.

Die Arithmetik der Irrationalgrößen hat zum Gegenstande die Vergleichung der verschiedenen Gattungen dieser Größen, und der aus solchen und rationalen zusammengesetzten. Euklides hat vielen Fleiß darauf gewandt. Das zehnte Buch seiner Anfangsgründe handelt ganz davon, und enthält 117 Sätze. Er nennt Größen incommensurabel (ἀσυμμετρα), für welche sich gar kein gemeinschaftliches Maaß finden läßt, nennt aber gerade Linien, deren Quadrate mit dem von einer angenommenen Linie commensurabel sind, ob sie gleich selbst es nicht sind, rational (ῥηταὶ), gleich denen, die der Länge nach mit jener commensurabel sind, und solche, deren Quadrate mit dem Quadrate der angenommenen Linie nicht commensurabel sind, irrationale (ἄλογοι). Ein Raum, der mit dem Quadrate der angenommenen Linie (der Vergleichungs-Linie) incommensurabel ist, heißt irrational. Unter Potenz (Vermögen, δυναμις) versteht Euklides bloß Quadrate, und daher bedeutet der Ausdruck, eine gerade Linie vermag oder potenzirt (δυναται) einen Raum das Quadrat dieser Linie ist dem Raume gleich.

Der eigentliche Gegenstand der Euklidischen Abhandlung sind gewisse Formen der irrationalen Größen, das Wort in unserer, Anfangs erklärten Bedeutung genommen. Euklides hat für sie eigene Kunstbenennungen. Die Erklärungen derselben mittelst der Bezeichnungen unserer Buchstabenrechnung werden für diejenigen nützlich seyn, welche die Euklidische Methode studieren wollen. Junge Analysten werden wohl thun, sich mit ihr bekannt zu machen, um den Sachen eine andere Ansicht abzugewinnen. Die Buchstaben a, b, c, bedeuten gerade Linien, deren Verhältnisse rational sind, m, n, p, rationale, ganze oder gebrochene Zahlen, $\sqrt[4]{m}$, $\sqrt[3]{m}$, u. dergl. irrationale Wurzeln.

I. Die Linie, welche das Rechteck von den beiden Linien $a\sqrt{m}$ und $b\sqrt{n}$ potenzirt, oder $\sqrt{ab.\sqrt[4]{mn}}$, heißt eine Mediale (μεση). (22. Satz.)

Ein mediales Rechteck hat die Form $ab\sqrt{m}$, oder $ab\sqrt{mn}$. Dieses zeigt Euklides nicht ausdrücklich an; allein es erhellt aus seinen Beweisen. So nennt er (S. 25.) das Rechteck mit den Seiten $a\sqrt[4]{m}$ und $b\sqrt[4]{m}$ medial, und (S. 26.) so das Rechteck mit den Seiten $a\sqrt[3]{mm^2}$ und $b\sqrt[4]{mp^2}$.

II. Die Zusammengesetzte, $a\sqrt{m}+b\sqrt{n}$, heißt eine Binomiale, oder ein Binomium (ἡ ἐκ δυο ὀνοματων). Statt einer der Wurzeln mag auch eine rationale Zahl stehen. S. 37. Euklides unterscheidet zwey Gattungen, jede mit drey Arten der Binomialen, wovon in dem Artikel, Binomium, Nachricht ertheilt ist. Das Quadrat der Binomiale ist $=ma^2+nb^2+2ab\sqrt{mn}$.

III. Die Zusammengesetzte, $a\sqrt[4]{m}+b\sqrt[4]{\frac{1}{m}}$,

heißt die erſte Bimediale. Das Quadrat derſelben iſt $= (ma^2 + b^2)\sqrt{\frac{1}{m}} + 2ab$.

IV. Die zuſammengeſetzte, $a\sqrt{m} + b\sqrt{\frac{n^2}{m}}$, heißt die zweyte Bimediale. Das Quadrat derſelben iſt $= (ma^2 + nb^2)\sqrt{\frac{1}{m}} + 2ab\sqrt{n}$.

V. Die Zuſammengeſetzte, $\sqrt{(aa + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa - ac\sqrt{n})}$, heißt die größere Irrationale. Es iſt $nc^2 = a^2 - mb^2$, wodurch das Rechteck beider Theile ein Mediales wird. Das Quadrat der ganzen iſt $= 2aa + 2ab\sqrt{m}$.

VI. Die Zuſammengeſetzte, $\sqrt{(aa\sqrt{m} + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa\sqrt{m} = ac\sqrt{n})}$, heißt die ein Rationales und Mediales potenzirende (ρητον και μεσον δυναμενη). Es iſt $nc^2 = ma^2 - b^2$. Das Quadrat der ganzen iſt $2aa\sqrt{m} + 2ab$.

VII. Die Zuſammengeſetzte, $\sqrt{(aa\sqrt{m} + ac\sqrt{n})} + \sqrt{(aa\sqrt{m} - ac\sqrt{n})}$, heißt die zwey Mediale potenzirende, wenn $nc^2 = ma^2 - pb^2$, wodurch das Quadrat der ganzen $= 2aa\sqrt{m} + 2ab\sqrt{p}$ iſt.

VIII. Der Unterſchied $a\sqrt{m} - b\sqrt{n}$ heißt eine Apotome. Davon ſind zwey Gattungen, jede mit drey Arten, ſ. Apotme.

IX. Hier bildet Euklides ebenfalls fünf Irrationalgrößen, wie die in III. bis VII., worin der zweyte Theil ſubtractiv iſt. Er nennt ſie die erſte und die zweyte Medialapotome: die kleinere Irrationale; die

mit einem Rationalen ein Mediales ausmachende; die mit einem Medialen ein Mediales ausmachende.

Euklides zeigt (S. 55-60) daß die sechs Binomialen zur Wurzel eine der von II. bis VII. genannten Irrationalen haben. Er zerlegt nämlich das Rechteck von einer dieser Binomialen und einer Rationallinie in zwey Quadrate und in zwey Rechtecke, deren Seiten die Seiten dieser Quadrate sind, eben so wie man durch Rechnung zeigt, daß $\sqrt{(a\sqrt{m}+b\sqrt{n})} = A+B\sqrt{mn}$ ist. Eben das zeigt er von den sechs Apotomen (S. 92-97). Diese Untersuchungen hängen mit der Lehre von den Wurzeln quadratischer Gleichungen zusammen, die Euklides durch geometrische Constructionen sehr gut zu finden wußte. Man sehe die beiden Aufgaben in B. VI. S. 28. 29. Die Zerlegung eines Rechtecks, worin eine Seite eine Binomiale, die andere eine Rationallinie ist, führt in drey Fällen durch die Rechnung auf biquadratische Gleichungen, die aber einer quadratischen gleichgültig sind. Die Wurzeln sind die in V., VI., VII. angegebenen Theile der binomischen Irrationalen.

Hier noch der Beweis, den Euklides X. 27 führt, daß $a\sqrt{m}-b\sqrt{n}$ nicht rational seyn kann, nur in unsern Symbolen ausgedruckt.

Es sey, wenn es möglich ist, $a\sqrt{m}-b\sqrt{n}=c$ rational. Also wären nb^2 und $2bc\sqrt{n}$ incommensurabel. Da nb^2 mit nb^2+c^2 commensurabel ist, so ist nb^2+c^2 mit $2bc\sqrt{n}$ nicht commensurabel, also auch $nb^2+c^2+2bc\sqrt{n}$ oder $(b\sqrt{n}+c)^2$ nicht mit nb^2+c^2; folglich wäre, da $a\sqrt{m}=c+b\sqrt{n}$ ist, ma^2 mit nb^2+c incommensurabel, welches es doch nicht ist, daher muß c irrational seyn.

Algebraischer Commentar über das zehnte Buch der Elemente des Euklides, von Meyer Hirsch. Berlin 1794. 3 Bog. 8. An ein paar Stellen mag der Sinn verfehlt seyn; übrigens brauchbar.

In dem Artikel, Gleichung 223. ist wegen Fermats Methode, irrationale complexe Grössen aus einer Gleichung wegzuschaffen, auf den gegenwärtigen Artikel verwiesen worden. Hier ist das Beyspiel, wodurch Fermat seine Vorschrift erläutert hat. Die Gleichung sey

$$\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} + \sqrt{(bc + c^2)} = b.$$

Man setze $\sqrt{(bc + c^2)} = d$, so ist

$$\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} = b - d, \text{ und daher}$$

$$a^2 b + b^3 = b^3 - 3 b^2 d + 3 b d^2 - d^3.$$

Hier muß man suchen, die eingeführte d auf die erste Potenz herab zu bringen. Da $d^2 = bc + c^2$ ist, so multiplicire man die Theile der zuletzt erhaltenen Gleichung den einen mit d^2, den andern mit $bc + c^2$, so ist, nach gehöriger Reduction, nebst Division durch d,

$$3 b^2 c + 3 b^2 c^2 = (3 b^2 c + 3 b c^2 - a^2 b) d - (bc + c^2) b^2.$$

Den ersten Theil dieser Gleichung multiplicire man mit d^2, den andern mit $bc + c^2$, und dividire alles durch d, so erhält man eine Gleichung für d in der ersten Potenz, also den Werth von d. Setzt man diesen in der Gleichung $\sqrt[3]{(a^2 b + b^3)} + d = b$, oder in $a^2 b + b^3 = (b - d)^3$ so erhält man die vorgegebene Gleichung von ihren irrationalen Ausdrücken befreyt.

Auf gleiche Art hätte man zu verfahren, wenn mehr als zwey irrationale Wurzelgrößen in einer Gleichung vorhanden sind. Die Rechnung wird aber beschwerlich, und Fälle von solcher Art kommen kaum vor. Die schwierigen Fälle in der Mathematik und ihrer Anwendung sind die,

wo transſcendente Größen von anderer Art als Winkel- und logarithmiſche Functionen vorkommen, und wo Reihen zu entwickeln und mit einander zu verbinden ſind, zugleich unter der Bedingung der Convergenz.

Fermat gab Descartes und andern Analyſten die Elimination der Irrationalitäten in folgendem Beyſpiele auf, welches ich mit der jetzt gewöhnlichen Bezeichnung ſchreibe:

$$\sqrt{(ab-aa)}+\sqrt{(aa+ad+zz)}$$
$$+\sqrt{ma}+\sqrt{(dd-aa)}-\sqrt{(ar+aa)}=ab.$$

Man ſehe Carteſii epiſt. T. III. p. 266. Descartes ſahe die Aufgabe als ſehr leicht an, worin er ſich aber gar ſehr irrte. Genty in ſeiner Preisſchrift über Fermat berechnet, daß durch die ſucceſſiven Erhebungen 359026206 Termini entſtehen würden.

In einzelnen Fällen kann die Wegſchaffung der Irrationalgrößen leicht ſeyn. Z. B. Es ſey

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0.$$

Aus combinatoriſcher Analyſis (53.) iſt, wenn daſelbſt ſtatt a, b, c hier die Wurzeln geſetzt werden, da $A=0$ genommen iſt, und D wegfällt, die vierte Formel, $S=2B^2$, das iſt,

$$a^2+b^2+c^2=2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})^2$$
$$=2(ab+ac+bc)+4(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{abc};$$

folglich

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+ac+bc).$$

Es ſey $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$, ſo iſt in der angeführten Formel für dieſen Fall $S=2B^2-4D$. Man ſchreibe für die Wurzelgrößen die einfachen Zeichen, α, β, γ, δ, etc. wenn ihrer nämlich auch mehr als vier ſind, bezeichne die Summen der verſchiedenen Combina-

tionen durch das vorgesetzte f. (wie in Combination 43.). Also ist $B = f.\alpha\beta$, und $B^2 = f.\alpha^2\beta^2 + 2f.\alpha^2\beta\gamma + 6f.\alpha\beta\gamma\delta$. Ferner ist, $C = f.\alpha\beta\gamma$, und $C.f.\alpha = f.\alpha^2\beta\gamma + 4f.\alpha\beta\gamma\delta$. Da $f.\alpha = 0$ gesetzt ist, so ist $f.\alpha^2\beta\gamma = -4f.\alpha\beta\gamma\delta$, also $B^2 = f.\alpha^2\beta^2 - 2f.\alpha\beta\gamma\delta$. Demnach ist $f.\alpha^4 = 2f.\alpha^2\beta^2 - 8f.\alpha\beta\gamma\delta$. Ist die Anzahl der Größen $= 4$, und werden die Wurzelgrößen wieder gebraucht, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 8\sqrt{abcd},$$

wo die noch gebliebene Irrationalität wegzuschaffen ist.

Die Bedingungen, unter welchen eine irrationale Formel einen rationalen Werth erhält, in dem Artikel, unbestimmte Analytik.

Irreducibilis casus, s. Gleichung, 76.

Irregular wird insbesondere von ebenen geradlinichten Figuren gebraucht, deren Seiten und Winkel einander nicht gleich sind. Körper mit ungleichen Seitenflächen, Flächen- und Eckenwinkeln, heißen irregular im Gegensatz gegen diejenigen, woran alles dieses, jedes in seiner Art, von gleicher Größe ist. Eine irregulare Curve ist diejenige, für welche kein gewisses Gesetz durch ihre Coordinaten Statt hat.

Isagonion, was gleich große Winkel hat.

Isochronon, dasjenige, was, oder woran etwas in gleichen Zeittheilen geschieht. Die Schwingungen der Pendel geschehen desto näher in gleichen Zeiten, je kleiner die Bogen sind. Die Curve, worauf ein schwerer Punct in gleich großen Zeittheilen fällt und steigt, könnte eine isochrona heißen, wiewohl sie gewöhnlich tautochrona heißt. Die Benennung isochrona gehört für die Curve,

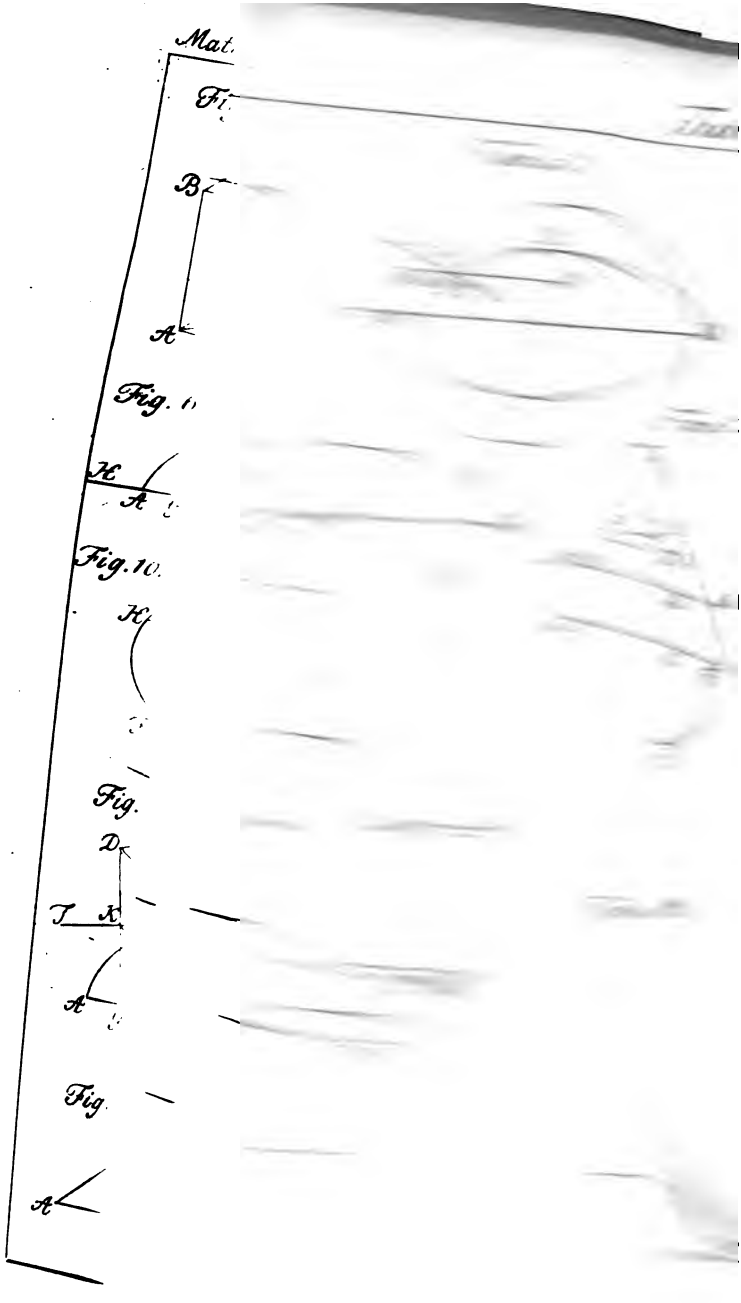
auf welcher ein fallender Punct in gleich großen Zeittheilen gleiche Räume nach der Richtung der Schwerkraft beschreibt. Die Isochrona paracentrica ist diejenige, auf welcher der fallende Körper sich einem gegebenen Puncte in gleichen Zeiten um gleiche Theile des Abstandes nähert oder sich von demselben entfernt. S. die zweyte Abtheilung dieses Werks.

Isomoeria, ein Kunstwort von Vieta, für die Methode die Brüche aus Gleichungen wegzuschaffen. Von ισος gleich, und μοιρα Theil.

Isoperimetron, was gleich großen Umfang hat. Unter Figuren gleichen Umfanges haben diejenigen den größten Inhalt, welche die meisten Seiten haben. S. Größtes und Kleinstes. Von dem isoperimetrischen Problem, dessen in den Artikeln, Geometrie S. 339, und Integralrechnung S. 761, erwähnt ist, s. Variationsrechnung.

Isopleuron, was gleich große Seiten hat. Von πλευρα, die Seite.

Isosceles, gleichschenklicht, wird von einem Dreyeck gebraucht. Von σκελος, Schenkel.


Mat.
B
A
Fig.
K
A
Fig. 10.
K
Fig.
D
T
K
A
Fig.
A